BAB III

MATRIKS BOOLEAN PADA GRAPH

3.1.MATRIKS BOOLEAN

Definisi 3.1.1.

Matriks Boolean adalah suatu matriks yang elemen – elemennya 0 dan 1 dengan operasi penjumlahan dan pergandaan mengikuti aturan pada aljabar Boole.

Aturan penjumlahan dan pergandaan pada Aljabar Boole.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Contoh matriks Boolean :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.1.2.

Jika diberikan matriks Boolean $M = [\, m_{ij} \,]_{mxn}$ maka komplemennya dinyatakan dengan $\overline{M} = [\, \overline{m_{ij}} \,]_{mxn}$ dengan elemen $\overline{m_{ij}}$, $i = 1,\ldots\ldots.m$

$j = 1,\ldots\ldots.n$

sedemikian sehingga : jika $m_{ij} = 1$ maka $\overline{m_{ij}} = 0$

$m_{ij} = 0$ maka $\overline{m_{ij}} = 1$

Contoh :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.1.3.

Transpose dari M adalah matriks M^T yang terbentuk dengan mengubah masing-masing elemen baris menjadi elemen-elemen kolom.

$$M = [\, m_{ij} \,] \Longrightarrow M^T = [\, m_{ji} \,] \qquad i = 1, 2, \ldots k$$
$$j = 1, 2, \ldots k$$

Contoh :

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M^T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Definisi.3.1.4.

Jika diberikan dua matriks Boolean $A = [a_{ij}]_{mxn}$ dan matriks $B = [b_{ij}]_{mxn}$ maka $A \leq B$ jika dan hanya jika $a_{ij} \leq b_{ij}\ \forall\ i,j.$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I \leq A$$

Definisi.3.1.5.

Jika diberikan A , B , C masing-masing merupakan matriks Boolean dengan m baris dan n kolom maka :

1. $A \leq A$
2. Jika $A \leq B$ dan $B \leq A$ maka $A = B$
3. Jika $A < B$ dan $B < C$ maka $A < C$

3.2.MATRIKS BOOLEAN PADA GRAPH

Dari suatu graph G = (X,E), graph berarah maupun tidak berarah dapat dibentuk matriks Boolean. Matriks Boolean ini biasanya berupa matriks adjacent.

Namun, bukan hanya matriks adjacent yang merupakan matriks Boolean yang dapat dibentuk dari suatu graph, melainkan dapat pula dibentuk dari matriks yang lain.

3.2.1.MATRIKS ADJACENT PADA GRAPH BERARAH

Dari suatu graph berarah dapat dibuat matriks adjacentnya.

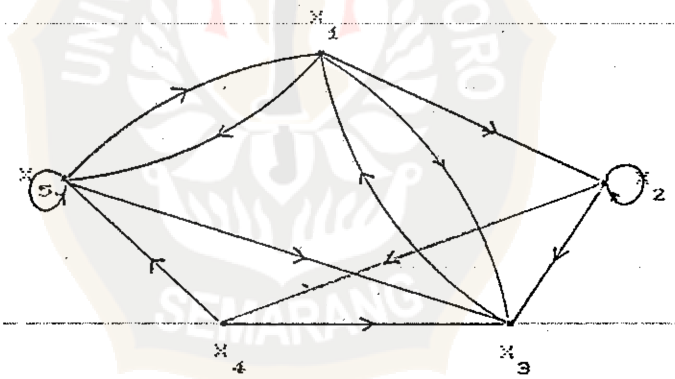
Definisi.3.2.1.

Jika diberikan graph $G = (X , E)$ suatu graph berarah yang tidak memiliki garis paralel dengan titik-titik $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ maka matriks adjacentnya adalah $M = [m_{ij}]$ dengan $i,j = 1,2,\ldots.n$ sedemikian sehingga :

$m_{ij} = 1$ jika terdapat garis berarah daari x_i ke x_j.

$m_{ij} = 0$ jika tidak terdapat garis berarah dari x_i ke x_j.

Contoh :



gb.1

Dari gb.1 dapat dibentuk matriks adjacent dari graph tersebut, dengan melihat adanya garis-garis berarah yang menghubungkan setiap titik-titiknya secara langsung.

