BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 PROBABILITAS DAN VARIABEL RANDOM

Definisi 1

Ruang sampel suatu eksperimen adalah himpunan semua hasil eksperimen yang mungkin.

Ruang sampel dinyatakan dengan lambang S.

Definisi 2

Nilai kemungkinan/probabilitas suatu kejadian (event) E yaitu P(E) adalah bilangan real non negatif yang didefinisikan dengan

$P(E) = \frac{m}{n}$; m adalah hasil eksperimen yang berkaitan dengan E
n adalah banyaknya hasil eksperimen yang mungkin

Nilai probabilitas P(E) memenuhi :

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. Untuk kejadian yang tidak mungkin : $P(E)=0$
3. Untuk kejadian pasti : $P(E) = P(S) = 1$

Definisi 3

Variabel random X adalah suatu fungsi berharga real pada setiap hasil eksperimen dalam ruang sampel S.

Contoh 1

Satu uang logam dilambungkan tiga kali berturut-turut. Berapa banyaknya bagian belakang (b) yang timbul ?

Penyelesaian :

Bidang uang logam bagian muka dinotasikan dengan m dan bagian belakang dinotasikan dengan b.

Ruang sampelnya adalah S = {(m,m,m), (m,m,b), (m,b,m), (m,b,b),(b,m,m),(b,m,b), (b,b,m), (b,b,b)}.

Jika X menyatakan banyaknya bagian belakang yang ditentukan dalam S maka X adalah variabel random.

Ruang hasilnya adalah R_x = {0,1,2,3}.

Jadi

X (m,m,m) = 0 X (m,b,b) = 2 X (b,b,m) = 2

X (m,m,b) = 1 X (b,b,m) = 2 X (b,b,b) = 3

X (m,b,m) = 1 X (b,m,b) = 2

Definisi 4

Fungsi distribusi F suatu variabel random X didefinisikan sebagai berikut :

Untuk sembarang bilangan real x,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X \in (-\sim, x)\}$$

Sedangkan $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, sehingga

$$\overline{F}(x) = P\{X > x\}$$

Definisi 5

Variabel random X disebut diskrit jika himpunan semua harga yang mungkin adalah berhingga atau terbilang. Didefinisikan fungsi distribusi F yang diskrit sebagai

$$F(x) = \sum_{y \le x} P\{X = y\}$$

$$= \sum_{y \le x} f(y)$$

dengan $f(x)$ disebut fungsi densitas probabilitas dari variabel random diskrit X, dan memenuhi

1. $f(x) \ge 0$
2. $\sum_{x} f(x) = \sum P\{X = x\} = 1$

Definisi 6

Variabel random X disebut kontinu jika ada suatu fungsi densitas probabilitas sehingga berlaku :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

yang dinamakan fungsi distribusi F kontinu

Definisi 7

Fungsi densitas $f(x)$ adalah derivatif ke satu dari fungsi distribusi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

yaitu

$$f(x) = \frac{d\, F(x)}{dx} = F'(x)$$

Definisi 8

Fungsi $f(x)$ adalah fungsi densitas probabilitas dari variabel random kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. $P\{ a < X < b \} = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Definisi 9

Untuk variabel random kontinu X dengan Δx cukup kecil, didefinisikan

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{ x \leq X \leq x + \Delta x \}}{\Delta x}$$

Definisi 10

Bila X dan Y masing-masing variabel random diskrit maka probabilitas bersyarat dari X dengan diketahui Y = y, didefinisikan dengan

$$P\{X = x \mid Y = y \} = \frac{P\{X = x,\ Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$

untuk $P\{Y = y\} > 0$

2.2 NILAI EKSPEKTASI

Difinisi 11

Nilai ekspektasi atau mean dari suatu fungsi variabel random X adalah :

