BAB II

MATERI DASAR

2.1. HIMPUNAN

DEFINISI 1.

Himpunan adalah kumpulan sesuatu (benda, tumbuhan, hewan, bilangan dan lain-lain) yang mempunyai ciri yang sama sesuai dengan ketentuan yang diharapkan.

Contoh 1.

S adalah himpunan huruf vokal.

Dan ditulis : S = {a,i,u,e,o}.

DEFINISI 2.

Suatu elemen s adalah anggota suatu himpunan S dan ditulis $s \in S$, jika s memenuhi ketentuan yang disyaratkan himpunan S. Jika s buka anggota S ditulis $s \notin S$.

Contoh 2.

a adalah anggota himpunan S pada contoh 1, karena a adalah huruf vokal, sehingga ditulis $a \in S$.

DEFINISI 3.

Suatu himpunan adalah *berhingga* jika banyaknya anggota himpunan tersebut berhingga. Dan suatu himpunan adalah *tidak berhingga*, jika banyaknya anggota himpunan tersebut tidak berhingga.

Contoh 3.

1. M = { hari-hari dalam satu minggu }

   M adalah himpunan berhingga.

2. N = { 2, 4, 6, 8, ... }

   N adalah himpunan tidak berhingga.

DEFINISI 4.

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memuat elemen, atau disebut *himpunan nol.* Ditulis dengan simbol Ø atau { }.

Contoh 4.

$B = \{ x \mid x^2 = 9$, x adalah genap }. Maka B = Ø.

DEFINISI 5.

Jika setiap anggota A juga anggota B, maka A dikatakan *subset* atau *himpunan bagian* dari B, dan ditulis $A \subset B$.

DEFINISI 6.

Misalkan A_1 = { 1, 10 }, A_2 = { 2, 4, 6, 10 }, A_3 = { 3, 6, 9 }, A_4 = { 5, 6, 10 } dan himpunan I = {1, 2, 3, 4 }. Untuk setiap elemen $i \in I$ adalah korespondensi himpunan A_i. Maka I disebut *himpunan indeks* dan himpunan $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ disebut *himpunan berindeks*. Selanjutnya himpunan keluarga berindeks ditulis $\{A_i\}_{i \in I}$ atau $\{A_i\}_{i \in I}$.

DEFINISI 7.

Interseksi dari dua himpunan A dan B, dengan tanda $A \cap B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen yang sekaligus berada dalam A maupun B.

$$A \cap B = df \{ x \mid x \in A \ \& \ x \in B \}.$$

Tanda "=df" dibaca "didefinisikan sebagai".

Apabila $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ sedangkan $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B disebut saling asing.

DEFINISI 8.

Union dari himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan A atau B.

$$A \cup B = df \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

DEFINISI 9.

Selisih dari dua himpunan A dan B, dengan tanda

A − B, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen dalam A, yang tidak berada dalam B.

DEFINISI 10.

Suatu *partisi* dari himpunan A adalah penggolongan terhadap semua anggota dari A ke dalam himpunan-himpunan bagian yang saling asing.

DEFINISI 11.

Suatu *keluarga himpunan-himpunan* adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya juga himpunan-himpunan. Keluarga himpunan ini dinotasikan dengan $\mathcal{F}$.

Contoh 5.

Misalkan A = { 1, 2, 3 }, B = { 2, 5, 7 }, C = { 4, 6, 8 }, maka $\mathcal{F}$ = { A, B, C }.

DEFINISI 12.

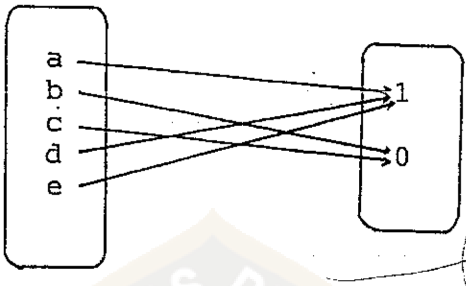
Misalkan A suatu subset dari himpunan S maka fungsi $\chi_A : S \to \{ 1, 0 \}$ didefinisikan sebagai

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \in A \\ 0 \text{ jika } x \notin A \end{cases}$$

disebut *fungsi karakteristik* dari A.

Contoh 6.

Misalkan S = { a, b, c, d, e } dan A = { a, d, e}. Maka fungsi dari S ke dalam { 1, 0 } ditulis dalam diagram :



adalah fungsi karakteristik χ_A dari A.

2.2. VEKTOR DAN MATRIKS

DEFINISI 13.

Vektor adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah. Ditulis $\bar{a}$, $\vec{a}$, $\bar{A}$, $\vec{A}$, **A**, $\underline{A}$, $\overline{AB}$ ataupun $\overrightarrow{AB}$. Panjang dari vektor a ditulis $|a|$.

Gambar 1.

DEFINISI 14.

Dua buah vektor dikatakan sama, jika panjang dan arahnya sama.

DEFINISI 15.

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom). Skalar-skalar itu disebut elemen matriks. Untuk batasnya diberikan tanda :

$$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

Matriks diberi nama dengan huruf besar dan secara lengkap ditulis $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j.

Secara umum, pandang sebuah matriks $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ yang berarti bahwa banyaknya baris = m dan banyaknya kolom = n. Dapat pula ditulis matriks $A_{(mxn)} = (a_{ij})$. Adapun (mxn) disebut ukuran atau ordo dari matriks.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tiap-tiap baris dari A dapat dipandang sebagai sebuah vektor $B_1 = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$, $B_2 = [a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}]$, ..., $B_m = [a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}]$ disebut vektor-vektor baris dari matrik A.

Analog dengan vektor baris maka untuk kolom-kolom dari matriks A dapat dipandang sebagai sebuah vektor yang disebut vektor kolom dari matriks A.

DEFINISI 16.

Misalkan A = (a_{ij}) berukuran (pxq) dan B = (b_{ij}) berukuran (qxr). Perkalian AB adalah suatu matriks C = (c_{ij}) berukuran (pxr) dimana :

$$c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \ldots + a_{iq}\ b_{qj}.$$

Untuk setiap i = 1, 2, ..., p dan j = 1, 2, ... r.