Jika $E(x_i)$ menyatakn sutu himpunan titik-titik yang dihubungkn dengan garis yaang bert i tik awal di x_i maka untuk gb.1 diatas dapat disederhanakan menjadi :

$E(x_1) = \{ x_2, x_3, x_5 \}$

$E(x_2) = \{ x_2, x_3, x_4 \}$

$E(x_3) = \{ x_1 \}$

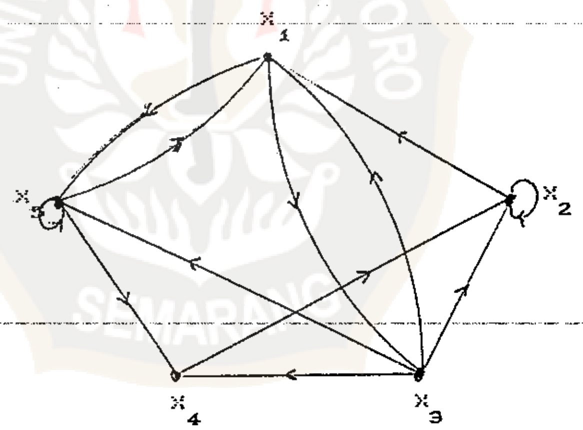
$E(x_4) = \{ x_3, x_5 \}$

$E(x_5) = \{ x_1, x_3, x_5 \}$

sehingga matriks adjacent dari gb. 1 adalah :

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Untuk lebih jelas mengenai matriks adjacent dari graph G ini kita dapat amati gb. 2.



gb.2.

gb. 2 dapat kita sederhanakan menjadi :

$E(x_1) = \{ x_3, x_5 \}$

$E(x_2) = \{ x_1, x_2 \}$

$E(x_3) = \{ x_1, x_2, x_4, x_5 \}$

$E(x_4) = \{ x_2 \}$

$E(x_5) = \{ x_1, x_4, x_5 \}$

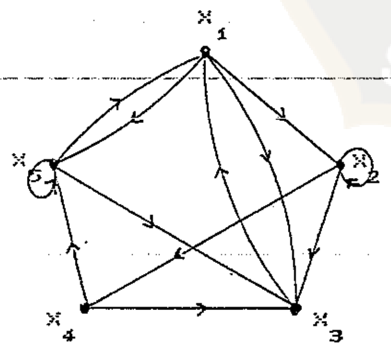
Sehingga matriks adjacent dari graph G tersebut adalah :

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

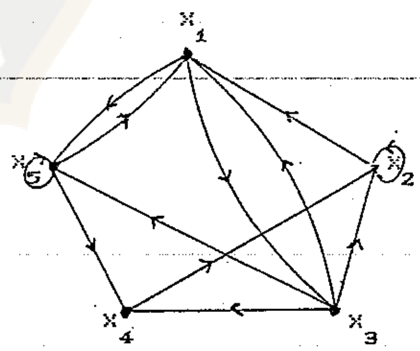
Dari keterangan diatas dapat dimengerti bahwa dua buah graph yang sama titik-titiknya juga garis-garisnya namun berbeda arahnya akan menghasilkan matriks adjacent yang berbeda.

Secara graphis, transpose dari matriks M (d i tulis M^T) merupakan graph G' dengan vertex-vertexnya $x \in X$ dan edge-edgenya berlawanan dengan edge-edge pada G.

Hal ini bisa kita lihat pada gb. 3(i),(ii) berikut :

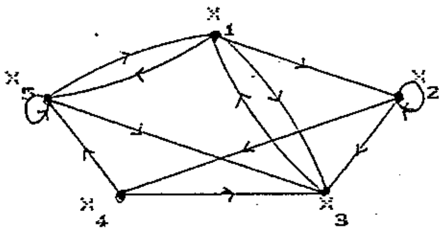


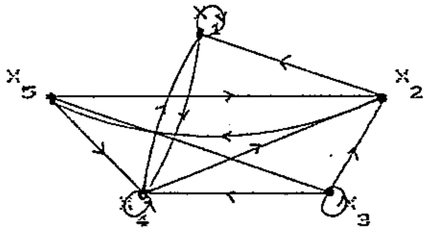
GB. 3.(i) G



GB. 3.(ii). G'

Secara graphis, kom p lemen matriks M (ditulis = $\overline{M}$) merupakan graph $\overline{G}$ dengan vertex-vertexnya $x \in X$, sedang edge-edgenya dapat kita lihat dari gb. 4 berikut :





gb.4.

Dari gb.4 diatas dapat dimengerti bahwa titik-titik yang mempunyai loop , komplemennya tidak mempunyai loop. Sedang titik-titik yang tidak mempunyai loop komplemennya mempunyai loop.