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\, F(x)$$

atau

$$E[g(X)] = \int_{-\sim}^{\sim} g(x)\, f(x)\, dx \quad , \text{ untuk X kontinu}$$

$$= \sum_{x} g(x)\, P(x) \quad , \text{ untuk X diskrit}$$

Definisi 12

Nilai ekspektasi suatu variabel random diskrit X dapat didefinisikan dengan $E[X] = \sum_{x} x\, P\{X = x\}$

atau

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\sim} P\{X \geq x\} = \sum_{x=0}^{\sim} P\{X > x\}$$

sedangkan nilai ekspektasi variabel random kontinu X,

$$E[X] = \int_{-\sim}^{\sim} x\, f(x)\, dx$$

atau $E[X] = \int_{0}^{\sim} P\{X > x\} dx$

Teorema 1

Bila a dan b konstanta dan X adalah variabel random maka $E[aX + b] = a.\ E[X] + b$

Bukti :

Menurut definisi 11, $E[X] = \int_{-\sim}^{\sim} x\, f(x)\, dx$

maka

$$E[aX + b] = \int_{-\sim}^{\sim} (ax + b)\, f(x)\, dx$$

$$= a\int_{-\sim}^{\sim} x\, f(x)\, dx + b\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\, dx$$

$= a\ E[X] + b$, karena menurut definisi 8, $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\, dx = 1$

Definisi 13

Nilai ekspektasi dari dua variabel random adalah

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$$

Bila X dan Y independen

$$E[XY] = E[X].E[Y]$$

Definisi 14

Ekspektasi dari sejumlah variabel random adalah sama dengan jumlah dari ekspektasinya, yaitu :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Untuk $n \longrightarrow \sim$ dan $X = \sum_{i=1}^{\sim} X_i$, dapat ditulis

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\sim} E[X_i]$$

2.3 FUNGSI NAIK MONOTON DAN TURUN MONOTON

Definisi 15

Fungsi f dalam interval tertutup $[a,b] \subset R$ disebut naik monoton bila untuk setiap $x_1 \le x_2$ maka $f(x_1) \le f(x_2)$ dengan $x_1, x_2 \in [a,b]$

Jika sebaliknya berlaku, yaitu untuk $x_1 \le x_2$ maka $f(x_1) \ge f(x_2)$, disebut fungsi turun monoton.

2.4 SUPREMUM DAN INFEMUM

Definisi 16

M disebut Supremum (batas atas terkecil) dari barisan $\{a_n\}$ bila :

1. M adalah batas atas
2. Tidak ada $M' < M$, dengan M' adalah batas atas.

Supremum sering disingkat Sup.

Definisi 17

M disebut Infemum (batas bawah terbesar) dari barisan $\{a_n\}$ bila

1. M adalah batas bawah
2. Tidak ada $M' > M$, dengan M' adalah batas bawah.

Infemum sering disingkat Inf.

contoh 2

$$\{a_n\} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{5}, \quad \ldots\ldots$$

Supremumnya adalah $\frac{1}{2}$ dan Infemumnya $-\frac{1}{3}$.

2.5 DISTRIBUSI EKSPONENSIAL DAN DISTRIBUSI POISSON

Definisi 18

Fungsi densitas probabilitas suatu variabel random kontinu X yang mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\lambda > 0$ adalah

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \qquad , \quad x \geq 0$$

Dan fungsi distribusinya diberikan dengan

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = 1 - e^{-\lambda x} \qquad , x \geq 0$$

Definisi 19

Fungsi probabilitas dari variabel random diskrit X yang mempunyai distribusi Poisson adalah

$$f(x) = P\{X = x\} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$$

untuk $\lambda > 0$ dan $x = 0, 1, 2, \ldots.$

2.6 PENGERTIAN FUNGSI TINGKAT KEGAGALAN (HAZARD/FAILURE) DARI DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Definisi 20

Pandang variabel random kontinu X yang mempunyai fungsi distribusi F dan densitas f.