Contoh 7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 + 2.3 + 3.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$$

yaitu sebuah matrik berukuran 1x1.

DEFINISI 17.

Matriks B disebut *matriks transpose* dari matriks A yang berukuran mxn bila ukuran B adalah nxm dan untuk setiap i dan j berlaku $b_{ij} = a_{ji}$ dan ditulis :

$$B = A' \quad \text{(dibaca A transpose).}$$

Contoh 8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ maka } B = A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3. BEBERAPA DEFINISI PADA TEORI GRAPH

2.3.1. Graph bipartite dan matriks insiden

DEFINISI 18.

Suatu himpunan tidak kosong yang berhingga dan terdiri dari vertex-vertex X = X(G) dan edge-edge E = E(G) disebut *Graph*. Dan ditulis G = (X,E).

Untuk menyatakan graph secara geometris maka vertex dinyatakan dengan sebuah titik sedangkan edge dinyatakan dengan sebuah garis yang menghubungkan dua titik.Dan jumlah semua vertex dalam suatu graph disebut order.

DEFINISI 19.

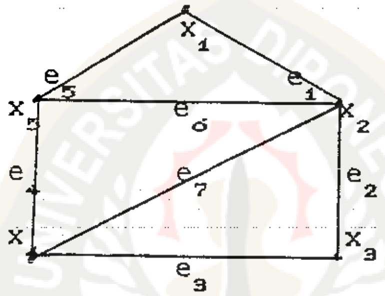
Suatu graph dikatakan sebagai *multigraph* jika tidak memuat loop.

Dan suatu graph dikatakan sebagai *simple graph* jika :

1. Graph tersebut tidak mempunyai loop,
2. Ruas yang menghubungkan dua buah titik, tidak lebih dari satu ruas.

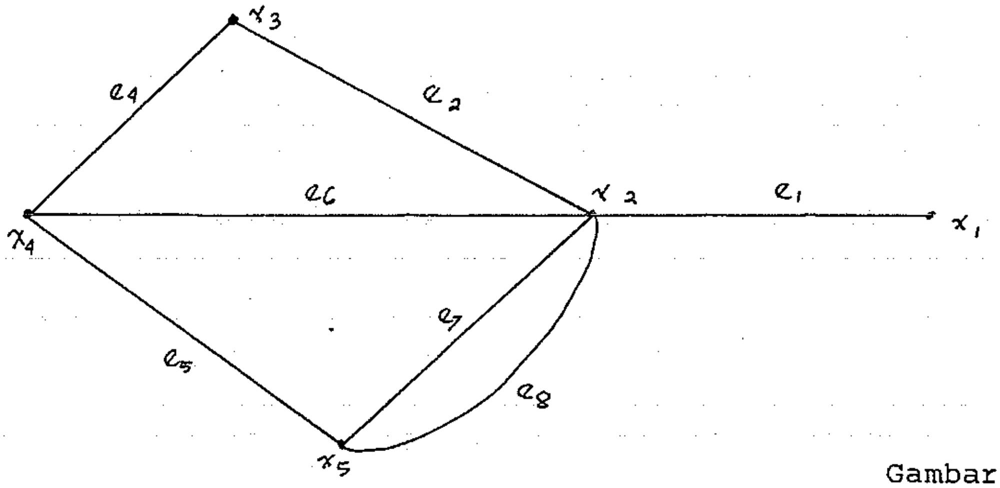
Contoh 9.

X mengandung 5 vertex yaitu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. E mengandung 7 edge yaitu $e_1=\{x_1, x_2\}$, $e_2 = \{x_2, x_3\}$, $e_3 = \{x_3, x_4\}$, $e_4 = \{x_4, x_5\}$, $e_5 = \{x_5, x_1\}$, $e_6 = \{x_2, x_5\}$ dan $e_7 = \{x_2, x_4\}$.



Gambar 2.

Gambar di bawah ini merupakan suatu graph yang lebih umum disebut multigraph karena mengandung edge berganda (paralel) yaitu 2 edge yang mempunyai 2 titik ujung yang sama ($e_7$dan e_8).



Gambar 3

Jadi suatu graph dikatakan sederhana atau graph yang simple jika graph tersebut tidak mengandung edge sejajar ataupun self loop (gambar 2.).

DEFINISI 20.

Bila sebuah vertex x_j adalah vertex ujung dari beberapa edge e_j maka dikatakan x_j *insiden* dengan e_j atau e_j insiden dengan x_j.

DEFINISI 21.

Dua buah titik dikatakan *terhubung* apabila kedua titik tersebut dihubungkan oleh edge.

DEFINISI 22.

Dua buah edge yang tidak paralel dikatakan *adjacent* jika kedua edge tersebut insiden pada sebuah vertex yang sama.

Contoh 10.

Pada gambar 3., edge e_1, e_2, e_6, e_7, dan e_8 insiden dengan vertex x_2. Sedangkan e_4 dan e_5 adalah adjacent. Adapun vertex x_4 dan x_2 adalah terhubung karena dihubungkan oleh edge e_6.

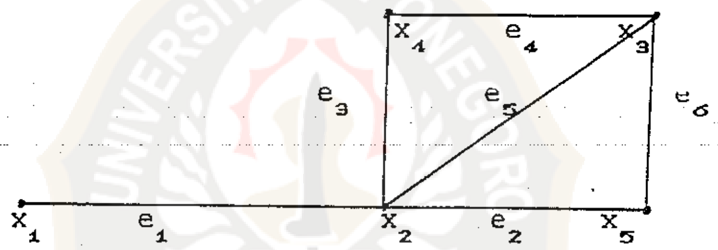
DEFINISI 23.

Walk adalah deretan bergantian vertex dan edge yang dimulai dan diakhiri dengan vertex.

Path adalah suatu barisan edge dan vertex yang berhingga yang tidak boleh diulang.

Contoh 11.