3.2.2.MATRIKS ADJACENT PADA GRAPH TAK BERARAH

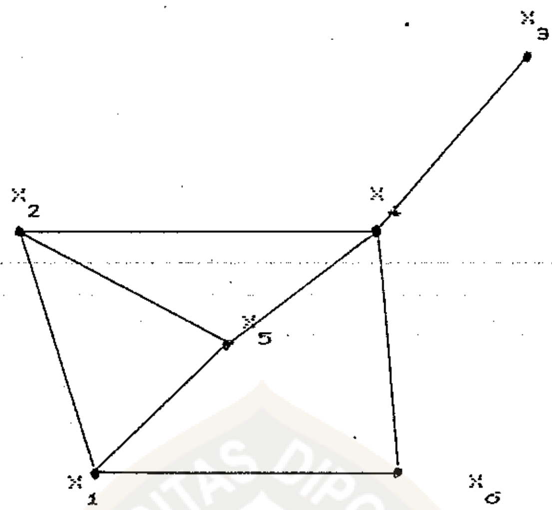
Definisi.3.2.2.

Jika diberikan graph G =(X,E) suatu graph tidak berarah yang tidak memiliki garis paralel maka matriks adjacent dari graph tersebut adalah matriks $M_A = [\, m_{ij} \,]$ dengan $i,j = 1,2,\ldots\ldots\ldots n$

$m_{ij} = 1$ jika terdapat garis yang menghubungkan titik x_i dan x_j.

$m_{ij} = 0$ jika tidak terdapat garis yang menghubungkan titik x_i dan x_j.

Pandang graph G_3 seperti gb.5



gb.5

Matriks adjacent yang terbentuk dari graph tersebut adalah :

$$
M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}
$$

Ternyata dari graph yang tidak berarah akan menghasilkan matriks adjacent yang simetris. Sehingga transpose dari matriks tersebut akan menghasilkan matriks yang sama ditulis : $M = M^T$

3.2.2.MATRIKS ADJACENT UNITER

Definisi.3.2.3.

Jika diberikan graph G = (X, E) dengan matriks adjacent $M_A = [\ m_{ij}\ ]$ maka matriks yang terbentuk dengan mengubah seluruh elemen diagonal dengan bilangan 1 disebut *matriks adjacent uniter.*

ditulis : $M'_A = [\ m'_{ij}\ ]$

dengan $[\ m'_{ij}\ ] = m_{ij}$ untuk $i \neq j$

$= 1$ untuk $i = j$

Sehingga $M'_A = M_A + I$

Contoh :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.4.MATRIKS DISTANCE PADA GRAPH

Khusus untuk suatu graph terhubung yang tidak berarah, dapat dibuat matriks distancenya.

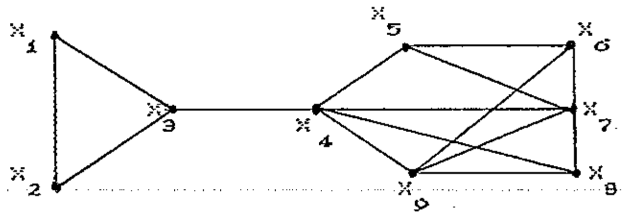
Definisi.3.2.4.

Matriks Distance dari suatu graph terhubung G = (X,E) dengan titik-titik x_1 , x_2 ,........ x_n adalah $M_D = [\ m_{ij}\ ]_{n \times n}$ dengan :

m_{ij} = distance/jarak antara titik x_i ke x_j.

Dari definisi diatas didapat bahwa untuk $i = j$ maka $m_{ij} = 0$.

Contoh :



gb.6

Matriks distance dari graph seperti pada gb.6 tersebut adalah :

$$
\begin{array}{c}
\\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Dari matriks distance tersebut dapat dibentuk matriks Boolean dengan aturan tertentu,sesuai dengan kebutuhan. Misalnya akan ditentukan titik-titik mana saja yang memiliki distance/jarak > 2.

Maka dicari matriks Boolean $M = [\, m_{ij} \,]$ dengan :

m_{ij} = 1 jika distance/jarak antara x_i dan x_j > 2.

m_{ij} = 0 jika distance/jarak antara x_i dan x_j ≤ 2

ditulis : $[\, m_{ij}] = 1$ jika $d(x_i, x_j) > 2$

$= 0$ jika $d(x_i, x_j) \le 2$

Sehingga didapat matriks :

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\
\hline
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_9 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

3.3 OPERASI MATRIKS BOOLEAN PADA GRAPH

Definisi 3.3.1.