Fungsi tingkat kegagalan didefinisikan dengan

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$$

Menurut definisi 4, $\overline{F}(t) = 1 - F(t) = P\{X > t\}$

Untuk menafsirkan $\lambda(t)$, pikirkan X sebagai waktu hidup dari beberapa item dan andaikan bahwa X bertahan selama t jam dan dikehendaki probabilitas bahwa X tak akan bertahan untuk waktu tambahan dt, yaitu $P\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\}$.

$$P\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\} = \frac{P\{X \in (t,t+dt), X>t\}}{P\{X > t\}}$$

$$P\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\} = \frac{P\{X \in (t, t+dt)\}}{P\{X > t\}}$$

Berdasarkan definisi 8,

$P\{t \le X \le t+dt\} \approx f(t)$, untuk dt kecil atau

$P\{X \in (t, t+dt)\} \approx f(t)$ untuk dt kecil.

Dan menurut definisi 4, $\bar{F}(t) = P\{X > t\}$

Sehingga

$$P\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\} \approx \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

$$= \lambda(t)$$

$\lambda(t)$ menunjukkan intensitas probabilitas bahwa item yang umurnya t tahun akan gagal (rusak).

Definisi 21

Fungsi tingkat kegagalan untuk distribusi eksponensial adalah konstan.

Teorema 2

Fungsi tingkat kegagalan $\lambda(t)$ dapat menentukan distribusi F

Bukti :

menurut definisi 20,

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

dan menurut definisi 4 dan definisi 7

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} (1 - \bar{F}(t)) = - \frac{d}{dt} \bar{F}(t)$$

Sehingga

$$\lambda(t) = \frac{- \frac{d}{dt}\bar{F}(t)}{\bar{F}(t)}$$

$$\int_o^t \lambda(t)\, dt = \int - \frac{\frac{d}{dt} \bar{F}(t)}{\bar{F}(t)} \quad dt$$

$$\int_o^t \lambda(t)\, dt = -\int \frac{d\, \bar{F}(t)}{\bar{F}(t)}$$

$$\int_o^t \lambda(t)\, dt = -\ln \bar{F}(t) + k$$

$$\ln \bar{F}(t) = - \int_o^t \lambda(t)\, dt + k$$

$$\bar{F}(t) = c\, e^{\{-\int_o^t \lambda(t)\, dt\}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Misalkan t = 0 dan berdasarkan definisi 18

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

sehingga

$$e^{-\lambda t} = c\, e^{\{-\int_o^t \lambda(t) dt\}}$$

$$1 = c\ 1 \longrightarrow c = 1$$

Dengan demikian persamaan (1) menjadi

$$\bar{F}(t) = \exp\left\{- \int_o^t \lambda(t)\, dt\right\}$$

2.7 PROSES POISSON

Definisi 22

Proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ adalah suatu kumpulan variabel random. Yaitu, untuk setiap t di dalam sembarang himpunan T, X(t) adalah variabel random.

X(t) menyatakan keadaan dari proses pada waktu t. Bila T adalah sumbu real, proses $\{X(t), t \in T\}$ disebut proses stokastik waktu kontinu.

Bila T adalah himpunan berhingga maka disebut proses stokastik waktu diskrit, dan biasanya digunakan parameter n, sehingga ditulis $\{X_n , n = 0,1,2....\}$

Definisi 23

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai proses cacah bila N(t) menunjukkan banyaknya kejadian (event) yang terjadi sampai waktu t

Proses cacah N(t) harus memenuhi

1. $N(t) \geq 0$
2. N(t) bernilai bulat
3. Bila $s<t$ maka $N(s) < N(t)$
4. Untuk $s<t$, $N(t) - N(s)$ sama dengan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval $(s,t]$

Definisi 24

Proses cacah didefinisikan mempunyai kenaikan independen bila banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval waktu yang terputus-putus adalah independen.

Berarti banyaknya kejadian yang terjadi sampai waktu t (yaitu $N(t)$) harus independen terhadap banyaknya kejadian yang terjadi antara waktu t dan $t+s$ (yaitu $N(t+s) - N(t)$).

