

BAB III

PERSAMAAN RUANG KEADAAN

3.1. Persamaan Ruang Keadaan Dari Sistem Berjenis n :

Pada bab III ini akan dibahas metode-metode untuk mencari penyajian persamaan ruang keadaan dari persamaan diferensial orde ke n .

3.1.1. Penyajian Ruang Keadaan Dari Sistem Berjenis n

yang dinyatakan oleh Diferensial Linier dengan

Fungsi Penggerak tidak Melibatkan Bentuk Turunan :

Tinjauan sistem orde ke n berikut :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (3.1)$$

$U(t)$ = masukan untuk $t > 0$

$y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$: himpunan n variabel keadaan

Kita definisikan : $x_1 = y$

$$x_2 = \dot{y}$$

\vdots

\vdots

$$x_n = y^{(n-1)}$$

Selanjutnya persamaan (3-1) dapat ditulis sebagai:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dots = x_4$$

\vdots

$$\dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -a_n y - a_{n-1} \dot{y} - \dots - a_2 \ddot{y} - a_1 \dddot{y} + u \\ &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

atau:

$$\dot{x} = A x + B U \dots \dots \dots (3.2)$$

dimana :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan keluaran menjadi :

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

atau :

$$y = C x \dots \dots \dots (3.3)$$

dimana :

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Persamaan diferensial berjenis satu :

Persamaan (3-2) adalah persamaan keadaan

Persamaan (3-3) adalah persamaan keluaran

Contoh :

Tinjau sistem yang didefinisikan oleh :

$$\ddot{y} + 8 \dot{y} + 11 y + 8 y = 8 U$$

dimana y adalah keluaran dan u adalah masukan sistem.

Carilah persamaan keadaan dari sistem.

Penyelesaian :

Kita definisikan variabel keadaan sebagai :

$$\begin{aligned}
 x_1 = y & \quad \text{Kita peroleh : } \dot{x}_1 = x_2 \\
 x_2 = \dot{y} & \quad \dot{x}_2 = x_3 \\
 x_3 = \ddot{y} & \quad \dot{x}_3 = -8x_1 - 11x_2 - 8x_3 + 8U
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan notasi matriks vektor dapat di tulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|ccc|c|c|c}
 \hline
 \dot{x}_1 \\
 x_1 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 1 & 0 & x_1 \\
 0 & 0 & 1 & x_2 \\
 -8 & -11 & -8 & x_3
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c|c}
 0 \\
 0 \\
 8
 \end{array}
 U$$

Persamaan keluaran dinyatakan :

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{array}{c|c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

3.1.3. Penyajian Ruang Keadaan dari Sistem Berjenis n yang Dinyatakan Oleh Persamaan Diferensial Linier Dengan Fungsi Penggerak Melibatkan Bentuk Turunan.

Tinjau persamaan Diferensial berikut :

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y &= b_0 U^{n-1} + \dots \\
 + b_{n-1} \dot{U} + b_n U &\dots\dots\dots (3.6)
 \end{aligned}$$

Mendefinisikan variabel keadaan dalam kasus ini terletak pada bentuk turunan pada ruas kanan. Sehingga variabel keadaan didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y - 0 U \\
 x_2 &= y - 0 U - 1 U = x_1 - 1 U \\
 x_3 &= y - 0 U - 2 U = x_2 - 2 U \\
 &\vdots \\
 x_n &= y - 0 U - \dots - (n-1) U - (n-1) U = x_{n-1} - (n-1) U
 \end{aligned}$$

dimana $0, 1, 2, \dots, n$ ditentukan dari :

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= b_0 \\
 \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\
 \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\
 &\vdots \\
 \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0
 \end{aligned}$$

