BAB II

MATERI PENDUKUNG

2.1. PENGERTIAN FUNGSI :

Definisi : 2.1

f disebut fungsi dari himpunan E ke dalam R jika untuk setiap x E menentukan dengan tunggal kawannya $Y \in R$, yang ditulis dengan $Y = f(x)$.

Suatu fungsi f dari himpunan E ke dalam R sering pula didefinisikan sebagai himpunan semua pasangan bilangan riil berurutan $f = \{(x,y) \mid x \in E\}$ sedemikian hingga, apabila (x_1, y_1), $(x_1, y_2) \in f$, maka $y_1 = y_2$.

Dalam definisi diatas, x disebut variabel bebas dan y variabel tak bebas dan disebut fungsi dari x. $y = f(x)$ disebut persamaan fungsi f. E disebut domain fungsi f dan $\{y \mid y = f(x)\}$ disebut range fungsi f. Bila $y_0 = f(x_0)$, maka y_0 disebut nilai fungsi f di titik x_0.

Contoh :

Misalkan $E = \{x \mid -2 < x < 5\}$ dan $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$

Tentukan :

a. $f(-2)$, $f(1)$ dan $f(5)$

b. Range fungsi f.

Jawab :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

a. $f(-2) = (-2)^2 - 2.(-2)-3$
$= 4 + 4 - 3$
$= 8 - 3$
$= 5$

$f(5) = 5^2-2.5 -3$
$= 25 -10 -3$
$= 12$

$f(1) = 1^2 - 2.1 - 3$
$= 1 - 2 - 3$
$= -4$

b. Range fungsi f adalah : $\{y \mid -4 < y < 12\}$

Definisi 2.2

Titik $x = x_0$ disebut titik limit dari himpunan bilangan-bilangan riil E untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $x \in E$ sedemikian hingga $0 < | x-x_0 | < \delta$

Contoh :

Misalkan $A = \{x \mid 1 < x < 5\} \cup \{ 9 \}$ setiap titik $x_0 \in A$, $x_0 \neq 9$ merupakan titik limit dari A. Titik $x = 5$ juga titik limit dari A. Titik $x = 9$ bukan titik limit dari A, sebab terdapat $\delta > 0$, yaitu $\delta=1$ sedemikian hingga untuk setiap x A kecuali $x = 9$ berlaku $| x - 9 | > \delta$.

Definisi 2.3

Misalkan fungsi f terdefinisikan pada himpunan E dan misalkan titik $x = x_0$ adalah titik limit dari E. Bilangan L disebut limit fungsi f di titik $x = x_0$, dan ditulis $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, bagaimanapun kecilnya terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in E$ dan $0 < |x - x_0| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh :

Pandang $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

Fungsi f(x) tak terdefinisikan di x = 1, sebab $f(1) = \dfrac{0}{0}$ tak tertentu. Untuk $x \neq 1$, maka $f(x) = 2x + 3$. Sehingga untuk x mendekati 1, $x \neq 1$, f(x) akan mendekati 5. Dikatakan bahwa limit fungsi f(x) dititik x = 1 sama dengan 5 dan ditulis :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$$

Fungsi f(x) diatas, untuk $x \neq 1$, $|f(x) - 5| = |2x + 2| = 2|x - 1|$. Jadi untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang dipilih, $|f(x) - 5| < \varepsilon$ jika $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ atau bilangan positif lain yang $< \dfrac{\varepsilon}{2}$, untuk $0 < |x - 1| < \delta$ berlaku $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Yang berarti $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

Definisi 2.4

Misalkan fungsi f terdefinisikan pada himpunan E dari bilangan-bilangan riil, dan x_0 titik limit dari E. Fungsi f dikatakan kontinu di titik $x = x_0$. Jika memenuhi syarat-syarat :

(i) $f(x_0)$ ada atau terdefinisikan.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ada

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Contoh :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$$

Misal $x_0 \neq -2$, maka :

(i) $f(x_0) = \dfrac{x_0^2 - x_0 - 6}{x_0 + 2} = \dfrac{(x_0+2)(x_0-3)}{x_0 + 2} = x_0 - 3$

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x + 2)\ (x - 3)}{x + 2}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} x - 3$

$= x_0 - 3$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Fungsi ini untuk $f(-2)$ tak terdefinisikan. Sehingga $f(x)$ kontinu di setiap $x = x_0$ dengan $x_0 \neq -2$.