Jika diberikan dua matriks Boolean $A = [\ a_{ij}\ ]_{mxn}$ dan $B = [\ b_{ij}]_{mxn}$ maka *Jumlah* dari dua matriks tersebut adalah matriks $C = [\ c_{ij}\ ]_{mxn}$ dengan elemen -elemen c_{ij}, $i = 1,2,.........m$

$j = 1,2\ ,........n$

sedemikian sehingga : $c_{ij} = 0$ jika $a_{ij} = 0$ dan $b_{ij} = 0$

$c_{ij} = 1$ kondisi yang lain.

Sehingga jika $a_{ij} = 0$ dan $b_{ij} = 0$ maka $c_{ij} = 0$

$a_{ij} = 0$ dan $b_{ij} = 1$ maka $c_{ij} = 1$

$a_{ij} = 1$ dan $b_{ij} = 0$ maka $c_{ij} = 1$

$a_{ij} = 1$ dan $b_{ij} = 1$ maka $c_{ij} = 1$

Ditulis : $C = A + B$

$$[\ c_{ij}\ ] = [\ a_{ij}\ ] + [\ b_{ij}\ ] = [\ a_{ij} + b_{ij}\ ]$$

Jika diberikan graph A dan graph B, maka dari kedua graph tersebut dapat dibuat matriks Boolean. Kedua matriks Boolean tersebut dapat dijumlahkan dengan aturan penjumlahan mengikuti aturan pada penjumlahan dua matriks Boolean.

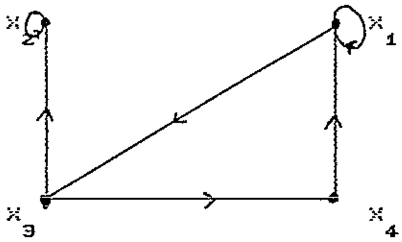
Jika diberikan dua buah graph seperti pada gb.7(i) dan gb.7(ii) maka dapat dibentuk matriks Boolean dari graph tersebut dengan menyusun matriks adjacentnya. Penjumlahan dari dua matriks Boolean tersebut adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

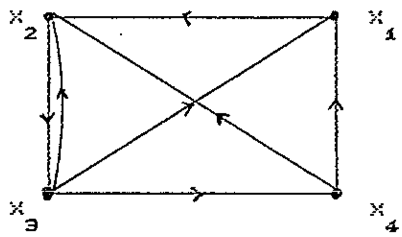
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

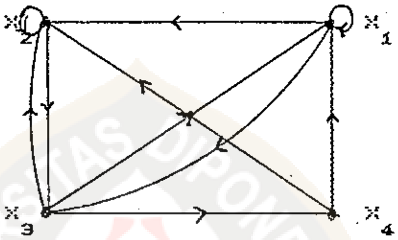
Dari hasil diatas kita gambarkan sebagai berikut :



gb. 7(i)



gb. 7(ii)



gb. 8

gb. 8 merupakan hasil penjumlahan dari gb. 7(i) dan gb. 7(ii).

Definisi 3.3.2.

Jika diberikan dua matriks Boolean $A = [\, a_{ij} \,]_{mxn}$ dan $B=[\, b_{ij} \,]_{nxp}$ maka *product* / *pergandaan* dari matriks tersebut adalah matriks $D = [\, d_{ij} \,]_{mxp}$ dengan elemen- elemen d_{ij} $\quad i = 1,\dots\dots m$

$\quad j = 1,\dots\dots p$

Sedemikian sehingga : $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; b_{kj}$

dengan $d_{ij} = 1$ jika terdapat $a_{ik} = 1$ dan $b_{kj} = 1$

$= 0$ jika lainnya.

ditulis : $D = A \times B$

$[\, d_{ij} \,] = [\, a_{ij} \,] \times [\, b_{ij} \,]$

$$[\ d_{ij}\ ] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika diberikan dua graph A dan graph B, sedemikian sehingga dari dua graph tersebut dapat dibuat matriks Boolean $A = [a_{ij}]_{mxn}$ dan $B = [b_{ij}]_{nxp}$ maka dua matriks tersebut dapat digandakan sesuai aturan pergandaan pada contoh berikut :

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ x \\ x \\ x \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

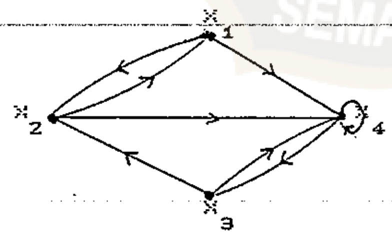
$$M_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari. kedua matriks tersebut dapat dicari hasil pergandaannya sebagai berikut:

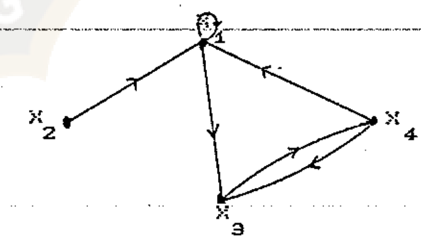
$$M_1 \times M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \times M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

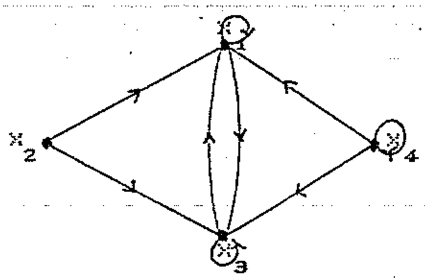
Secara graphis M_1, M_2, dan $M_1 \times M_2$ dapat digambarkan seperti pada : gb .9 (i), (ii), (iii).

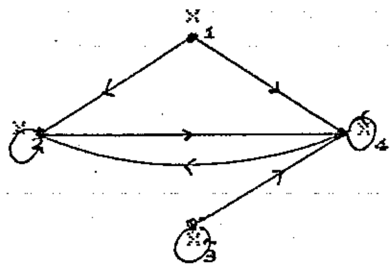


(i)



(ii)





gb.9 (iii) (iv)

Sedang gambar 9. (iv) menunjukkan hasil kali dari M_2 dan M_1, yang secara aljabar dapat kita lihat sebagai berikut :

$$M_2 \text{ X } M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ X } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 \text{ X } M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.3.3.

Pangkat dari matriks Boolean $M = [\ m_{ij}]$ dinyatakan:

$$M^0 = I$$

$$M^p = M^{p-1} \times M \qquad (\ p = 1,2.....)$$

Ditulis : $M^p = [\ m^p_{ij}\ ]$ $\qquad$ (p = 1,2....)

$$m^p_{ij} = \sum_{i_1 .. i_{p-1}}^{n} m_{i i_1} m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \ldots m_{i_{p-1} j}$$

Jadi : $M^2 = M \times M$

$M^3 = M^2 \times M$

dan seterusnya

3.3.SIFAT-SIFAT MATRIKS BOOLEAN

Jika A , B , C masing-masing merupakan matriks

Boolean order n maka :

1. (A x B) x C = A x (B x C)

2. A x (B + C) = (A x B) + (A x C)

3. (A + B) x C = (A x C) + (B x C)

4. A ≤ B maka A X C ≤ B X C

Bukti 1 :

Misalkan A x B = D

B x C = Q

(A x B) x C = R

maka jika (A x B) x C = R = $[r_{ik}]$

$$[r_{ik}] = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, c_{jk}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ip} \times b_{pj})\, c_{jk}$$

$$= (a_{i1}\, b_{11} + a_{i2}\, b_{21} + \ldots\ldots + a_{in}\, b_{n1})\, c_{1k} +$$

$$(a_{i1}\, b_{12} + a_{i2} \cdot b_{22} + \ldots\ldots + a_{in}\, b_{n2})\, c_{2k} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (a_{i1}\, b_{1n} + a_{i2}\, b_{2n} + \quad + a_{in}\, b_{nn})\, c_{nk}$$

$$= a_{i1}(b_{11}\, c_{1k} + b_{12}\, c_{2k} + \ldots + b_{1n}\, c_{nk})$$

$$+ a_{i2}(b_{21}\, c_{1k} + b_{22} \cdot c_{2k} + \ldots\ldots\ldots + b_{2n} c_{nk})$$

$$+ a_{in}(b_{n1}\, c_{1k} + b_{n2}\, c_{2k} + \ldots\ldots\ldots + b_{nn}\, c_{nk})$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is} q_{sj}$$

$$= A \times (B \times C)$$

Bukti 2 :

$A = [a_{ij}]$ $\qquad$ $B = [b_{ij}]$ $\qquad$ $C = [c_{ij}]$

B + C = D dengan $D = [d_{kj}] = [b_{kj} + c_{kj}]$

Maka :

$$A \times (B + C) = \sum a_{ik}\, d_{kj}$$

$$= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ a_{in}(b_{nj} + c_{nj}).$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots\ldots +$$

$$a_{in}b_{nj} + a_{in}c_{nj}$$

$$= [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}b_{nj}] +$$

$$[a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}c_{nj}]$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, b_{pj} + \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, c_{pj}$$

$$= (A \times B) + (A \times C)$$

Pandang matriks adjacent uniter, yaitu matriks Boolean dengan $a_{ii} = 1$

1. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A_1^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^2 = A$