Persamaan keadaan dan persamaan keluaran dari persamaan

(3-6) adalah :

$$\begin{array}{c|ccc|c|ccc}
 \begin{array}{c} x_1 \\ \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ \cdot \\ x_n \end{array} & = & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -a_n \\ -a_{n-1} \\ -a_{n-2} \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -a_{n-1} \\ -a_{n-2} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ -a_1 \end{array} & \begin{array}{c} x_1 \\ \cdot \\ x_2 \\ \cdot \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ \cdot \\ x_n \end{array} & + & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n-1 \\ n \end{array} U
 \end{array}$$

$$y = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 U$$

atau :

$$\dot{x} = A x + B U \dots \dots \dots (3.7)$$

$$y = C x + D U \dots \dots \dots (3.B)$$

dimana :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad C = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \\ D = \beta_0 = b_0$$

Contoh :

Carilah persamaan keadaan dari persamaan diferensial berikut :

$$\ddot{y} + 5 \dot{y} + 8 y + 20 y = 10 \dot{U} + 30 U$$

Penyelesaian :

Definisi dari variabel keadaan :

$$x_1 = y - \beta_0 U$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{U} - \beta_1 U = \dot{x}_1 - \beta_1 U$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{U} - \beta_1 \dot{U} - \beta_2 U = \dot{x}_2 - \beta_2 U$$

dimana :

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0 - 5 \cdot 0 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 10 - 5 \cdot 0 - 8 \cdot 0 = 10$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \cdot 0$$

$$= 30 - 5 \cdot 10 - 8 \cdot 0 - 20 \cdot 0$$

$$= 30 - 50$$

$$= -20$$

Persamaan keadaan :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

dan Persamaan keluaran :

$$y = (1 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3.2. PENYELESAIAN PERSAMAAN KEADAAN PARAMETER - KONSTAN

Pada bab ini akan mencari solusi Persamaan keadaan parameter konstan yang homogen dan non-homogen. Sebelumnya kita tinjau dulu persamaan diferensial skalar.

3.2.1. Persamaan Keadaan Homogen

Theorema 3.1

Pandangan persamaan diferensial skalar yang homogen berikut : $\dot{x}(t) = a x(t)$ (3.9)

dimana :

$$x(t) = \text{fungsi } t$$

$a = \text{konstan}$

Maka P.D. tersebut diatas mempunyai solusi berbentuk :

$$x(t) = e^{at} x(0)$$

Bukti :

Misal jawab $x(t)$ mempunyai bentuk :

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (3.10)$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots$$

Sehingga :

$$\dot{x}(t) = a x(t)$$

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots =$$

$$a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots)$$

Sehingga : di dapat hubungan :

$$b_1 = a b_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} a b_1 = \frac{1}{2} a \cdot a b_0 = \frac{1}{2} a^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} a b_2 = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a^2 b_0 = \frac{1}{3 \cdot 2} a^3 b_0$$

$$b_4 = \frac{1}{4} a b_3 = \frac{1}{4} a \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} a^3 b_0 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} a^4 b_0$$

⋮

⋮

$$b_k = \frac{1}{k} a b_{k-1} = \frac{1}{k} a \cdot \frac{1}{(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2} a^{k-1} b_0$$

$$= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2} a^k b_0$$

$$= \frac{1}{k!} a^k b_0 \quad \dots \dots \dots (3.11)$$

Harga b_0 diperoleh dengan dengan mensubstitusikan $t = 0$

ke dalam persamaan (3 - 10), sehingga diperoleh :

$$x(0) = b_0$$

Sehingga jawab $x(t)$ dapat ditulis :

$$\begin{aligned} x(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots + b_k t^k + \dots \\ &= b_0 + a b_0 t + \frac{1}{2!} a^2 b_0 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 b_0 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} a^k b_0 t^k + \dots \\ &= (1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots) b_0 \end{aligned}$$

Karena :

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots$$

$$x(0) = b_0$$

Maka :

$$x(t) = e^{at} x(0) \quad \text{(terbukti)} \quad \dots \quad (3.12)$$

Theorema 3.2 :

Pandang persamaan diferensial matriks - vektor homogen :

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad \dots \quad (3.13)$$

dimana :

$x(t)$ = vektor n dimensi

A = matriks $n \times n$

Maka solusi persamaan diferensial tersebut diatas mempunyai bentuk : $x(t) = e^{At} x(0)$