Definisi 25

Proses cacah didefinisikan mempunyai kenaikan stasioner bila distribusi dari banyaknya kejadian yang terjadi dalam sembarang interval waktu bergantung hanya pada panjang interval waktu. Atau dengan kata lain, proses mempunyai kenaikan stasioner bila banyaknya kejadian dalam interval $(t_1 + s, t_2+s]$ (yaitu $N(t_2+s) - N(t_1+s)$) mempunyai distribusi yang sama seperti pada banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval $(t_1, t_2]$ (yaitu $N(t_2)-N(t_1)$) untuk $t_1 < t_2$ dan $s > 0$.

Definisi 26

Di dalam suatu interval kecil h, probabilitas bahwa tepat satu kejadian terjadi adalah $\lambda h + O(h)$ dan probabilitas bahwa banyaknya kejadian terjadi lebih dari sekali adalah $O(h)$ dalam interval h, sedang simbol $O(h)$ digunakan untuk menyatakan fungsi h yang mendekati 0 lebih cepat dari h sendiri mendekati 0, artinya

$$\frac{O(h)}{h} = 0 \text{ untuk } h \longrightarrow 0$$

Dengan kata lain, untuk interval (t, t+h) dengan h kecil, terdapat

$$P\ \{N(h) = 1\} = \lambda h + O(h)$$

$$P\ \{N(h) \geq 2\} = O(h)$$

Definisi 27

Proses cacah $\{N(t),\ t\geq 0\}$ dikatakan sebagai proses Poisson dengan parameter λ, $\lambda>0$, bila ;

1. $N(0) = 0$
2. Proses mempunyai kenaikan independen dan stasioner
3. $P\ \{N(h) = 1\ \} = \lambda h + O(h)$
4. $P\ \{N(h) \geq 2\ \} = O(h)$

Definisi 28

Proses cacah $\{N(t),\ t\geq 0\}$ dikatakan sebagai proses Poisson non homogen dengan fungsi intensitas $\lambda(t)$, $t\geq 0$ bila ;

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t),\ t\geq 0\}$ mempunyai kenaikan independen
3. $P\ \{N(t+h) - N(t) \geq 2\ \} = O(h)$
4. $P\ \{N(t+h) - N(t) = 1\ \} = \lambda(t).h + O(h)$

2.8 TEORI RENEWAL

Definisi 29

Pandang barisan variabel random independen non negatif $\{X_n,\ n = 1,\ 2,\ ..\}$ dan $S_o = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + ...+ X_n$

Didefinisikan $N(t) = \text{Sup}\{n : S_n \leq t)\}$.

Dan proses $\{N(t), t \geq 0\}$ tersebut dinamakan proses renewal. Pada proses ini, X_n menyatakan waktu antara renewal ke $(n-1)$ dan ke n. S_n menyatakan waktu renewal ke n, sedang $N(t)$ adalah jumlah renewal sampai waktu t

Definisi 30

Misalkan $\{X_n, n = 1, 2, ..\}$ suatu barisan variabel random independen non negatif. Diasumsikan bahwa $P\{X_n = 0\} < 1$ dan variabel Randomnya didistribusikan secara identik dengan fungsi distribusi $F(x)$. Karena X_n adalah non negatif maka mean/nilai ekspektasi dari X_n didefinisikan

$$E[X_n] = \int_0^{\infty} x \, dF(x) = \int_0^{\infty} x \, f(x) \, dx = \mu$$

dengan $0 < \mu \leq \infty$

Definisi 31

Untuk variabel random X_i, $i \geq 1$, independen dan mempunyai distribusi F, dan $S_0 = 0$,

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n$

maka $F_n(x) = P\{S_n \leq x\}$ adalah fungsi distribusi dari S_n dan $F_{n+1}(x) = P\{S_{n+1} \leq x\}$ adalah fungsi distribusi dari S_{n+1}.