2. $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A_2^2 = A_2 \times A_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^3 = A_2^2 \times A_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = A_3 \times A_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^3 = A_3^2 \times A_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_3^4 = A_3^3 \times A_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_3^4 = A_3^3$

Secara umum untuk matriks Boolean order n dengan $a_{ii} = 1$ ada theorema yang dinyatakan sebagai berikut :

Theorema 1.

Jika $A = [\ a_{ij}\ ]$ suatu matriks Boolean bujursangkar ordo n dengan $a_{ii} = 1$ ($i = 1,2,\ldots\ldots n$) maka :

$$I \leq A \leq A^2 \leq \ldots\ldots\ldots \leq A^{n-1} = A^n = A^{n+1} \ldots\ldots$$

Bukti :

Relasi $a_{ii} = 1$ menunjukkkan bahwa $I \leq A$.

Karena itu dari sifat (4) maka :

$$I \leq A \leq A^2 \leq \ldots\ldots\ldots \leq A^{n-1} \leq A^n \leq A^{n+1} \leq \ldots\ldots (1)$$

Jadi cukup membuktikan bahwa :

$$A^n \leq A^{n-1}$$

Pandang $A^n = a_{ij}{}^n = \sum\limits_{i_1 \ldots i_{p-1}}^{n} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \quad a_{i_{p-1} j}$

Terdapatlah $h < k$ sedemikian sehingga $i_h = i_k$

dengan $a_{i_h i_h} = a_{i_h i_k} = a_{i_k i_k} = 1$,sehingga relasi :

$a_{i i_1} \ldots a_{i_{k-1} i_k} \ldots a_{i_k i_{k+1}} \ldots\ldots a_{i_{h-1} i_h} a_{i_h i_{h+1}} \ldots a_{i_{n-1} j} \leq$

$a_{ii_1} \ldots a_{i_{k-1}i_k} a_{i_h i_{h+1}} \ldots\ldots a_{i_{n-1}j}$

Ruas kiri merupakan ekspansi dari a^n_{ij} sedang ruas kanan merupakan ekspansi dari a^{n-1}_{ij}.

Akibatnya : $a^n_{ij} \leq a^{n-1}_{ij}$.

Karena hal ini benar untuk $i, j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$

maka : $A^{n-1} \leq A^n$ ....(2)

Dari (1) dan (2) didapat $A^n = A^{n-1}$

Theorema 2.

Jika $[m'_{ij}]^p$ merupakan elemen dari $[M'_A]^p$ dengan $i \neq j$ maka $[m'_{ij}]^p = 1$ jika dan hanya jika terdapat path dengan panjang paling banyak sama dengan p dari i ke j.

Bukti :

1. Pandang $[m_{ij}] = \sum m_{ii_1} m_{i_1 i_2} \quad m_{i_{p-1}j} = 1$.

   Jika dan hanya jika terdapat $i_1, i_2, \ldots\ldots\ldots i_{p-1}$ berbeda , sedemikian sehingga $m_{ii_1} = m_{i_1 i_2} = \ldots\ldots =$ .... $m_{i_{p-1}j} = 1$,dengan setiap dua i_k , i_{k+1} yang berbeda, maka terdapatlah suatu path dengan panjang p.

   Jika tidak demikian maka panjang path < p.

2. Jika terdapat path dengan panjang p maka terdapatlah $\sum m_{ii_1} m_{i_1 i_2} \ldots\ldots m_{i_{p-1}j} = 1$ dengan setiap dua i_k, i_{k+1} yang berturutan berbeda.

   Tapi jika terdapat path dengan panjang < p , maka terdapatlah : $\sum m'_{i\,i_1} m'_{i_1 i_2} \cdots\cdots m'_{i_{k-1} j} = 1.$

Sehingga $[\, m'_{ij} \,]^k = 1$ denga $k < p$.

Atau $\sum m'_{i\,i_1} m'_{i_1 i_2} \cdots\cdots m'_{i_{p-1} j} = 1$ dengan

$(p-k)$ $m'_{i_h i_{h+1}}$ yang berturutan sama.

Sehingga : $[\, m'_{ij} \,]^p = 1.$