Diberikan graph G(X,E)



Gambar 4.

dengan vertex $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$dan edge $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

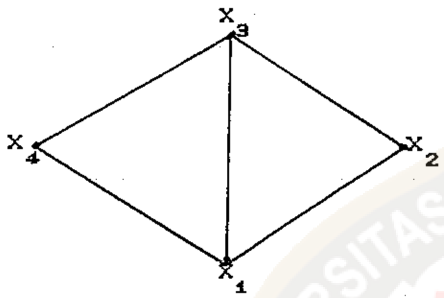
Walk dari graph tersebut adalah x_1, e_1, x_2, e_2, x_5, e_6, x_3, e_5, x_2, e_3, x_4.

Dan path dari graph tersebut adalah x_1, e_1, x_2, e_3, x_4, e_4, x_3, e_6, x_5.

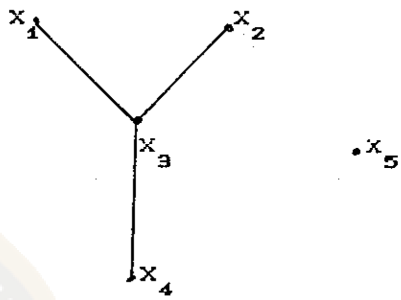
DEFINISI 24.

Suatu graph G(X,E) dikatakan *graph terhubung* jika setiap dua vertex yang berlainan dihubungkan sekurang-kurangnya satu edge. Dan suatu graph G dikatakan *graph tidak terhubung* jika ditemukan suatu vertex yang tidak terhubung dengan suatu vertex yang lain.

Contoh 12.



graph terhubung



graph tidak terhubung

Gambar 5.

DEFINISI 25.

Suatu barisan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ dari vertex yang berbeda dari suatu graph G. Barisan vertex tidak boleh diulang dua kali dan vertex awal sama dengan vertex akhir maka barisan tersebut dikatakan *circuit* atau *cycle*.

DEFINISI 26.

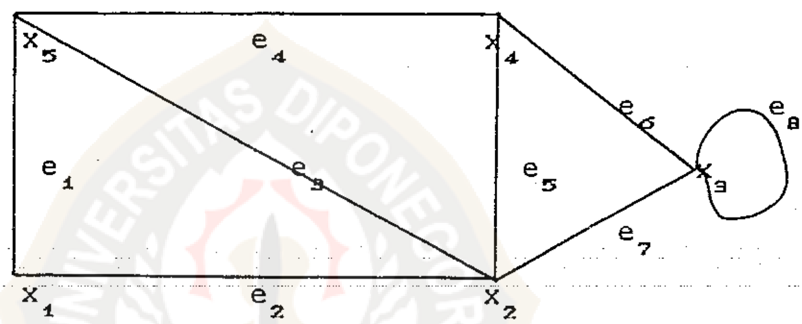
Odd cycle atau *cycle ganjil* adalah suatu cycle dengan jumlah edge ganjil.

DEFINISI 27.

Degree dari vertex x_i graph G dinotasikan di atau **deg** x_i adalah jumlah edge yang insiden dengan x_i. Setiap vertex pada graph G mempunyai degree sedikitnya dua maka G memuat suatu circuit.

Contoh 13.

Diberikan graph G sebagai berikut :



Gambar 6.

dengan X = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

E = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

Maka degree dari x_2 adalah jumlah edge yang insiden dengan x_2 yaitu 4.

DEFINISI 28.

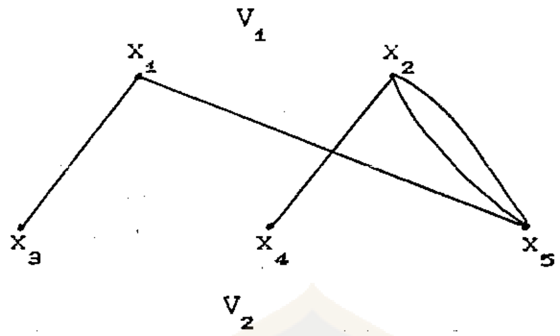
Partisi dari sebuah graph adalah partisi dari subgraph yang mana antar subgraph saling asing.

DEFINISI 29.

Suatu *bipartite graph* G adalah sebuah graph yang himpunan vertexnya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian rupa sehingga setiap edge pada G menghubungkan V_1 dengan V_2.

Contoh 14.

Diberikan suatu graph G



Gambar 7.

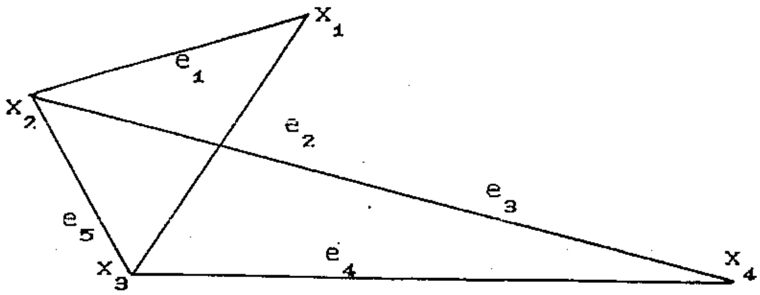
Semua vertex pada gambar 7 dapat dikelompokkan ke dalam $V_1 = \{x_1, x_2\}$ dan $V_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$. Setiap edge pada graph G di atas menghubungkan vertex-vertex pada V_1 dengan vertex-vertex pada V_2. Jadi graph G pada gambar 6 di atas adalah bipartite graph.

DEFINISI 30.

Matriks insiden vertex-edge pada suatu graph G = (X,E) adalah suatu matriks B = b_{ij} dengan n vertex yaitu x_1, x_2, x_3, ..., x_n dan m edge yaitu e_1, e_2, e_3, ..., e_m dan berukuran nxm dengan elemen-elemen :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & \text{jika } x_i \text{ dan } e_j \text{ adalah insiden} \\ 0 \ , & \text{jika } x_i \text{ dan } e_j \text{ tidak insiden.} \end{cases}$$

Contoh 15.



Gambar 8.