Definisi 32

Fungsi renewal m(t) didefinisikan dengan

$$m(t) = E\,[N(t)]$$

Teorema 3

Nilai ekspektasi dari proses renewal adalah

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

Bukti :

Menurut definisi 29, N(t) adalah jumlah renewal yang terjadi sampai t atau dalam interval [0,t].

N(t) dapat ditulis sebagai

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

dengan

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{bila renewal ke n terjadi dalam } [0,t] \\ 0 & \text{jika tidak demikian} \end{cases}$$

maka

$$E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\,[I_n] \text{ (menurut definisi 14) .....(2)}$$

Menurut definisi 11, $E[I_n] = 1.P\{I_n = 1\} + 0.P\{I_n = 0\}$

$$= P\{I_n = 1\}$$

Persamaan (2) menjadi

$$E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n = 1\} \quad ....(3)$$

Menurut definisi 29, S_n menyatakan waktu renewal ke n

Karenanya, $I_n = 1$ bila renewal ke n terjadi dalam

[0,t], dapat dituliskan : $I_n = 1$ bila $S_n \le t$

Sehingga persamaan (3) menjadi

$$E\,[N(t)] = \sum_{n=1}^{\sim} P\{S_n \le t\}$$

Dan menurut definisi 31, $P\{S_n \le t\} = F_n\,(t)$

sehingga

$$E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\sim} F_n(t)$$

Dan karena menurut definisi 32, $m(t) = E[N(t)]$ maka

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\sim} F_n(t)$$

Definisi 33

Pandang $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots$barisan variabel random independen. Suatu variabel random N bernilai bulat dikatakan sebagai waktu pemberhentian (stopping time) untuk barisan $X_1, X_2, \ldots$ bila event $\{N = n\}$ adalah independen dari barisan $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\ldots$, untuk $n = 1,2.\ldots\ldots$

Contoh 3

Pada suatu percobaan pelemparan uang logam secara berturut-turut, dengan hasil lemparan adalah X_n untuk pelemparan ke n, $X_n = 1$ atau $X_n = 0$, tergantung hasil yang diperoleh yaitu bagian muka atau belakang.

X_n, $n = 1, 2, \ldots\ldots$ independen.

$P\{X_n = 0\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}$, $\quad n = 1, 2, \ldots.$

Bila diambil $N = \min\{n : X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n = 10\}$

maka N adalah waktu pemberhentian yaitu berhenti ketika jumlah bagian muka mencapai 10

Teorema 4 (Persamaan Wald)

Bila X_1, X_2,..... adalah variabel-variabel random yang didistribusikan secara independen dan identik yang mempunyai ekspektasi finite, dan bila N adalah waktu pemberhentian untuk X_1, X_2,... dan $E[N] < \sim$, maka

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n \right] = E[N]\, E[X]$$

Bukti :

Diambil

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{bila } N \geq n \\ 0 & \text{bila } N < n \end{cases}$$

sehingga

$$\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\sim} X_n\, I_n$$

$$\text{maka } E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n \right] = E\left[\sum_{n=1}^{\sim} X_n\, I_n \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\sim} E\left[X_n . I_n \right] \quad \text{(menurut definisi 14)}$$

Jika I_n ditentukan oleh $\{N \geq n\}$ yaitu oleh X_1, X_2, ...X_{n-1} dan independen terhadap X_n, maka menurut definisi 13, diperoleh

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\sim} E[X_n]\ E[I_n] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Karena menurut definisi 14, $\sum_{n=1}^{\sim} E[X_n] = E[X]$

maka persamaan (4) menjadi

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E[X] \sum_{n=1}^{\sim} E[I_n]$$

$$= E[X] \sum_{n=1}^{\sim} P\{N \geq n\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Menurut definisi 12, $E[N] = \sum_{n=1}^{\sim} P\{N \geq n\}$

sehingga persamaan (5) menjadi

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E[X]\ E[N]$$

Definisi 34

Pandang suatu proses renewal dengan $Y(t)$ menunjukkan waktu dari t sampai renewal selanjutnya dan $A(t)$ menunjukkan waktu dari t sejak renewal terakhir.