Bukti :

Berdasarkan bukti Theorema 3.1

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (3.14)$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3 b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots$$

Sehingga :

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots)$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku ke t

dengan pangkat yang sama, diperoleh :

$$b_1 = A b_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} A b_1 = \frac{1}{2} A \cdot A b_0 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} A b_2 = \frac{1}{3} A \cdot \frac{1}{2} A^2 b_0 = \frac{1}{3 \cdot 2} A^3 b_0$$

$$b_4 = \frac{1}{4} A b_3 = \frac{1}{4} A \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} A^3 b_0 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} A^4 b_0$$

⋮

$$b_k = \frac{1}{k} A b_{k-1} = \frac{1}{k} A \cdot \frac{1}{(k-1)(k-2) \dots 3 \cdot 2} A^{k-1} b_0$$

$$= \frac{1}{k!} A^k b_0$$

Dengan mensubstansikan $t=0$ kedalam persamaan (3.14), diperoleh :

$$x(0) = b_0$$

Solusi $x(t)$ dapat ditulis :

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots + b_k t^k + \dots$$

$$= b_0 + A b_0 t + \frac{1}{2!} A^2 b_0 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 b_0 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} A^k b_0 t^k + \dots$$

$$= (I + A t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) b_0$$

Karena :

$$e^{At} = I + A t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$$

$$x(0) = b_0$$

maka :

$$x(t) = e^{At} x(0). \text{ (terbukti) } \dots \dots \dots (3.15)$$

Pendekatan transformasi Laplace pada jawab persamaan keadaan yang homogen :

Sebelumnya kita akan mencari dahulu penyelesaian

persamaan diferensial skalar homogen, kemudian mencari

penyelesaian persamaan diferensial matriks-vektor dengan pendekatan transformasi Laplace.

Theorema 3.3

Pandang persamaan diferensial skalar homogen :

$$\dot{x}(t) = a x(t) \dots \dots \dots (3.16)$$

dimana :

$$x(t) = \text{fungsi } t$$

$$a = \text{konstan}$$

Maka P.D. tersebut mempunyai penyelesaian berbentuk :

$$x(t) = e^{at} x(0)$$

Bukti :

$$\mathcal{L} [x(t)] = X(s)$$

$$\mathcal{L} [\dot{x}(t)] = s X(s) - x(0)$$

Transformasi Laplace dari persamaan (3-16) adalah :

$$s X(s) - x(0) = a X(s)$$

$$s X(s) - a X(s) = x(0)$$

$$(s-a) X(s) = x(0)$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a} x(0)$$

$$X(s) = (s-a)^{-1} x(0)$$

$$\frac{1}{s-a} = \frac{1}{s} + \frac{a}{s^2} + \frac{a^2}{s^3} + \dots$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-a} \right] = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$= e^{at}$$

Transformasi Laplace baliknya adalah :

$$x(t) = e^{at} x(0) \dots \dots \dots (3.17)$$

Theorema 3.4 :

Pandang persamaan diferensial matriks-vektor homogen :

$$\dot{x}(t) = A x(t) \dots \dots \dots (3.18)$$

dimana :

$\dot{x}(t)$ = vektor n dimensi

A = matriks konstan n x n

Maka penyelesaian persamaan diferensial tersebut mempunyai bentuk :

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

Bukti :

$$\mathcal{L} [x(t)] = X(s)$$

$$\mathcal{L} [\dot{x}(t)] = s X(s) - x(0)$$

Transformasi Laplace dari persamaan (3.18) adalah :

$$s X(s) - x(0) = A X(s)$$

$$s X(s) - A X(s) = x(0)$$

$$(s I - A) X(s) = x(0)$$

$$X(s) = \frac{1}{sI - A} x(0)$$

$$= (s I - A)^{-1} x(0)$$

$$\mathcal{L}^{-1} [X(s)] = \mathcal{L}^{-1} [(s I - A)^{-1}] x(0)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} [(s I - A)^{-1}] x(0) \dots \dots \dots (3.19)$$