Maka matriks insiden vertex-edge adalah :

$$
B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

2.3.2. Pewarnaan dalam graph

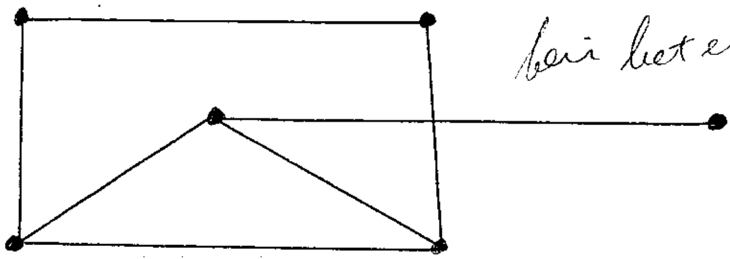
DEFINISI 31.

Pewarnaan titik dari sebuah graph adalah pemberian warna pada titik-titik dalam graph tersebut sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bersisian (adjacent) mendapat warna yang sama.

Contoh 16.

Gambar berikut adalah sebuah graph yang telah diwarnai titik.

beri keterangan



Gambar 9.

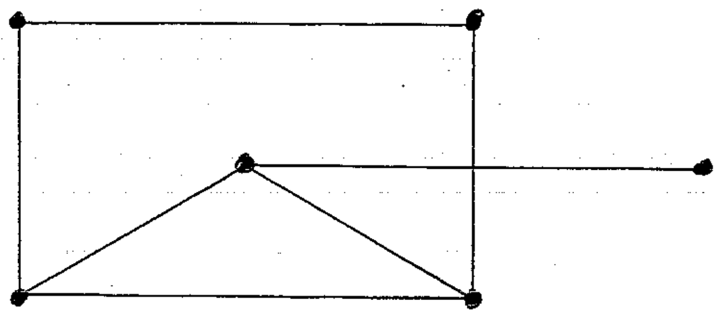
DEFINISI 32.

Jumlah minimum warna yang diperlukan untuk mengadakan pewarnaan titik terhadap suatu graph disebut dengan *bilangan kromatik.*

Apabila G adalah suatu graph, bilangan kromatik dari graph G diberi notasi $\gamma(G)$.

Contoh 17.

Bilangan kromatik pada graph di atas (gambar 9) adalah 3, karena graph tersebut dapat diwarnai titik minimal dengan tiga warna, seperti yang ditunjukkan gambar berikut :



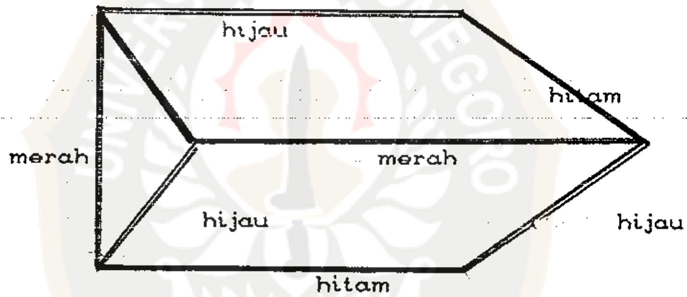
Gambar 10.

DEFINISI 33.

Pewarnaan garis dalam graph adalah penandaan dengan warna pada garis-garis graph tersebut sedemikian sehingga tidak ada garis yang adjacent menerima warna yang sama.

Contoh 18.

Berikut adalah sebuah graph yang telah diwarnai garisnya.



Gambar 11.

DEFINISI 34.

Diberikan suatu simple graph G = (X,ξ). Suatu *matching* didefinisikan sebagai suatu himpunan E_o dari edge-edgenya sedemikian sehingga tidak ada dua edge dari E_o yang adjacent.

Jika E_o adalah suatu matching dan jika $E_1 \subset E_o$ maka E_1 adalah juga matching.

DEFINISI 35.

Suatu vertex x dikatakan *saturated* oleh suatu matching E_o jika suatu edge dari E_o adalah adjacent pada x.

DEFINISI 36.

Misalkan $S(E_o)$ adalah himpunan semua vertex yang saturated. Suatu matching yang memenuhi semua vertex dari G disebut suatu *perfect matching.* Dengan kata lain suatu perfect matching adalah suatu matching yang maksimum.

DEFINISI 37.

Suatu bipartite graph dengan himpunan vertex X dan Y, dan dengan himpunan edge E diberi notasi G = (X,Y,E). Untuk sebarang $A \subset X \cup Y$, himpunan dari vertexnya adjacent pada himpunan A diberi notasi $\Gamma_G(A)$.

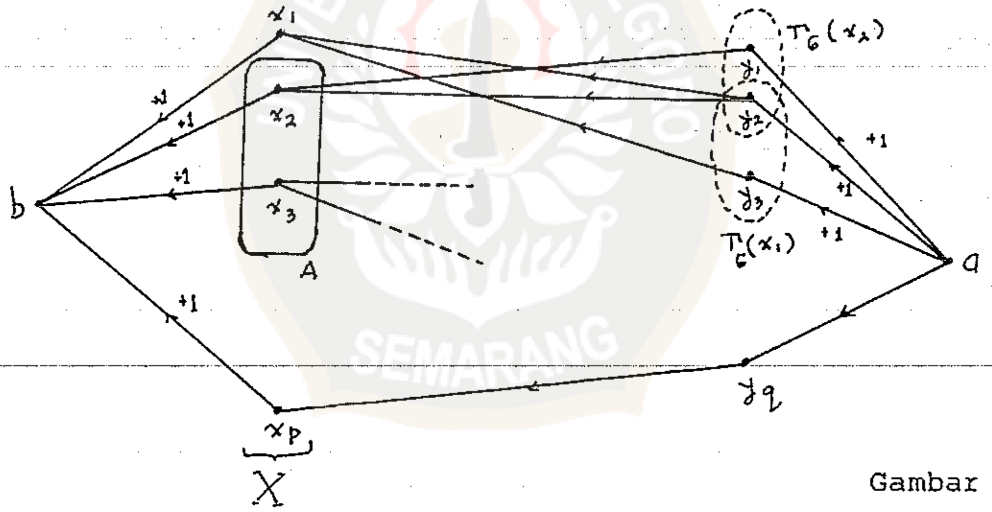
TEOREMA 1. (TEOREMA KÖNIG)

Untuk suatu bipartite graph G = (X,Y,E), jumlah maksimum dari edge di dalam suatu matching sama dengan

$$\min_{A \subset X} (|X - A| + |\Gamma_G(A)|).$$

Bukti :

Perhatikan jaringan transportasi dengan vertex-vertex $X \cup Y$ dan suatu source (awal) a dan suatu sink (akhir) b. Source a dihubungkan dengan setiap $y_j \in Y$ oleh suatu garis berkapasitas $c(a,y_j) = 1$. Sink b dihubungkan dengan setiap $x_i \in X$ oleh suatu garis berkapasitas $c(x_i,b) = 1$ Akhirnya, y_j dihubungkan dengan x_i dengan suatu garis berkapasitas 1 jika $y_i \in \Gamma_G(x_i)$.