$Y(t)$ disebut kelebihan atau sisa hidup pada t, didefinisikan dengan

$$Y(t) = S_{N(t)+1} - t$$

$A(t)$ disebut umur pada t, didefinisikan dengan

$$A(t) = t - S_{N(t)}$$

Definisi 35

Untuk distribusi antar kedatangan non kisi didefinisikan

$$E\,[Y(t)] = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \text{ untuk } t \rightarrow \sim$$

dengan $\mu_1 = E[X] = \int x \, dF(x)$ dan

$$\mu_2 = E[x^2] = \int x^2 \, dF(x) < \sim$$

Definisi 36

Misalkan $\{X_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\}$ suatu barisan variabel random non negatif dengan waktu antar kedatangan pertama X_1 mempunyai distribuai G dan sub barisan waktu antar kedatangan X_n, $n = 2, 3, \ldots\ldots.$ mempunyai distribusi F.

Diambil $S_0 = 0$ dan $S_n = X_1 + X_2 + \ldots. + X_n$ dan didefinisikan

$$N_D(t) = \text{Sup}\ \{n : S_n \leq t\}$$

maka proses $\{N_D(t),\ t \geq 0\}$ dinamakan proses renewal tundaan.

2.9 RANTAI MARKOV

Definisi 37

Jika proses stokastik $\{X_n,\ n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\}$ mempunyai sifat

$$P\{X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\}$$

$$= P\{\, X_{n+1} = j \mid X_n = i \,\}$$

untuk state i_o, i_1, ... i_{n-1}, i, j dan n $\geq$ 0, maka proses disebut rantai Markov waktu diskrit.

Rantai Markov merupakan proses dengan state yang akan datang tidak bergantung pada state yang lalu dan hanya bergantung pada state sekarang. Ini disebut sifat Markov.

Definisi 38

Dimisalkan $\{X_n, n = 0,1,2, ...\}$ Bila $X_n = i$ maka proses dikatakan dalam state i pada saat n.

Probabilitas bahwa proses dalam state i akan melakukan transisi ke state j dengan transisi satu langkah, ditulis P_{ij}, adalah ;

$$P_{ij} = P\{ X_{n+1} = j \mid X_n = i \}$$

dengan $P_{ij} > 0$, $i,j \geq 0$ dan $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$, $i = 0,1$ ...

Sedang probabilitas transisi n step, ditulis P^n_{ij}, adalah

$$P^n_{ij} = P\{ X_{m+n} = j \mid X_m = i\}$$

$$n \geq 0,\ i,j \geq 0$$

Definisi 39

Distribusi probabilitas $\{P_j,\ j \geq 0\}$ dikatakan stasioner untuk rantai Markov bila

$$P_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i . P_{ij}, \quad j \geq 0$$

Bila distribusi probabalitas dari X_o, yaitu $P_j = P\{X_o = j\}$, $j \geq 0$, adalah distribusi stasioner, maka

$$P\{X_1 = j\} = \sum_{i=o}^{\sim} P\{X_1 = j \mid X_o = i\}\, P\{X_o = i\}$$

$$= \sum_{i=o}^{\sim} P_i\, P_{ij}$$

$$= P_j$$

dan

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=o}^{\sim} P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\}\, P\{x_{n-1} = i\}$$

$$= \sum_{i=o}^{\sim} P_{ij}\, P_i$$

$$= P_j$$

Karenanya bila distribusi probabilitas awal adalah distribusi stasioner maka X_n mempunyai distribusi yang sama untuk setiap n.

