B A B II

TEORI KORELASI RANK SPEARMAN

2.1 Pengertian rank

Pandang peubah acak $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots, X_n$, yang masing-masing mempunyai nilai pengamatan $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_n$. Nilai-nilai pengamatan ini diberi nomor 1, nomor2, dan seterusnya, kemudian yang terbesar diberi nilai n. Nomor-nomor urut tersebut adalah rank, yaitu bilangan yang diberikan pada setiap pengamatan sesuai dengan urutan besarnya peubah acaknya. Susunan keseluruhan rank disebut ranking, dimana setiap anggotanya memiliki nilai rank. Misal kita ambil data sebagai berikut 5,2,1,4,3. Kemudian setelah dibuat ranking, data menjadi 1,2,3,4,5 dimana rank 1 = 1, rank 2 = 2, rank 3 = 3, rank 4 = 4, dan rank 5 = 5.

2.2 Pengertian Korelasi rank Spearman.

Jika sampel bivariat diambil dari populasi bivariat, yang terdiri dari n buah pasangan yaitu :

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) \ldots\ldots, (X_n, Y_n)$.

Dan didefinisikan bahwa

$R_i = \text{rank}(X_i)$, merupakan rank/urutan pengamatan X_i.

$S_i = \text{rank}(Y_i)$, merupakan rank/urutan pengamatan Y_i.

Rank diberikan kepada setiap pengamatan X_i maupun pengamatan Y_i yang berdasarkan pada urutan besarnya harga pengamatan dari terkecil hingga terbesar dari bilangan bulat positif 1,2,3,........,n. Sehingga nilai rank 1 diberikan kepada pengamatan dengan harga terkecil, dan nilai rank n diberikan kepada pengamatan dengan nilai terbesar

Bila distribusi marginal dari X dan Y diasumsikan kontinu maka secara teoritis terdapat himpunan pasangan rank secara tunggal yaitu :

$$(r_1,s_1),(r_2,s_2),(r_3,s_3)........,(r_n,s_n).$$

Hal tersebut terjadi dikarenakan pada data pengamatan berdistribusi kontinu, dapat diasumsikan tidak terdapat pengamatan dengan harga yang sama.

Huruf besar R_i menunjukkan statusnya sebagai variabel rank, sedangkan huruf kecil r_i menunjukkan nilai dari variabel rank R_i.

Maka korelasi rank Spearman (R_s) didefinisikan sebagai berikut :

$$R_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})(S_i-\bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2\sum_{i=1}^{n}(S_i-\bar{S})^2}} \quad ....(2.1.1)$$

Dari persamaan (2.1.1) diatas, maka korelasi rank Spearman sebenarnya adalah korelasi sampel perkalian momen Pearson yang diterapkan pada rank pengamatan, dan bukan pada harga pengamatan itu sendiri. Korelasi rank Spearman ini mengukur derajat hubungan diantara rank-rank pada kedua pengamatan sebagai ganti mengukur hubungan diantara harga-harga pengamatan pada sampel bivariat X dan Y itu sendiri. Namun demikian, korelasi rank Spearman masih dapat dipandang sebagai alat ukur derajat hubungan diantara sampel bivariat X dan Y, serta sebagai taksiran derajat hubungan antara variabel X dan Y pada populasi bivariat kontinu.

2.3 Penurunan Rumus Korelasi Rank Spearman Secara Umum

Pandang sampel bivariat :

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x_n,y_n)$

dengan himpunan pasangan rank :

$(r_1,s_1),(r_2,s_2),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(r_n,s_n)$

Maka korelasi rank Spearman :

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\overline{r})\,(s_i-\overline{s})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\overline{r})^2\sum_{i=1}^{n}(s_i-\overline{s})^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.1)$$

dimana :

$$r_i, s_i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

untuk

$$i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

Dengan mengingat bahwa operasi penjumlahan mempunyai sifat komutatif, maka

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = 1+2+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \ldots\ldots(2.3.2)$$

$$\bar{r} = \bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n} = \frac{\frac{n\ (n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2} \qquad \ldots\ldots.(2.3.3)$$