Gambar 12.

Untuk suatu himpunan $A \subset X$, jumlah permintaan dari himpunan A yaitu $d(A) = |A|$. Jumlah maksimum dari jaringan transportasi tersebut yang dapat dikirim ke A sama dengan $F(A) = |\Gamma_G(A)|$.

Suatu aliran di dalam jaringan ini adalah suatu matching di dalam graph itu dimana x_i dan y_j adalah dimatchingkan jika suatu unit dari aliran melewati garis (y_j,x_i). Sebaliknya, setiap matching adalah suatu aliran.

Suatu matching maksimum merupakan bilangan kardinalnya, oleh karena itu sama dengan harga dari suatu aliran maksimum antara a dan b.

Sehingga didapat :

$$\max_{E_o} |E_o| = d(X) + \min_{A \subset X} (F(A) - d(A)$$

$$= |X| + \min_{A \subset X} (|\Gamma_G(A)| - |A|)$$

$$= \min_{A \subset X} (|X - A| + \Gamma_G(A)).$$

TEOREMA 2.

Didalam suatu bipartite graph G = (X,Y,E), X dapat dimatchingkan ke dalam Y jika dan hanya jika,

$$|\Gamma_G(A)| \geq |A| \qquad (A \subset X).$$

Bukti :

Dari Teorema König, X dapat dimatchingkan kedalam Y jika dan hanya jika,

$$|X| = \max_{E_o} |E_o| = \min_{A \subset X} (|X - A| + |\Gamma_G(A)|).$$

Hal ini ekivalen dengan

$$\min_{A \subset X} (|\Gamma_G(A)| - |A|) = 0$$

atau

$$|\Gamma_G(A)| - |A| \geq 0$$

$$|\Gamma_G(A)| \geq |A| \qquad (A \subset X).$$

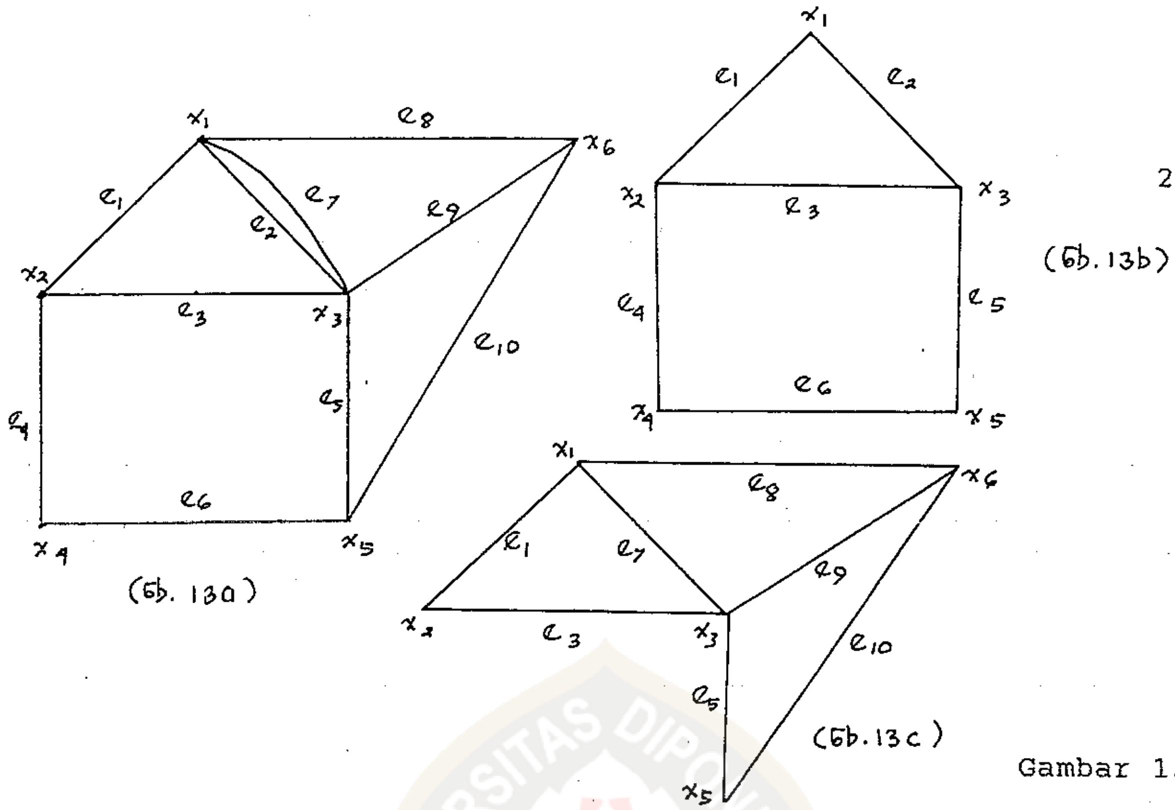
2.3.3. Operasi-operasi pada graph

Pandang 2 graph $G_1 = (X_1,E_2)$dan $G_2 = (X_2,E_2)$. Operasi-operasi terhadap G_1 dan G_2 diberikan di bawah ini.

1. Irisan (interseksi) G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $\cap$.
   $G = G_1 \cap G_2$ didefinisikan sebagai $G = (X,E)$ dimana $X = X_1 \cap X_2$ dan $E = E_1 \cap E_2$.
2. Gabungan (union) G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $\cup$.
   $G = G_1 \cup G_2$ didefinisikan sebagai $G = (X,E)$ dimana $X = X_1 \cup X_2$ dan $E = E_1 \cup E_2$.