2.2. PENGERTIAN DERIVATIF

Misalkan suatu fungsi f dengan persamaan $y = f(x)$ terdefinisika pada suatu interval yang memuat titik $x = x_0$ dan f kontinu di titik tersebut, maka :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Sehingga :

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mempunyai bentuk tertentu $\frac{0}{0}$ dititik $x = x_0$

Jika :

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ada, maka nilai tersebut disebut derivatif fungsi f.

dititik $x = x_0$, dan fungsi f dikatakan terdeferensial dititik $x = x_0$. Derivatif f dititik $x = x_0$ dapat ditulis :

$$f'(x_0) = Y'\Big|_{x = x_0} = \frac{d\,f(x)}{dx}\Big|_{x = x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x = x_0} \quad ...(2.1)$$

Jadi :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$ jika limit diruas kanan ada.

Dengan subtitusi $\Delta x = x - x_0$, maka $x = x_0 + \Delta x$ dan untuk $x \to x_0$ maka $\Delta x \to 0$. Jadi derivatif fungsi f dititik $x = x_0$ dapat pula didefinisikan sebagai :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ bila limit ruas kanan ada.

Contoh :

Carilah derivatif dari $f(x) = x^2 + 3$ di titik $x = 2$

Jawab :

$f(x) = x^2 + 3$

$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 + 3$

$$= 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 3$$

$$f(2) \quad = 2^2 + 3$$

$$= 4 + 3 = 7$$

Jadi :

$$\frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 7}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

Untuk $\Delta x \neq 0$, sehingga :

$$f'(2) = \underset{x \to 0}{\text{Limit}} \frac{f(2 + \ x) - f(2)}{\Delta x} = \underset{x \to 0}{\text{Limit}} (4 + \ x) = 4$$

Definisi 2.5

Jika fungsi f dengan persamaan $Y = f(x)$ terdeferensial pada himpunan E, maka diferensial dari Y, ditulis dengan dy di definisikan sebagai :

$$dy = f'(x)\,\Delta x \quad . \quad x \in E \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

Jika dalam persamaan $Y = f(x)$. $f(x) = x$, maka $dy = dx$. Dari definisi diatas $dy = f'(x)\Delta x = \Delta x$, jadi $\Delta x = dx$ dengan demikian diferensial dari Y dapat dituliskan dengan :

$$dy = f'(x)\,dx \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

Definisi 2.6

Misalkan fungsi $Y = f(x)$ terdiferensial pada himpunan E. Maka $f'(x)$ adalah juga fungsi dari x. Jika fungsi f' terdiferensial di x, maka derivatifnya disebut derivatif tingkat dua (derivatif order dua) atau derivatif kedua dari fungsi f dan ditulis dengan lambang $f''(x)$ atau $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Dengan mengingat persamaan fungsi f. $Y = f(x)$, derivatif tingkat dua dari f ditulis juga dengan tanda y'' atau $\frac{d^2y}{dx^2}$.

jadi :

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

Secara umum derivatif tingkat n dari $Y = f(x)$, n bulat positif akan ditulis dengan lambang :

$$Y^n = f^n(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ dan}$$

$$f^n(x) = \frac{d\, f^{n-1}(x)}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

Contoh :

Tentukan semua tingkat derivatif dari $f(x) = 2x^3 - 3x + 10$.