Juga dapat diketahui bahwa :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\ldots\ldots n^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6} \qquad \ldots\ldots\ldots.(2.3.4)$$

Kemudian :

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i^2 - 2\bar{r}r_i + \bar{r}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 - 2\ \bar{r}\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \frac{2\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i + \frac{n\left[\sum_{i=1}^{n} r_i\right]^2}{n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \frac{2\left[\sum_{i=1}^{n} r_i\right]^2}{n} + \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} r_i\right]^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} r_i\right]^2}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(2.3.5)$$

Sehingga kita dapatkan bahwa :

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6} - \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n}$$

$$= \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[\ 2(2n+1) - 3(n+1)\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[n - 1\right]$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{12} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.6)$$

Dengan cara yang sama kita peroleh pula bahwa :

$$\sum_{i=1}^{n}(s_i-\bar{s})^2 = \frac{n(n^2-1)}{12} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.7)$$

Persamaan (2.3.6) dan (2.3.7) disubstitusikan ke persamaan (2.3.1) didapat :

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})^2 \sum_{i=1}^{n}(s_i-\bar{s})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})}{\sqrt{\frac{n(n^2-1)}{12}\,\frac{n(n^2-1)}{12}}}$$

$$= 12\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})}{n(n^2-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.8)$$

Untuk pembilang pada persamaan (2.3.8) diatas dapat diselesaikan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s}) = \sum_{i=1}^{n}(r_i s_i - \bar{r}s_i - \bar{s}r_i + \bar{r}\,\bar{s})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i s_i - \bar{r}\sum_{i=1}^{n} r_i - \bar{s}\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{r}\,\bar{s}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i s_i - \frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)^2}{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i s_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.9)$$

Sehingga akan didapatkan :

$$r_s = \frac{12 \sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{12\left[\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - \frac{n(n+1)^2}{4}\right]}{n(n^2-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.10)$$

Jika persamaan (2.3.10) diturunkan lebih lanjut, maka :

$$r_s = \frac{12\left[\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - \frac{n(n+1)^2}{4}\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} - \frac{3n(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n-1)}$$

$$= \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} - \frac{3\ (n+1)}{(n-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.11)$$

Suatu rumus korelasi rank Spearman yang lain adalah dengan menggunakan pengertian selisih d_i , dimana :

$$d_i = r_i - s_i = (r_i-\bar{r}) - (s_i-\bar{s}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.12)$$

Maka didapatkan suatu bentuk :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big[\ (r_i-\bar{r}) - (s_i-\bar{s})\ \Big]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(r_i-\bar{r})^2 + (s_i-\bar{s})^2 - 2(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})^2 + \sum_{i=1}^{n} (s_i-\bar{s})^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})$$

Sehingga :

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})^2 + \sum_{i=1}^{n} (s_i-\bar{s})^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{2}$$

....................(2.3.13)

Jika kita substitusikan persamaan (2.3.13) serta persamaan (2.3.6) dan (2.3.7) ke persamaan (2.3.10), maka akan didapatkan rumus r_s tersebut :

$$r_s = \frac{12\left[\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \right]}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{12\left[\sum_{i=1}^{n} (r_i-\bar{r})^2 + \sum_{i=1}^{n} (s_i-\bar{s})^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right]}{2n(n^2-1)}$$

$$= \frac{6\left[\frac{n(n^2-1)}{12} + \frac{n(n^2-1)}{12} \right]}{n(n^2-1)} - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{\frac{n(n^2-1)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{2}}{n(n^2-1)} - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{n(n^2-1)} - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= \quad 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n(n^2-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.14)$$

Dengan tanpa mengurangi sifat keumuman, bahwa kesemua n buah pasangan (x_i, y_i) telah disusun terlebih dahulu berdasarkan urutan besar relatif komponen pengamatan x. Jadi didapat sampel bivariat $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots,(x_n,y_n)$ yang telah disusun dimana :

$$x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots < x_n$$

Dengan demikian diperoleh $r_i = i$, untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ dan himpunan pasangan rank-nya adalah :

$$(1,s_1) \;,\; (2,s_2) \;,\; \ldots\ldots\ldots\ldots,(n,s_n)$$

dan selisihnya adalah :

$$d_i = r_i - s_i$$

$$= i - s_i$$

untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,n$

2.4 Kriteria Koefisien Korelasi Yang Baik

Berikut ini akan diberikan kriteria korelasi yang baik. Dimana X dan Y adalah distribusi bivariat. Koefisien korelasi antara X dan Y yang baik harus memenuhi kriteria sebagai berikut :