Untuk :

$$(s I - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \frac{A^3}{s^4} + \dots$$

maka :

$$\mathcal{L}^{-1} [(s I - A)^{-1}] = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$= e^{At}$$

Sehingga penyelesaian dari persamaan (3.18) adalah :

$$x(t) = e^{At} x(0). \dots (\text{terbukti})$$

Contoh :

Carilah $e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}]$ dari persamaan

berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+5) - (-1)6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+3} & \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

atau :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

3.2.2. Persamaan Keadaan Non Homogen

Untuk mempermudah mencari penyelesaian Persamaan Keadaan Non Homogen, lebih dulu kita mencari penyelesaian persamaan diferensial non homogen skalar :

Theorema 3.5 :

Pandang persamaan diferensial non homogen skalar :

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b U(t) \dots \dots \dots (3.20)$$

$$\text{atau : } \dot{x}(t) - a x(t) = b U(t)$$

dimana :

$$x(t) = \text{fungsi } t$$

$$U(t) = \text{fungsi } t$$

$$a = \text{konstan}$$

$$b = \text{konstan}$$

Maka persamaan diferensial ini mempunyai penyelesaian yang bentuknya :

$$x(t) = e^{at} x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b U(\tau) d\tau \dots \dots (3.21)$$

Bukti :

$$\dot{x}(t) - a x(t) = b U(t)$$

Bila ruas kanan dan kiri dikalikan dengan e^{-at} , diperoleh

$$e^{-at} [\dot{x}(t) - a x(t)] = e^{-at} bU(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-at} x(t)] = e^{-at} bU(t)$$

$$e^{-at} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-az} bU(z) dz$$

$$e^{-at} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-az} bU(z) dz$$

$$x(t) = e^{at} x(t_0) + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-az} bU(z) dz$$

Untuk $t_0 = 0$, maka :

$$x(t) = e^{at} x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-az} bU(z) dz$$

$$= e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-z)} bU(z) dz \quad (\text{terbukti})$$

Theorema 3.6 :

Pandang persamaan diferensial matriks-vektor non homogen, skalar :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B U(t) \dots \dots \dots (3.22)$$

atau $\dot{x}(t) - A x(t) = B U(t)$

dimana :

$x(t)$ = vektor n dimensi

$U(t)$ = vektor r dimensi

A = matriks konstan $n \times n$

B = matriks konstan $n \times r$

Maka persamaan diferensial tersebut mempunyai penyelesaian yang berbentuk :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau \dots (3.23)$$

Bukti :

$$\dot{x}(t) - A x(t) = B U(t)$$

Kedua ruas dikalikan dengan e^{-At} , diperoleh :

$$e^{-At} [\dot{x}(t) - A x(t)] = e^{-At} B U(t)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-At} x(t) = e^{-At} B U(t)$$

$$e^{-At} x(t) - e^{-A t_0} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau$$

$$e^{-At} x(t) = e^{-A t_0} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau$$

Untuk $t_0 = 0$, maka :

$$x(t) = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau$$

atau :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau \text{ (terbukti)}$$

Contoh :

Carilah $x(t)$ dari persamaan diferensial, berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(t)$$

dimana untuk $t = 0$, maka $U(t) = I(t)$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dan persamaan (3.20) :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}]$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s & -2 \\ 3 & s+5 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+5) - (-2)3} \begin{pmatrix} s+5 & 2 \\ -3 & s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{pmatrix} s+5 & 2 \\ -3 & s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+5 & 2 \\ -3 & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{2}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\ \frac{-3}{s+2} + \frac{3}{s+3} & \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & -2e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{-3t} & e^{-2t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

atau :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & -2e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{-3t} & e^{-2t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} 3e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-3(t-\tau)} & -2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-3(t-\tau)} \\ -3e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)} - \frac{2}{3}e^{-3(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)} - \frac{2}{3}e^{-3(t-\tau)} \\ -\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{2}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} & -1 + e^{-2t} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} + 1 - e^{-3t} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{5}{6} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-3t} & -\frac{1}{3} + e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - e^{-3t} & -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & -2e^{-2t} + 2e^{-3t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{-3t} & -3e^{-2t} + e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Karena syarat awal $x(0) = 0$, maka $x(t)$ dapat disederhanakan menjadi :

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

3.3. PERSAMAAN KEADAAN PARAMETER BERUBAH

Theorema 3.7

Pandang persamaan keadaan berikut :

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) \dots \dots \dots (3.24)$$

dimana :

$x(t)$ = vektor n dimensi

$A(t)$ = matriks $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan fungsi t .