Jawab :

$f'(x) = 6x^2 - 3$

$f''(x) = 12x$

$f'''(x) = 12$

$f^4(x) = 0$

$f^5(x) = 0$

dan secara umum $f^4(x) = f^5(x) = \ldots = f^n(x) = 0$

2.3. DERET TAYLOR dan MAC. LAURIN

Bila $f(x)$ suatu fungsi, yang dalam suatu interval dapat di diferensiasi hingga n kali. Misal $(a_1\ a + h)$ suatu bagian dari interval tersebut, dan $a < x < a + h$. Kemudian membentuk fungsi $Q(x)$ sebagai berikut :

$$Q(x) = f(a+h) - f(x) - \frac{a+h-x}{1\,!} f'(x) - \frac{(a+h-x)^2}{2\,!} f''(x)$$

$$- \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(x) - [f(a+h) - f(a) -$$

$$- \frac{h}{1!} f'(a) - \frac{h}{2!} f''(a) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$f^{n-1}(a)]\ \left(\frac{a+h-x}{h}\right)^P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

P adalah bilangan sembarang, positif dan bulat. Untuk $x = a$ dari fungsi $Q(x)$ adalah $Q(x) = 0$ dan $x = a + h$ adalah $Q(a + h) = 0$.

Titik x antara a dan a + h, misal $x = a + \theta h$ $(0<\theta<1)$ dan $Q'(a + \theta h) = 0$, jelaslah bahwa :

$$Q'(x) = - \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n}(x) + [f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1!} f'(a)$$

$$- \ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)]\ \frac{P(a+h-x)^{P-1}}{h^P} \ldots\ldots(2.7)$$

Karena $Q'(a+\theta h) = 0$, maka :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots +$$

$$\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + Rn \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

dengan :

$$Rn = \frac{h^n (1 - \theta)^{n-P}}{(n-1)!\,P} f^n (a + \theta h) \ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

disebut suku sisa Schlomilch

Jika P = 1, maka :

$$Rn = \frac{h^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n (a + \theta h) \ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

disebut suku sisa Cauchy

Jika P = n, maka :

$$Rn = \frac{h^n}{n!} f^n (a + \theta h) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.11)$$

disebut suku sisa Lagrange

Jika f(x) dapat didiferensiasi hingga n kali dalam suatu interval yang mengandung titik x = 0, dan a kita misalkan sama dengan nol, sedangkan titik a + h sama dengan x, maka deret Taylor menjadi :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots +$$

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + Rn \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.12)$$

dengan :

$$* \; Rn = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n (\theta x) \text{ suku sisa cauchy} \ldots (2.13)$$

$$* \; Rn = \frac{x^n}{n!} f^n (\theta x) \text{ suku sisa Lagrange} \ldots\ldots\ldots (2.14)$$

Jika $\lim_{n \to n} Rn = 0$ atau

$$\lim_{n \to n} \{f(x) - f(0) - \frac{x}{1!} f'(0) - \frac{x^2}{2!} f''(0) - \ldots$$

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0)\} = 0 \quad \ldots\ldots (2.15)$$

Maka berlaku hubungan :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} + \ldots \quad \ldots\ldots (2.16)$$

disebut deret Mac Laurin.

Contoh :

1. $f(x) = e^x$, uraikan menjadi deret pangkat :

Jawab :

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^n(0) = 1$

Deret dari $f(x) = e^x$ adalah :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Untuk $x = 1$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

$$= 2{,}71828$$

2. Uraikan $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ menjadi deret pangkat !

Jawab :

$f(x) = (x-x)^{-1}$ untuk $x \quad 1$, jadi $f(0) = 1$

$f'(x) = 1 \, . \, (1-x)^{-2} \quad \text{--->} \; f'(0) = 1\,!$

$f''(x) = 1 \, . \, 2\,(1-x)^{-3} \quad \text{--->} \; f'(0) = 2\,!$

$f'''(x) = 1 \, . \, 2 \, . \, 3\,(1-x)^{-4} \text{--->} \; f'''(0) = 3\,!$

$\vdots$

$f^n(x) = 1.2.3. \ldots . n(1-x)^{-n-1} \text{-->} \; f^n(0) = n!$

$$= n!\ (1-x)^{-n-1}$$

Maka :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ Untuk } |x| < 1$$

2.4. PERSAMAAN DIFERENSIAL

Definisi 2.7

Suatu hubungan yang berbentuk :

$$f\left(x, Y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \dots, \frac{d^nY}{dx^n}\right) = 0 \dots\dots\dots\dots (2.17)$$

dimana : x = variabel bebas

y = variabel tak bebas

$\frac{dy}{dx}$ = turunan pertama dari y menurut x

$\frac{d^2Y}{dx^2}$ = turunan kedua dari y menurut x

.