Definisi 40

State dikatakan mempunyai periode d bila $P^n_{ii} = 0$ bilamana n tidak dapat dibagi dengan d dan d adalah bilangan bulat positif terbesar dengan sifat ini. State dengan periode 1 dikatakan tidak periodik (aperiodik)

Definisi 41

Pandang suatu rantai Markov

Dibentuk $f_{ij} = P_i\,(T_j < \sim)$

yaitu probabilitas bahwa rantai Markov bermula dari i akan mencapai j pada suatu waktu yang berhingga.

Keadaan khusus

$$f_{ii} = P_i\ (T_i < \sim)$$

yaitu probabilitas bahwa rantai Markov bermula dari i akan kembali ke i lagi.

Suatu state i disebut rekuren (recurrent) bila $f_{ii} = 1$ Dan suatu rantai Markov disebut rantai rekuren bila semua state adalah rekuren.

Definisi 42

Suatu state yang tidak periodik dan merupakan state rekuren disebut state ergodik.

Definisi 43

Suatu rantai Markov irredusibel ialah rantai dengan ruang state yang irredusibel, artinya rantai dengan setiap state menuju state yang lain..

Definisi 44

Proses stokastik $\{ X(t),\ t \geq 0\}$ dikatakan sebagai rantai Markov waktu kontinu bila untuk s, $t \geq 0$ dan bilangan bulat non negatif i, j, $x(u)$, $0 \leq u \leq s$

$$P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i,\ X(u) = x(u),\ 0 \leq u < s\}$$
$$= P\{ X(t+s) = j \mid X(s) = i \}$$

Dan probalitas bahwa sekarang dalam state i, akan berada di state j setelah penambahan waktu t, diberikan dengan $P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$ dengan $\sum_{j\neq i} P_{ij}(t) = 1$

2.10. RASIO LIKELIHOOD

Definisi 45

Diambil variabel-variabel random non negatif X dan Y yang masing-masing mempunyai densitas f dan g. Didefinisikan, X adalah lebih besar daripada Y dalam pengertian rasio likelihood, ditulis

$$X \underset{LR}{\geq} Y$$

bila

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(y)}{g(y)} \quad \text{untuk semua } x \leq y$$

Karenanya $X \geq_{LR} Y$ bila rasio dari masing - masing densitasnya, yaitu $\frac{f(x)}{g(x)}$ tidak turun dalam x

2.11 KETIDAKSAMAAN CAUCHY SCHWARZ

Lemma 1

Untuk sembarang distribusi G dan fungsi h(t),k(t),t≥ 0

$$\left[\int h(t)\ k(t)\ dG(t)\right]^2 \leq \left[\int h^2(t)\ dG(t)\right]\left[\int k^2(t)dG(t)\right]$$

asalkan integral-integralnya ada

Bukti :

Misalkan $A = \left[\int h^2(t)\ dG(t)\right]^{\frac{1}{2}}$

$B = \left[\int k^2(t)\ dG(t)\right]^{\frac{1}{2}}$

Karena integral-integralnya harus ada maka $A \neq 0, B \neq 0$

Dibentuk fungsi $H(t) = \dfrac{h(t)}{A}$ dan $K(t) = \dfrac{k(t)}{B}$, maka

$$\int H^2(t)\ dG(t) = \frac{1}{A^2} \int h^2(t)\ dG(t) = 1$$

$$\int K^2(t)\ dG(t) = \frac{1}{B^2} \int k^2(t)\ dG(t) = 1$$

Karena $\int H^2(t)\ dG(t) = \int K^2(t)\ dG(t) = 1$

maka

$$\int H(t)\ K(t)\ dG(t) \leq 1$$

$$\frac{1}{AB} \int h(t).k(t).dG(t) \leq 1$$

$$\int h(t).k(t).dG(t) \leq AB$$

$$\int h(t).k(t).dG(t) \leq \left[\int h^2(t)\ dG(t)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int k^2(t)\ dG(t)\right]^{\frac{1}{2}}$$

atau

$$\left[\int h(t).k(t).dG(t)\right]^2 \leq \left[\int h^2(t)\ dG(t)\right] \left[\int k^2(t)\ dG(t)\right]$$