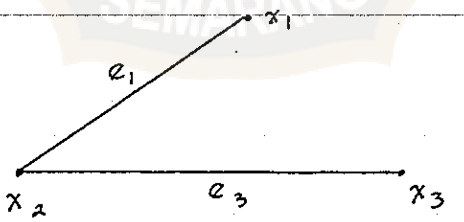
Contoh 19.

Diberikan graph $G = (X,E)$ dengan himpunan vertex $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ dan himpunan edge $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$ (gambar 13a).
Terdapat subgraph $G_1 = (X_1,E_1)$ dari G yang mempunyai himpunan vertex $X_1 = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ dan himpunan edge $E_1 = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ (gambar 13b) dan subgraph $G_2 = (X_2,E_2)$ dari G yang mempunyai himpunan vertex $X_2 = \{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6\}$ dan himpunan edge $E_2 = \{e_1,e_3,e_5,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$ (gambar 13c).



Gambar 13

1. $G_1 \cap G_2$ menghasilkan suatu graph G_3 dengan himpunan vertex $X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \cap \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} = X_3$ dan himpunan edge $E_1 \cap E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \cap \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} = \{e_1, e_3, e_5\} = E_3$. Graph $G_3 = (X_3, E_3)$ ditunjukkan oleh gambar berikut



Gambar 14.

2. $G_1 \cup G_2$ menghasilkan suatu graph dengan himpunan vertex $X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \cup \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan himpunan edge $E_1 \cup E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \cup \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Jadi $G_1 \cup G_2 = G$.

2.4. Pengertian Hypergraph dan Matriks Insiden pada Hypergraph

DEFINISI 38.

Misalkan $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ merupakan himpunan berhingga dari vertex-vertex dan misalkan $\xi = (E_i | i \in I)$ merupakan suatu keluarga subset dari X. Keluarga ξ disebut sebagai suatu *hypergraph* pada X jika

1. $E_i \neq \emptyset$, $(i \in I)$
2. $\bigcup_{i \in I} E_i = X$.

Kopel $H = (X, \xi)$ disebut suatu hypergraph. $|X| = n$ dinyatakan sebagai order/derajat dari hypergraph ini. Sedangkan elemen-elemen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dinyatakan sebagai vertex-vertex dan himpunan $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$ dinyatakan sebagai edge-edge.

Contoh 20.

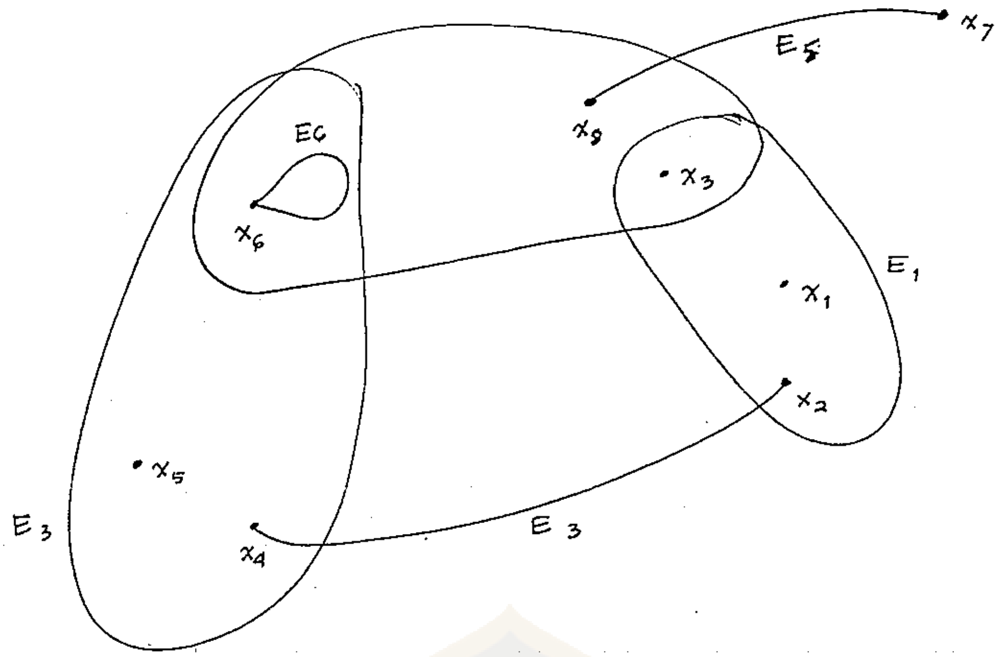
Misalkan hypergraph dari keluarga ξ pada $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ adalah :

$E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ $E_4 = \{x_3, x_6, x_8\}$

$E_2 = \{x_2, x_4\}$ $E_5 = \{x_7, x_8\}$

$E_3 = \{x_4. x_5. x_6\}$ $E_6 = \{x_6\}$

yang digambarkan pada gambar berikut



Gambar 15.

Edge E_i dengan $|E_i| = 2$ tergambar sebagai kurva yang menghubungkan dua vertex. Sedangkan edge E_i dengan $|E_i| = 1$ tergambar sebagai loop seperti dalam graph.

Dalam suatu hypergraph, dua vertex dikatakan adjacent jika terdapat sebuah edge E_i yang berisi kedua vertex tersebut. Dan dua edge dikatakan adjacent jika irisannya tidak kosong.

DEFINISI 39.

Untuk hypergraph $H = (X;E_1, E_2, E_3, \dots, E_m)$ terdapat kesamaan hypergraph $H^* = (E;X_1, X_2, X_3, \dots X_n)$ yang vertex-vertexnya adalah titik-titik e_1, e_2, e_3, ..., e_m(secara berturut-turut mewakili E_1, E_2, E_3, ..., E_m) dan edge-edgenya adalah himpunan-himpunan X_1, X_2, X_3..., X_n (mewakili x_1, x_2, x_3, ..., x_n) sehingga untuk semua j berlaku :

$$X_j = \{e_i | i \leq m,\ E_i \ni x_j\}.$$

Jadi $X_j \neq \emptyset$ dan $\bigcup_j X_j = E$ dan H^* adalah suatu hypergraph. Hypergraph H^* disebut dengan *dual* dari hypergraph H.