.

.

$\frac{d^ny}{dx^n}$ = turunan ke n dari y menurut x

dinamakan suatu Persamaan Diferensial.

Jika Persamaan Diferensial berbentuk :

$$a_0 \cdot \frac{d^ny}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \dots \quad (2.18)$$

Untuk a_i $(i = 0,1,2,3, \dots, n)$ dan $f(x)$ adalah fungsi-fungsi dari x, dinamakan Persamaan Diferensial Linier yang berjenis (tingkat) n.

Untuk ai $(i = 0,1,2,3, \ldots , n)$ konstan dan $f(x)$ adalah fungsi dari x, dinamakan Persamaan Diferensial Linier berjenis n dengan koefisien konstan.

Jika Persamaan Diferensial berbentuk :

$$a_0 \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \quad (2.19)$$

Untuk ai $(i = 0,1,2,3, \ldots , n)$ adalah fungsi-fungsi dari x dinamakan Persamaan Diferensial Linier berjenis n dan homogen.

Untuk ai $(i = 0,1,2,3, \ldots , n)$ adalah konstan dinamakan Persamaan Diferensial berjenis n dan homogen dengan koefisien konstan.

Contoh :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4 y = x^2$ — PD linier dengan koefisien konstan berjenis 2
2. $x \frac{dy}{dx} - y = x^3 + 1$ — PD linier berjenis satu
3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9 y = 0$ — PD linier homogen berjenis dua dengan koefisien konstan
4. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3 x \frac{dy}{dx} + y = 0$ — PD linier homogen berjenis dua.

Penyelesaian (solusi) suatu Persamaan Diferensial.

Mencari fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi suatu Persamaan diferensial disebut solusi dari Persamaan Diferensial tersebut.

Contoh :

Hitunglah : $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

Jawab : $Y = \int (x^2 + 1)\ dx$

$= 1/3\ x^3 + x + c.$

2.5. TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi laplace adalah suatu metode operasional yang dapta digunakan secara mudah untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier.

Definisi 2.8

Transformasi laplace dari f(t) didefinsikan oleh :

$$[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\ dt \qquad \text{..........(2.20)}$$

dimana :

f(t):fungsi waktu t sedemikian rupa sehingga f(t)=0 untuk t < 0

s :variabel kompleks

$\mathcal{L}$:simbol operasional yang menunjukkan bahwa besaran yang didahuluinya ditranformasikan dengan integral laplace $\int_0^{\infty} e^{-st}\ dt$

F(s):transformasi laplace dari f(t)

Contoh :

1. Transformasi laplace dari f(t) = 0 untuk t < 0

= 1 untuk t > 0

Jawab :

$$[f(t)] = \mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st}\ dt$$

$$= -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

2. Tranformasi laplace dari f(t) = 0 untuk t < 0

= At untuk t > 0

Jawab :

$$\mathcal{L}\,[At] = \int_0^{\infty} At \cdot e^{-st}\,dt$$

Misal : $u = AT \;--->\; du = A\,dt$

$du = e^{-st}\,dt \;--->\; u = -\frac{1}{s}\,e^{-st}$

$$\int_0^{\infty} At\; e^{-st}\,dt \quad = At\left(-\frac{1}{s}\,e^{-st}\right)\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{s}\,e^{-st}\right) A\,dt$$

$$\int_0^{\infty} At\; e^{-st}\,dt = at \cdot \left(-\frac{1}{s}\,e^{-st}\right)\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{s}\,e^{-st}\right) A\,dt$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} \frac{A}{s}\,e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{A}{s}\left(-\frac{1}{s}\,e^{-st}\right)\Big]_0^{\infty}$$

$$= \frac{A}{s}\left(0 + \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{A}{s^2}$$