1. Untuk setiap dua pasangan yang bebas (X_i, Y_i) dan (X_j, Y_j) koefisien bernilai +1 jika hubungan antara X dan Y

langsung dan sempurna, yaitu :

$$X_i < X_j \iff Y_i < Y_j$$

atau $$X_i > X_j \iff Y_i > Y_j$$

Hubungan antara X dan Y dikatakan sesuai sempurna.

2. Untuk setiap dua pasangan yang bebas (X_i, Y_i) dan (X_j, Y_j) koefisien bernilai -1 jika hubungan antara X dan Y tak langsung dan sempurna, yaitu :

$$X_i < X_j \iff Y_i > Y_j$$

atau $$X_i > X_j \iff Y_i < Y_j$$

Hubungan antara X dan Y dikatakan tak sesuai sempurna.

3. Jika kriteria 1 maupun kriteria 2 tidak benar untuk seluruh pasangan, maka koefisien korelasinya bernilai antara -1 dan +1.

4. Bila X dan Y saling bebas, maka koefisien korelasinya bernilai nol.

5. Koefisien antara X dan Y adalah sama dengan koefisien korelasi antara Y dan X, atau antara -X dan -Y atau antara -Y dan -X.

6. Koefisien korelasi antara -X dan Y, atau antara x dan -Y, adalah negatif dari korelasi antara X dan Y.

7. Koefisien korelasi tidak berubah (invariant) terhadap semua transformasi dari X dan Y yang mengawetkan

urutan besarnya.

Kemudian akan dibuktikan satu persatu bahwa korelasi rank Spearman memenuhi ketujuh kriteria diatas. Karena r_s merupakan suatu korelasi rank, maka pembahasan dilakukan terhadap pasangan rank (R_i, S_i) dan bukan terhadap pasangan (X_i, Y_i) itu sendiri.

1. Diasumsikan bahwa kesemua n pasangan pengamatan $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots\ldots,(x_n,y_n)$ telah disusun berdasarkan urutan besar relatif komponen X. Jadi kita dapatkan himpunan pasangan rank $(1,s_1),(2,s_2),\ldots\ldots\ldots\ldots,(n,s_n)$.

Untuk setiap dua pasangan rank $(i,s_i),(j,s_j)$, dan jika hubungan antara R dan S sesuai sempurna, maka berlaku

$$i < j \iff s_i < s_j$$

Dengan demikian didapatkan bahwa pada himpunan pasangan rank $(1,s_1),(2,s_2),\ldots\ldots\ldots,(n,s_n)$ berlaku :

$$s_1 < s_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots < s_n$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $s_1=1$, $s_2=2$, $\ldots,s_n=n$, atau dapat dituliskan $s_i = i$ untuk $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$.

Jadi secara keseluruhan dapat dituliskan :

$$r_i = i$$

$$s_i = i$$

$$d_i = r_i - s_i = 0 \quad \text{untuk } i = 1,2,\ldots,n. \quad \text{Maka :}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n(n^2-1)}$$

$$= 1$$

Jadi terbukti bahwa jika hubungan antara R dan S sesuai sempurna, maka harga $r_s = 1$

2. Asumsikan bahwa kesemua n pasangan pengamatan $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots,(x_n,y_n)$ disusun berdasarkan urutan besar relatif komponen X. Jadi kita peroleh himpunan pasangan rank $(1,s_1),(2,s_2),\ldots\ldots,(n,s_n)$.