DEFINISI 40.

Dalam hypergraph H, rank r(S) dari himpunan yang tidak kosong $S \subset X$ didefinisikan sebagai bilangan bulat positif dan dinotasikan :

$$r(S) = \max_i |S \cap E_i|$$

Bilangan r(X) disebut rank dari hypergraph H.
Jika $E_i = r(X)$ untuk masing-masing i maka H disebut suatu hypergraph seragam dari rank r(X).

DEFINISI 41.

Diberikan suatu hypergraph $H = (X, \xi)$, suatu himpunan $S \subset X$ didefinisikan sebagai *stabil* jika S tidak memuat edge E_i dengan $|E_i| > 1$. Bilangan stabilitas dari H didefinisikan sebagai bilangan kardinal yang maksimum dari suatu himpunan stabil dari H.

DEFINISI 42.

Bilangan kromatik $\chi(H)$ didefinisikan sebagai bilangan terkecil dari warna-warna yang diperlukan untuk mewarnai vertex-vertex dari H sedemikian sehingga tidak ada edge E_i dari H dengan $|E_i| > 1$ yang semua vertexnya dengan warna yang sama.

DEFINISI 43.

Suatu *pewarnaan-q* didefinisikan sebagai suatu partisi dari X ke dalam q himpunan stabil S_1, S_2, S_3, ..., S_q , masing-masing memberikan satu warna.
Suatu hypergraph dimana terdapat suatu pewarnaan-q disebut sebagai q-colourable.

DEFINISI 44.

Misalkan $H = (X,\xi)$ suatu hypergraph dengan fungsi rank r(S). Suatu himpunan S didefinisikan sebagai *stabil yang kuat* jika r(S) = 1, yaitu jika

$$|S \cap E_i| \leq 1 \quad \text{untuk} \quad i = 1,2,3,\ldots,m.$$

Setiap himpunan stabil yang kuat adalah juga suatu himpunan stabil.

DEFINISI 45.

Bilangan stabil kuat $\alpha(H)$ dari hypergraph H didefinisikan sebagai jumlah maksimum dari vertex-vertex dalam himpunan stabil yang kuat.

DEFINISI 46.

Pewarnaan-q yang kuat dari hypergraph H

didefinisikan sebagai suatu pewarnaan-q dari vertex-vertex H sedemikian hingga tidak ada dua vertex yang termuat dalam edge yang sama memiliki warna yang sama.

DEFINISI 47.

Bilangan kromatik kuat $\gamma(H)$ dari H didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil q yang mana ada suatu pewarnaan yang kuat.

DEFINISI 48.

Hypergraph parsial dari $H = (X,\xi)$ dibangun oleh suatu keluarga $\mathcal{F} \subset \xi$ didefinisikan sebagai hypergraph $(X_{\mathcal{F}},\mathcal{F})$ dimana $X_{\mathcal{F}} = \bigcup_{E_i \in \mathcal{F}} E_i$.

DEFINISI 49.

Subhypergraph dari $H = (X,\xi)$ dibangun oleh himpunan $A \subset X$ didefinisikan sebagai hypergraph $H_A = (A,\xi_A)$ dimana $\xi_A = \{ E_i \cap A | E_i \in \xi \ ; \ E_i \cap A \neq \emptyset \}$.

DEFINISI 50.

Suatu hypergraph H dikatakan *seimbang* jika setiap cycle ganjil $(a_1,E_1,a_2,E_2,,\ldots,E_{2p+1},a_1)$

mempunyai suatu edge E_i yang memuat sedikitnya tiga vertex a_j dari cycle.

TEOREMA 3.

Suatu hypergraph $H = (X,\xi)$ adalah seimbang jika dan hanya jika untuk setiap $S \subset X$, subhypergraph H_S adalah bicolourable.

Bukti :

Akan dibuktikan jika suatu hypergraph $H = (X,\xi)$ adalah seimbang maka untuk setiap $S \subset X$, subhypergraph H_S adalah bicolourable.

Jika setiap subhypergraph dari H adalah bicolourable maka H adalah seimbang, karena jika tidak, terdapat suatu cycle ganjil $(a_1,E_1,a_2,\ldots,E_p,a_1)$ dengan tidak ada E_i yang memuat tiga dari a_j, dan $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ menghasilkan suatu subhypergraph H_S dengan $\chi(H_S) > 2$, dimana dalam hal ini terjadi kontradiksi.

Akan dibuktikan bahwa jika untuk setiap $S \subset X$, subhypergraph H_S adalah bicolourable maka suatu hypergraph $H = (X,\xi)$ adalah seimbang.

Jika H adalah hypergraph seimbang yang bukan bicolourable, dengan order minimum $n = |X|$. Akan kita tunjukkan bahwa hal tersebut akan menghasilkan kontradiksi.

1. Kita akan menunjukkan bahwa masing-masing vertex x_o anggota pada sedikitnya dua edge yang berbeda dari H dengan tepat dua elemen.

Subhypergraph H_o yang dihasilkan oleh X - $\{x_o\}$ adalah seimbang dan mempunyai order n-1. Oleh karena itu H_o memiliki suatu bicolouring (S_1^o, S_2^o). Jika x_o tidak anggota dalam edge dengan tepat dua elemen maka $(S_1^o \cup \{x_o\}, S_2^o)$ akan berupa suatu bicolouring dari H, dimana hal ini kontradiksi dengan definisi H.
Jika x_o anggota pada hanya satu edge dengan dua elemen dan apabila titik-titik akhir yang lainnya terletak didalam S_1^o maka $(S_1^o, S_2^o \cup \{x_o\})$ akan menjadi suatu bicolouring dari H. Makanya x_o anggota dari sekurang-kurangnya dua edge dengan dua elemen, sebut $[x_o, y]$ dan $[x_o, z]$ dengan $z \neq y$.

2. Dinotasikan $\mathcal{G}$ sebagai keluarga dari edge-edge dengan tepat dua elemen. Perhatikan graph $G = (X, \mathcal{G})$. Karena G adalah seimbang maka G juga bipartite.