2.5.1. Transformasi Laplace dari turunan fungsi f(t) :

Teorema 2.1

Transformasi Laplace dari turunan fungsi f(t) diberikan sebagai :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\,f(t)\right] = s\,F(s) - f(0) \qquad (2.21)$$

Bukti :

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\; e^{-st}\,dt$$

Misal : $U = f(t) \longrightarrow du = \frac{d}{dt} f(t)\, dt$

$$du = e^{-st}\, dt \longrightarrow u = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = f(t).\frac{e^{-st}}{-s}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) dt$$

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) dt$$

$$= \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} . \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right]$$

$$\frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = F(s) - \frac{f(0)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s\left(F(s) - \frac{f(0)}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s\, F(s) - f(0)$$

Dengan cara yang sama, untuk turunan kedua dari $f(t)$, transformasi Laplacenya adalah :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0) \ldots (2.22)$$

Bukti :

Misal : $\frac{d}{dt} f(t) = g(t)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt} f(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} g(t)\right] = s\, \mathcal{L}[g(t)] - g(0)$$

$$= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] - f'(0)$$

$$= s\,[\, s\, F(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2\, F(s) - s\, f(0) - f](0) \ldots\ldots\ldots$$

(terbukti)

Untuk turunan ke n adalah :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \ldots - s\, f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.23)$$

2.5.2. Transformasi Laplace Balik :

Notasi transformasi balik $\mathcal{L}^{-1}$, sehingga :

$$\mathcal{L}^{-1}\,[F(s)] = f(t) \qquad (2.24)$$

Untuk mencari transformasi Laplace balik dapat digunakan metode uraian pecacah parsial. Jika F(s) transformasi Laplace dari f(t), diuraikan atas komponen-komponennya :

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_n(s)$$

maka :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \ldots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

$$= f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)$$

Contoh :

Transformasi Laplace balik dari $F(s) = \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)}$

Jawab :

$$F(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$= \frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+3}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s+3}\right]$$

$$= 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

A(s+3) + B(s+2_ = s + 5

$A s + 3A + B s + 2B = s + 5$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 3A + 2B &= 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} 3A + 3B &= 3 \\ 3A + 2B &= 5 \\ \hline B &= -2 \end{aligned} \; -$$

$A + B = 1$

$A - 2 = 1$

$A = 1 + 2$

$A = 3$

2.6. TRANSFORMASI "Z"

Definisi 2.9

Transformasi z dari x(t) didefinisikan :

$$Z[x(t)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\ z^{-k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.25)$$

X(z) hanya tergantung pada harga x(t) pada t = k T (k = 0,1,2,3, ...), maka tranformasi z balik dari X(z) untuk memberikan informasi pada x(t).

Contoh :

1. Carilah transformasi z dari fungsi 1(t)

   Jawab :

$$Z[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k\ T)\ z^{-k}$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{z}{z - 1}$$

2. Carilah transformasi z dari x(t) dimana :

$$x(t) = 0 \text{ untuk } t < 0$$

$$= e^{-at} \text{ untuk } t > 0$$

   Jawab :

$$Z[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} z^{-k}$$

$$= 1 + e^{-aT}\ z^{-1} + e^{-2aT}\ z^{-2} + e^{-3aT}\ z^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

3. Buktikan bahwa : $Z[e^{-at}\ x(t)] = X(ze^{aT})$

   Bukti :

$$Z[e^{-at}\ x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}\ x(kT)\ z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\ (z\ e^{aT})^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\ (z\ e^{aT})^{-k}$$

$$= X(x\ e^{aT})$$

4. Buktikan $Z[a^k x(t)] = X(\frac{z}{a})$

Buktikan :

$$Z[a^k x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\ x(kT)\ z^{-k} = \sum^{\infty} x(kT)\ a^k . z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\ \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

2.6.1. Penyelesaian Persamaan Diferensi Dengan Metoda Transformasi "Z"

Jawab persamaan diferensi dengan metoda transformasi z adalah sangat berguna, seperti halnya jawab persamaan diferensial dengan transformasi Laplace. Pada dasarnya dapat mentransformasikan persamaan diferensi menjadi persamaan aljabar dalam z. Dengan menggunakan notasi yang disederhanakan $x(k)$, untuk menyatakan $x(kT)$.