Persamaan keadaan tersebut mempunyai penyelesaian berbentuk :

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) \dots \dots \dots (3.25)$$

Untuk :

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]$$

Bukti :

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t)$$

$$\frac{d x(t)}{dt} - A(t) x(t) = 0$$

$$\frac{d x(t)}{dt} - A(t) x(t) = 0$$

$$\ln x(t) + \ln e^{-\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} = \ln x(t_0)$$

$$\ln x(t) = \ln x(t_0) + \ln e^{-\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}$$

$$= \ln x(t_0) \cdot \ln e^{-\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}$$

$$x(t) = x(t_0) \cdot \ln e^{-\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}$$

$$= x(t_0) \cdot \Phi(t, t_0) \quad (\text{Terbukti})$$

$$= \Phi(t, t_0) x(t_0)$$

dimana $\phi(t_1, t_0)$ adalah matriks non-singular $n \times n$ yang memenuhi persamaan diferensial matriks berikut :

$$\dot{\phi}(t_1, t_0) = A(t) \phi(t_1, t_0) \text{ dan } \phi(t_0, t_0) = I \dots (3.26)$$

Sehingga persamaan (3.25) merupakan penyelesaian dari (3.26) dapat diperiksa secara mudah, karena :

$$x(t_0) = \phi(t_0, t_0) x(t_0) = I x(t_0)$$

dan

$$x(t) = \phi(t_2, t_0) x(t_0)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \phi(t_2, t_0) x(t_0)$$

$$= \dot{\phi}(t_2, t_0) x(t_0)$$

$$= A(t) \phi(t_2, t_0) x(t_0)$$

$$= A(t) x(t)$$

Theorema 3.8 :

Pandang persamaan keadaan linier parameter berubah berikut :

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) U(t) \dots \dots \dots (3.27)$$

dimana :

$x(t)$ = vektor n dimensi

$U(t)$ = vektor r dimensi

$A(t)$ = matriks $n \times n$ elemennya merupakan fungsi t

$B(t)$ = matriks $n \times r$ elemennya merupakan fungsi t .

Persamaan keadaan tersebut mempunyai penyelesaian sebagai berikut :

$$x(t) = \phi(t_2, t_0) x(t_0) + \phi(t_2, t_0) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) U(\tau) d\tau$$

atau :

$$x(t) = \phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) U(\tau) d\tau \dots (3.28)$$

Bukti :

$$\text{Misal : } x(t) = \phi(t, t_0) f(t)$$

dimana $\phi(t, t_0)$ memenuhi persamaan berikut :

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t) \phi(t, t_0) \text{ dan } \phi(t_0, t_0) = I$$

Selanjutnya :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \phi(t, t_0) f(t) \\ &= \dot{\phi}(t, t_0) f(t) + \phi(t, t_0) \dot{f}(t) \\ &= A(t) \phi(t, t_0) f(t) + \phi(t, t_0) \dot{f}(t) \\ &= A(t) \phi(t, t_0) f(t) + B(t) U(t) \end{aligned}$$

Oleh karena :

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) \dot{f}(t) &= B(t) U(t) \\ \dot{f}(t) &= \phi^{-1}(t, t_0) B(t) U(t) \\ f(t) &= f(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) U(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Karena : $f(t_0) = x(t_0)$

Sehingga :

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, t_0) f(t) \\ &= \phi(t, t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) U(\tau) d\tau \right] \\ &= \phi(t, t_0) x(t_0) + \phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) U(\tau) d\tau \\ &= \phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) U(\tau) d\tau \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$