Perhatikan suatu komponen connected c dari G_o. Karena G mempunyai order ≥ 3 maka terdapat sedikitnya satu vertex x_1 didalam c yang bukan suatu titik artikulasi.

3. Perhatikan subhypergraph H_1 yang dihasilkan oleh X-$\{x_1\}$. H_1 adalah seimbang dan mempunyai order n-1. Oleh karena itu H_1 menerima suatu bicolouring (S_1, S_2)

dan semua vertex adjacent pada x_1 dalam G yang mempunyai warna yang sama. Misalkan S_1 adalah himpunan vertex dengan warna ini. Maka $(S_1, S_2 \cup \{x_1\})$ adalah suatu bicolouring dari H karena setiap edge dari H dengan dua elemen adalah bicoloured (karena merupakan edge dari G) dan setiap edge dari H dengan lebih dari dua elemen adalah juga bicoloured (karena merupakan interseksi dengan $X-\{x_1\}$ adalah bicoloured).

Hal di atas merupakan kontradiksi dari asumsi bahwa H tidak mempunyai bicolouring.

DEFINISI 51.

Transversal dari suatu hypergraph $H = (X, E_1, E_2, \ldots E_m)$ adalah suatu himpunan $T \subset X$ sedemikian sehingga

$$T \cap E_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

TEOREMA 4.

Untuk suatu hypergraph seimbang $H = (E_i | i \in I)$, misalkan $k = \min_{i \in I} |E_i|$. Terdapat k transversal dari H merupakan partisi himpunan vertex X.

Bukti :

Misalkan $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ adalah suatu partisi dari X ke dalam k kelas, dan misalkan k(i) adalah jumlah kelas yang berimpit dengan edge E_i. Jika k(i) = k untuk setiap i maka X adalah terbagi ke dalam k transversal.

Jika k(i) < k untuk suatu indeks $i = i_o$ maka $k(i_o) < |E_{i_o}|$; sehingga terdapat indeks p dan q sedemikian sehingga $|S_p \cap E_{i_o}| \geq 2$ dan $|S_q \cap E_{i_o}| = 0$. Subhypergraph H' yang dihasilkan oleh $S_p \cup S_q$ adalah seimbang. Sehingga menurut teorema 2, H' mempunyai suatu bicolouring (S'_p, S'_q).

Misalkan $S'_j = S_j$ untuk $j \neq p,q$. Partisi $(S'_1, S'_2, \ldots, S'_k)$ menghasilkan koefisien baru k'i) dengan $k'(i_o) = k(i_o) + 1$

$k'(i) \geq k(i) \qquad (i \neq i_o)$.

Dengan pengulangan transformasi ini sebanyak mungkin sampai memenuhi kebutuhan, didapatkan suatu partisi baru $(S'_1, S'_2, \ldots, S'_k)$ dengan k'(i) = k untuk semua i. Inilah partisi dari X yang diinginkan.

DEFINISI 52.

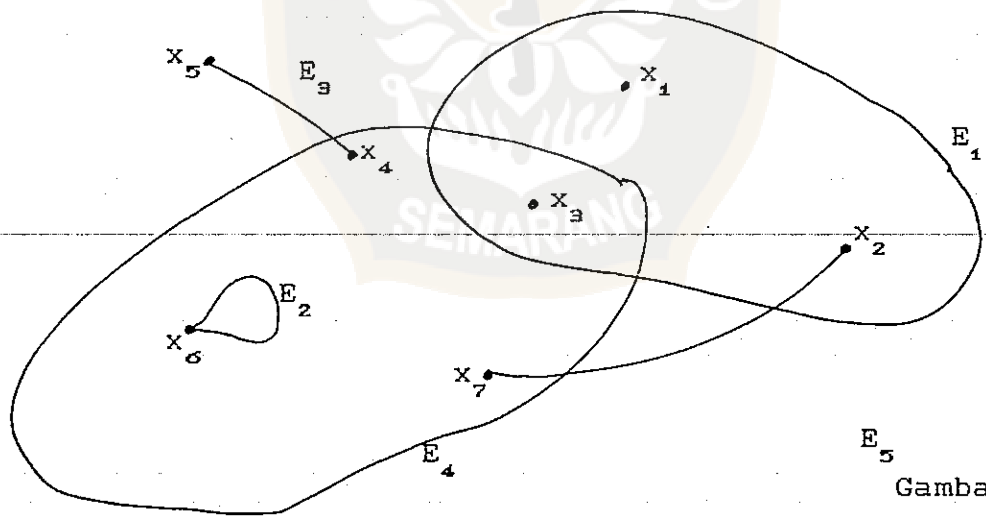
Jika p dan q adalah dua bilangan bulat maka notasi $\left[\frac{p}{q}\right]$ maksudnya adalah bagian bilangan bulat dari $\frac{p}{q}$. Dan notasi $\left[\frac{p}{q}\right]^*$ maksudnya adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan $\frac{p}{q}$.

DEFINISI 53.

Matriks insiden dari hypergraph H = (X,ξ) adalah matriks ((a_{ij})) dengan i = 1,2,3,...,m menyatakan baris yang menggambarkan edge-edge dan j = 1,2,3,...,n menyatakan kolom yang menggambarkan vertex-vertex, sedemikian sehingga :

- a_{ij} = 1 jika $x_j \in E_i$ atau x_j dan E_i adalah insiden
- a_{ij} = 0 jika $x_j \notin E_i$ atau x_j dan E_i adalah tidak insiden.

Contoh 22.



Gambar 16.

Jadi matriks insidennya adalah :

$$A = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks yang timbul dari hypergraph H^* merupakan transpose dari matriks insiden $((a_{ij}))$ dari hypergraph H sehingga didapat $(H^*)^* = H$.

Jika dua vertex x_i dan x_j pada hypergraph H adalah adjacent maka edge yang sama yaitu X_i dan X_j pada H^* adalah adjacent pula.

Jika dua edge E_i dan E_j pada hypergraph H adalah adjacent maka vertex e_i dan e_j pada hypergraph H^* adalah juga adjacent.