Theorema 2.2.

Transformasi z dari $x(k+1)$ diberikan oleh :

$$Z[x(k+1)] = z\ X(z) - z\ x(0) \qquad (2.26)$$

Bukti :

$$X(z) = Z[x(k)]$$

$$Z[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k+1}$$

$$= z[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - x(0)]$$

$$= z\ X(z) - z\ x(0) \ldots\ldots \text{(terbukti)}$$

Jika $x(0) = 0$, maka :

$$Z[x(k+1)] = z\ X(z)$$

Jadi jika $x(0) = 0$, maka perkalian tranformasi dari suatu fungsi $x(k)$ dengan z menghasilkan pergeseran waktu maju satu perioda.

Dari persamaan (2.26) dapat dimodifikasikan secara mudah untuk mendapatkan hubungan berikut :

$$Z[x(k+2)] = z\ Z[x(k+1)] - z\ x(1)$$

$$= z\ [z\ x(z) - z\ x(0)] - z\ x(1)$$

$$= z^2\ X(z) - z^2\ x(0) - z\ x(1)$$

Jadi $Z[x(k+2)] = z^2\ X(z) - z^2\ x(0) - z\ x(1)$ ....(2.27)

Dengan cara yang sama :

$Z[x(k+m)] = z^m\ X(z) - z^m\ x(0) - z^{m-1}\ x(1) - z^{m-2}\ x(2) - \ldots - z\ x(m-1)$ ....(2.28)

dimana m adalah bilangan bulat positif.

Contoh 1:

Selesaikan persamaan diferensi berikut dengan metoda transformasi z :

$$x(k+2) + 5\ x(k+1) + 6\ x(k) = 0$$

dengan $x(0) = 0$ dan $x(1) = 1$

Jawab :

Transformasi z kedua ruas persamaan diferensi :

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) + 5\ z\ X(z) - t\ z\ x(0) + 6X(z) = 0$$

$$z^2X(z) - z + 5\ z\ X(z) + 6\ X(z) = 0$$

$$(z^2 + 5z + 6)\ X(z) = z$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 5z + 6}$$

$$= \frac{z}{(z+2)(z+3)}$$

$$= \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3}$$

Dengan mengingat : $Z[a^k] = \dfrac{z}{z-a}$

maka diperoleh : $Z[(-2)^k] = \dfrac{z}{z+2}$

$$Z[(-3)^k] = \frac{z}{z+3}$$

Dengan demikian: $x(k) = (-2)^k - (-3)^k \quad (k = 0,1,2,\ldots)$

Contoh 2 :

Carilah $x(k)$ dari sistem berikut :

$$x(k+2) - 3\ x(k+1) + 2\ x(k) = U(k)$$

dimana : $x(k) = 0$ untuk $k < 0$

$U(0) = 1$

$U(k) = 0$ untuk $k < 0,\ k > 0$

Jawab :

Dengan mensubstitusikan $k = -1$ kedalam persamaan diatas

$$x(k+2) - 3\ x(k+1) + 2\ x(k) = U(k)$$

$$x\ (-1+2) - 3\ x(-1+1) + 2\ x(-1) = U(-1)$$

$$x(1) - 3\ x(0) + 2\ x(-1) = U(-1)$$

$$x(1) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$x(1) = 0$$

Transformasi z dari persamaan :

$$x(k+2) - 3\,x(k+1) + 2\,x(k) = u(k)$$

dengan $x(0) = x(1) = 0$, adalah :

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 3z\,X(z) + 3z\,x(0) + 2X(z) = U(z)$$

$$z^2X(z) - 3z\,X(z) + 2X(z) = U(z)$$

$$(z^2 - 3z + 2)\,X(z) = U(z)$$

Transformasi z dari fungsi penggerak U(k) adalah :

$$U(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)z^{-k} = 1$$

Sehingga diperoleh :

$$(z^2 - 3z + 2)\,X(z) = 1$$

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

$$= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Dengan menggunakan hubungan :

$$Z[x(k+1)] = z\,X(z) - z\,x(0)$$

Karena $x(0) = 0$, maka :

$$Z\,[x(k+1)] = z\,X(z)$$

$$= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

Karena : $Z\,[1^k] = \dfrac{z}{z-1}$ dan $Z\,[2^k] = \dfrac{z}{z-2}$

Sehingga diperoleh :

$$x(k+1) = -(1^k) + 2^k \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$x(k) = -(1^{k-1}) + 2^{k-1} \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