Untuk setiap dua pasangan rank $(i,s_i),(j,s_j)$, dan jika hubungan antara R dan S sesuai sempurna, maka :

$$i < j \iff s_i > s_j$$

Dengan demikian kita dapatkan bahwa pada himpunan pasangan rank $(1,s_1),(2,s_2),\ldots\ldots,(n,s_n)$ berlaku :

$$s_1 > s_2 > \ldots\ldots\ldots > s_n .$$

Sehingga disimpulkan bahwa $s_1=n$, $s_2=n-1$, ...,$s_n=1$, atau dapat dituliskan $s_i=n-i+1$ untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,n$.

Jadi secara keseluruhan dapat dituliskan :

$$r_i = i$$

$$s_i = n-i+1$$

$$d_i = r_i - s_i$$

$$= 2\left(i - \frac{n+1}{2}\right)$$

untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ dan :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(i - \frac{n+1}{2}\right)\right]^2$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 + n(n+1)^2 - 4(n+1)\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 4\,\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6} + n(n+1)^2 - 4(n+1)\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2}{3}\,n(n+1)(2n+1) - n(n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)}{3}\left[\,2(2n+1) - 3(n+1)\,\right]$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Sehingga nilai r_s adalah

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{2n\ (n^2-1)}{n\ (n^2-1)}$$

$$= -1$$

Jadi terbukti bahwa jika hubungan antara R dan S tak sesuai sempurna, maka harga r_s = -1

3. Akan dibuktikan bahwa statistik r_s terletak dalam interval (-1,1) , dan kita ketahui bahwa :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n(n^2-1)}$$

Maka harga r_s akan mencapai minimum, bila harga $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ maksimum, yaitu bila harga r_i bertolak belakang dengan s_i untuk semua harga i = 1,2,.......,n dengan kata lain bila hubungan antara R dan S tak sesuai sempurna. Dan dari bukti kriteria (2) kita dapatkan bahwa harga r_s untuk keadaan ini adalah sebesar -1. jadi didapatkan bahwa harga minimum untuk r_s adalah 1. Harga r_s akan mencapai maksimum bila harga $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ minimum yaitu bila harga $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ sama dengan nol, dengan kata lain bila hubungan antara R dan S sesuai sempurna. Dan dari bukti kriteria (1) didapat bahwa harga r_s untuk keadaan ini adalah sebesar +1. Jadi kita dapatkan harga maksimum untuk r_s adalah +1.

Sehingga secara keseluruhan kita dapatkan bahwa harga minimum untuk r_s adalah -1 dan harga maksimum untuk r_s adalah +1. dengan demikian dapatkan disimpulkan bahwa untuk semua himpunan pasangan rank $(1,s_1),(2,s_2),\ldots\ldots,(n,s_n)$ yang mungkin, maka harga r_s terletak didalam interval (-1,+1).

4. Sekarang akan ditunjukan bahwa bila X dan Y saling bebas, maka r_s bernilai nol secara rata-rata. dengan kata lain ekspetasi r_s adalah nol. Kita ketahui bila X dan Y saling bebas maka R_i dan S_i juga saling bebas. Dan kita ketahui bahwa $E(R_i) = E(S_i) = \dfrac{n+1}{2}$ Maka , bila X dan Y saling bebas, kita dapatkan :

$$\begin{aligned} E(R_iS_i) &= E(R_i)\ E(S_i) \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1) \end{aligned}$$

Kemudian karena R_i dan S_i berdistribusi identik, maka R_iS_i juga berdistribusi identik, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{n} R_iS_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} E\left[R_iS_i\right] \\ &= n\ E\left[R_iS_i\right] \\ &= n\ \frac{(n+1)^2}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.2) \end{aligned}$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (2.3.11) dan (2.4.2), dan jika X dan Y saling bebas maka diperoleh :

$$E(r_s) = E\left[\frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} - \frac{3\ (n+1)}{(n-1)}\right]$$

$$= \frac{12}{n(n^2-1)}\left[n\ \frac{(n+1)^2}{4}\right] - \frac{3\ (n+1)}{(n+1)}$$

$$= \frac{3\ (n+1)}{(n-1)} - \frac{3\ (n+1)}{(n-1)}$$

$$= 0$$

Maka terbuktilah bahwa jika X dan Y saling bebas, r_s bernilai nol secara rata-rata.