2.6.2. Transformasi "Z" Balik

Jika diberikan X(z), maka untuk mencari transformasi z balik, x(k T) atau x(k) adalah dengan menguraikan X(z) menjadi pecahan-pecahan parsial. Dalam mencari transformasi z balik, kita anggap bahwa deret waktu x (k T) atau x(k) adalah nol untuk k < 0.

Berdasarkan pada uraian pecahan parsial $\frac{X(z)}{z}$ kemudian mengidentifikasikan setiap bentuk dengan tabel transformasi z.

Tinjau X(z) yang diberikan oleh :

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_{m-1} z + bm}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + an} \quad \dots(2.29)$$

dimana m < n

Pertama kita uraikan polinomial penyebut dari X(z) atas faktor-faktornya. Selanjutnya kita uraikan $\frac{X(z)}{z}$ Menjadi pecahan-pecahan parsial sedemikian rupa sehingga setiap suku secara mudah dapat dilihat pada transformasi z. Transformasi z balik dari X(z) diperoleh sebagai jumlah transformasi z balik dari pecahan-pecahan parsial.

Contoh :

Carilah x(k T) jika X(z) diberikan sebagai :

$$X(z) = \frac{5\,z}{z^2 - 3\,z + 2}$$

Jawab :

$$X(z) = \frac{5\,z}{z^2 - 3\,z + 2}$$

$$\frac{X(t)}{z} = \frac{5}{z^2 - 5\,z + 2}$$

$$= \frac{5}{(z - 1)\ (z - 2)}$$

$$= \frac{-5}{z - 1} + \frac{5}{z - 2}$$

$$X(z) = \frac{-5z}{z - 1} + \frac{5z}{z - 1}$$

Dari tabel :

$$Z^{-1}[\frac{z}{z - 1}] = 1$$

$$Z^{-1}[\frac{z}{------}] = 2^k$$

Jadi $x(k\ T) = -5 + 5.2^k$

$= 5(-1+2^k)$

$k = 0,1,2,3...$

atau :

$x(0) = 0$

$x(T) = 5$

$x(2T) = 15$

$x(3T) = 35$

$x(4T) = 75$

⋮

2.7. MATRIKS

Definisi 2.10

Banyaknya kemungkinan untuk membuat permutasi dari n buah benda yang berlainan disebut jumlah permutasi dari n unsur. Dinyatakan dengan Pn.

Misalnya :

$P_1 = 1$

$P_2 = 2$, yaitu : ab, ba

$P_3 = 6$, yaitu : abc, acb, bac, bca, cab, cba

Dalil Permutasi :

Jumlah permutasi dari n unsur yang berlainan adalah $Pn = n! = 1.2.3\ .\ ...\ .\ (n-1).n$ ...(2.30)

Definisi 2.11

* Jika dalam suatu permutasi angka yang besar mendahului angka yang lebih kecil, maka kita katakan permutasi tersebut terdapat inversi.
* Banyaknya inversi yang terdapat dalam sebuah permutasi adalah jumlah inversi dari permutasi tersebut. Ditulis dengan simbul : I (...) = ...

Contoh :

Permutasi dari 3 unsur : 1,2,3 adalah : 1 2 3; 1 3 2 ; 2 1 3; 2 3 1; 3 1 2 dan 3 2 1.

Jadi : $P_3 = 6$ atau $P_3 = 3! = 1.2.3 = 6$

Dari permutasi diatas :

I(1,2,3) = 0 I(2,3,1) = 2

I(1,3,2) = 1 I(3,1,2) = 2

I(2,1,3) = 1 I(3,2,1) = 3

Pandangan matriks bujur sangkar A ukuran n x n berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan dari A, ditulis dengan |A|

Definisi 2.12

Harga determinan dari matriks A adalah :

$$|A| = (-1)^{I(1,2,3,\ldots,n) + I(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)} (a_{1y1}\ a_{2y2} \cdots a_{nyn}) \qquad \ldots\ldots\ldots(2.31)$$

dengan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah angka-angka yang berlainan dari 1 sampai dengan n.

Jadi $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ adalah permutasi dari bilangan 1 sampai dengan n, sehingga terdapat n! urutan $y_1, y_2, \ldots y_n$ yang berbeda.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{maka } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{I(1,2,3) + I(1,2,3)}\ 2.6.9$$

$$(-1)^{I(1,2,3) + I(1,3,2)}\ 2.8.1$$

$$(-1)^{I(1,2,3) + I(2,1,3)}\ 5.3.9$$

$$(-1)^{I(1,2,3) + I(2,3,1)}\ 5.8.4$$

$$(-1)^{I(1,2,3) + I(3,1,2)}\ 7.3.1$$

$$(-1)^{I(1,2,3) + I(3,2,1)}\ 7.6.4$$

$$= 108 - 16 - 135 - 160 + 21 - 168$$

$$= -30$$

Definisi 2.13

Matriks Singuler adalah matriks bujur sangkar yang harga determinannya nol, sedangkan matriks bujur sangkar yang harga determinannya tidak nol disebut matriks non singuler.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks singuler

$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ adalah matriks non-singuler

Definisi 2.14

- Jika baris ke i dan kolom ke j dari matriks A n x n dihilangkan, maka matriks yang dihasilkan adalah matriks (n-1) x(n-1). Determinan dari matriks (n-1) x (n-1) ini disebut minor Mij dari matriks A.
- Kofaktor dari A_{ij} dari elemen a_{ij} matriks A di definisikan oleh persamaan $A_{ij} = (-1)^{z+j} M_{ij}$.

Definisi 2.15

Jika baris dan kolom matriks A_{nxm} ditukar, matriks m x n yang diperoleh disebut transpose matriks A. Transpose matriks A dinyatakan dengan A'.

Misal :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

maka :

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.16

Matriks B dengan elemen pada baris ke i dan kolom ke j sama dengan A_{ji} disebut matriks adjoint dari A dan dinyatakan dengan adj A atau :

$$B = (b_{ij}) = (A_{ji}) = \text{adj } A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.32)$$

Jadi matriks adjoint dari A adalah transpose dari matriks yang elemenya adalah kofaktor dari A atau :

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Contoh :

Diketahui : matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Ditanyakan: matriks adj.A ?

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 10 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.17

Jika untuk suatu matriks bujur sangkar A, terdapat suatu matriks B sedemikian sehingga BA = AB = I, maka B dinyatakan sebagai A^{-1} dan disebut matriks balik dari A. Matriks balik dari A ada jika determinan A tidak berharga nol atau A adalah matriks non singuler.

Sifat-sifat matriks balik :

(i). $A\,A^{-1} = A^{-}\,A = I$

(ii). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii). $A^{-1} = \dfrac{\text{adj } A}{|A|}$

2.7.3. Deferensial dan Integral Matriks

Definisi 2.18

* Turunan matrik A(t) n x m didefinisikan sebagai matriks n x m yang tiap elemennya merupakan turunan dari elemen matriks asal, dengan syarat semua elemen $a_{ij}(t)$ mempunyai turunan terhadap t:

Jadi :

$$\frac{d}{dt}A(t) = [\frac{d}{dt}a_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}d_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.33)$$

* Dengan cara yang sama, integral matriks A(t) n x m di definisikan sebagai :

$$\int A(t)dt = \int a_{ij}(t)dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)\,dt & \cdots & \int a_{2m}(t)dt \\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)\,dt & \cdots & \int a_{2m}(t)dt \\ \vdots & & & \vdots \\ \int a_{n1}(t)dt & \int a_{n2}(t)\,dt & \cdots & \int a_{nm}(t)dt \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.34)$$