5. Pembuktian pada kriteria (5) ini meliputi tiga bagian yang menunjukkan adanya sifat komutatif.

(i) Korelasi rank Spearman antara X dan Y adalah sama dengan korelasi rank Spearman antara Y dan X.

Pandang sampel bivariat $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots\ldots,(X_n,Y_n)$.

harga pengamatan X : $x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n$

rank : $r_1,r_2,\ldots\ldots\ldots,r_n$

harga pengamatan Y : $y_1,y_2,\ldots\ldots\ldots,y_2$

rank : $s_1,s_2,\ldots\ldots\ldots,s_n$

Maka korelasi rank Spearman antara X dan Y :

$$d_i = r_i - s_i$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - s_i)^2}{n(n^2-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.3)$$

Sedangkan untuk korelasi rank Spearman antara Y dan X :

$$d_i = s_i - r_i$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(s_i - r_i)^2}{n(n^2-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.4)$$

Sehingga didapat bahwa persamaan (2.4.3) = persamaan (2.4.4), dan terbukti bahwa rank Spearman antara X dan Y adalah sama dengan rank Spearman antara Y dan X.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa korelasi rank Spearman antara X dan Y adalah sama dengan korelasi rank Spearman antara -X dan -Y :

Pandang sampel bivariat $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots\ldots\ldots,(X_n,Y_n)$

harga pengamatan X : $x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n$

rank : $r_1,r_2,\ldots\ldots\ldots,r_n$

harga pengamatan Y : $y_1,y_2,\ldots\ldots\ldots,y_n$

rank : $s_1,s_2,\ldots\ldots\ldots,s_n$

Maka korelasi rank Spearman antara X dan Y :

$$d_i = r_i - s_i$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - s_i)^2}{n(n^2-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.5)$$

Sedangkan korelasi rank Spearman antara -X dan -Y :

Jika sampel bivariat $(-x_1,-y_1),(-x_2,-y_2),\ldots\ldots,(-x_n,-y_n)$ dengan :

harga pengamatan -X : $-x_1,-x_2,\ldots\ldots,-x_n$

rank : $r'_1,r'_2,\ldots\ldots,r'_n$

harga pengamatan -Y : $-y_1,-y_2,\ldots\ldots,-y_n$

rank : $s'_1,s'_2,\ldots\ldots,s'_n$

dimana $r'_i = n+1-r_i$

$s'_i = n+1-s_i$

$d'_i = r'_i - s'_i$

$= s_i - r_i$

$$r'_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d'^2_i}{n(n^2-1)}$$

$$r'_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} (s_i - r_i)^2}{n(n^2-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.6)$$

Didapat bahwa persamaan (2.4.5) = persamaan (2.4.6), dan terbukti bahwa korelasi rank antara X dan Y adalah sama dengan korelasi rank Spearman antara -X dan -Y.

(iii) Dengan menggunakan sifat komutatif pada bukti kriteria (i) maka korelasi rank Spearman antara -X dan -Y adalah sama dengan korelasi rank Spearman antara -Y dan -X. Maka dari bukti kriteria 5(i), 5(ii), dan 5(iii), dapat disimpulkan korelasi rank Spearman antara X dan Y adalah sama dengan korelasi rank Spearman antara Y dan X, atau antara -X dan -Y atau antara -Y dan -X.

6. Pembuktian kriteria 6 ini meliputi dua bagian yaitu :

(i) Akan ditunjukkan bahwa korelasi rank Spearman antara $-X$ dan Y adalah negatif dari korelasi rank Spearman antara X dan Y.

Pandang sampel bivariat $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots\ldots\ldots,(X_n,Y_n)$

harga pengamatan X : $x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,x_n$

rank : $r_1,r_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_n$

harga pengamatan Y : $y_1,y_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,y_n$

rank : $s_1,s_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,s_n$

Maka korelasi rank Spearman antara X dan Y :

$$d_i = r_i - s_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i\right]$$

$$= 1 - \frac{2(2n+1)}{(n-1)} + \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{(n-1) - 2(2n+1)}{(n-1)} + \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{-3n-3}{n-1} + \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.7)$$

Pandang sampel bivariat $(-X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots\ldots, (-X_n, Y_n)$

harga pengamatan X : $-x_1, -x_2, \ldots\ldots\ldots, -x_n$

rank : $r'_1, r'_2, \ldots\ldots\ldots, r'_n$

harga pengamatan Y : $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n$

rank : $s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots, s_n$

dimana $r'_i = n+1-r_i$

$s'_i = s_i$

Maka korelasi rank Spearman antara -X dan Y :

$$d'_i = r'_i - s'_i$$
$$= n+1-r_i-s_i$$
$$= n+1-(r_i+s_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} (n+1)^2 + \sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - 2(n+1)\left[\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} s_i\right]$$

$$= n(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - 2(n+1)\ [n(n+1)]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - n(n+1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.8)$$

Sehingga :

$$r'_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i\right]$$

$$= 1 - \frac{2(2n+1)}{n-1} + \frac{6(n+1)}{n-1} - \frac{12\sum_{i=1} r_i s_i}{n(n^2-1)}$$

$$= \frac{3n+3}{n-1} - \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.9)$$

Maka dari persamaan (2.4.7) dan persamaan (2.4.9), kita dapatkan bahwa $r'_s = -r_s$. Terbuktilah bahwa korelasi rank Spearman antara -X dan Y adalah negatif dari korelasi rank Spearman antara X dan Y.

(ii) Akan dibuktikan bahwa korelasi rank Spearman antara X dan -Y adalah negatif dari korelasi rank Spearman antara X dan Y.

Dari bukti kriteria 6(i) didapat korelasi rank Spearman antara X dan Y adalah :

$$r_s = \frac{-3n-3}{n-1} + \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.10)$$

Pandang sampel bivariat $(x_1,-y_1),(x_2,-y_2),\ldots\ldots,(x_n,-y_n)$

harga pengamatan X : $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$

rank : $r'_1, r'_2, \ldots\ldots\ldots, r'_n$

harga pengamatan -Y : $-y_1, -y_2, \ldots\ldots, -y_n$

rank : $s'_1, s'_2, \ldots\ldots\ldots, s'_n$

dimana $r'_i = r_i$

$s'_i = n+1-s_i$

$d'_i = r'_i - s'_i$

$= r_i-(n+1)+s_i$

$= (r_i+s_i) -(n+1)$

Maka korelasi rank Spearman antara X dan -Y adalah :

$$\sum_{i=1}^{n} d'^2_i = \sum_{i=1}^{n} \left[(r_i+s_i) - (n+1)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(n+1) - (r_i+s_i)\right]^2$$

Dari persamaan (2.4.8) didapatkan :

$$\sum_{i=1}^{n} d'^2_i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - n(n+1)^2 \quad \text{.......(2.4.11)}$$

Sehingga :

$$r'_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6}{n(n+1)^2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i - n(n+1)^2\right]$$

Dari persamaan (2.4.9) didapatkan :

$$r'_s = \frac{3n+3}{n-1} - \frac{12\sum_{i=1}^{n} r_i s_i}{n(n^2-1)} \quad \text{.....................(2.4.12)}$$

Maka dari persamaan (2.4.10) dan persamaan (2.4.12) didapatkankan $r'_s = -r_s$. Dengan demikian terbukti bahwa korelasi rank Spearman antara -X dan Y adalah negatif dari korelasi rank Spearman antara X dan Y.

7. Karena korelasi rank Spearman dihitung berdasarkan rank dari pengamatan, dan bukan dari harga pengamatan itu

sendiri, maka r_s tidak berubah terhadap semua transformasi dari X dan Y yang mengawetkan urutan besarnya atau ranknya. Misalnya diambil data sebagai berikut :

X	Y	R_i	S_i
2	6	1	3
4	9	2	5
5	2	3	1
8	7	4	4
9	5	5	2

Kemudian ditransformasikan ke

X+3	Y+3	R_i'	S_i'
5	9	1	3
7	12	2	5
8	5	3	1
11	10	4	4
12	8	5	2

Pada contoh diatas ranking R_i dan S_i tetap sama urutannya (invariant) dengan ranking dari R_i' dan S_i' meskipun telah ditransformasikan ke X+3 dan Y+3.