BAB II
PENGERTIAN DASAR TENTANG GRAPH

2.1. GRAPH

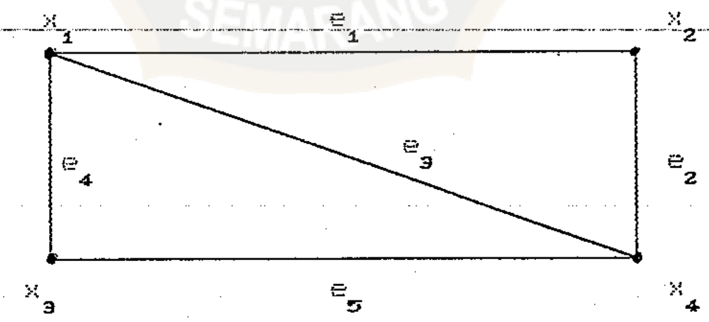
Definisi 2.1.1.

Suatu himpunan tidak kosong berhingga dan terdiri dari vertex-vertex X = X(G) dan edge-edge E = E(G) disebut Graph dan ditulis G = (X,E).

Secara geometris graph dinyatakan dengan titik dan garis, titik menyatakan vertex sedang garis menyatakan edge.

Sebagai contoh dapat dilihat graph G pada gb.1 dengan:

- 4 vertex yaitu x_1 , x_2 , x_3 , x_4
- 5 edge yaitu e_1, e_2 ,e_3 ,e_4 ,e_5



gb. 1

Pada gb.1 e_1 menghubungkan x_1 dan x_2
e_2 menghubungkan x_2 dan x_4
e_3 menghubungkan x_1 dan x_4
e_4 menghubungkan x_1 dan x_3
e_5 menghubungkan x_3 dan x_4

Menurut jenis garisnya graph dibedakan menjadi 2, yakni :

1. Graph tak berarah.
2. Graph berarah.

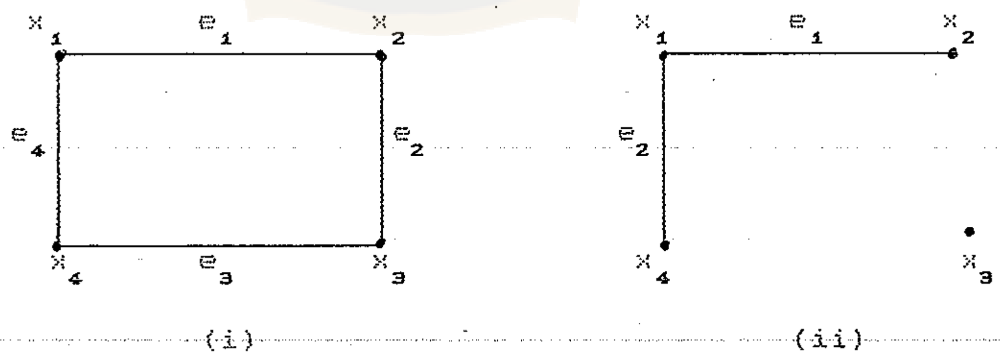
2.1.1.GRAPH TAK BERARAH

Graph tak berarah merupakan graph dengan garis-garis yang menghubungkan titik-titiknya merupakan garis-garis yang tidak berarah. Gambar 1 merupakan contoh dari graph tak berarah.

Definisi 2.1.2.

Suatu graph disebut *terhubung* (*connected*) jika setiap dua titik paling sedikit dihubungkan oleh satu garis. Sebaliknya disebut *tidak terhubung*.

Contoh:



gb.2

Gambar.2.(i) merupakan contoh graph terhubung.

Gambar 2.(ii) merupakan contoh graph tak terhubung.

Definisi 2.1.3.

Jika sebuah titik x_i adalah titik akhir dari suatu garis e_j maka x_i dan e_j disebut *insident* satu dengan yang lainnya.

Pandang gambar 2.(i)

garis e_1 dan e_2 insident dengan titik x_2

garis e_2 dan e_3 insident dengan titik x_3

garis e_3 dan e_4 insident dengan titik x_4

garis e_4 dan e_1 insident dengan titik x_1

Definisi 2.1.4.

Lintasan (path) adalah barisan garis-garis (e_1 , e_2 ,......e_j sedemikian sehingga titik akhir dan titik awal dari dua garis yang berurutan sama.

Selain dinyatakan dengan barisan garis-garis, Path dapat pula dinyatakan dengan barisan titik-titik.

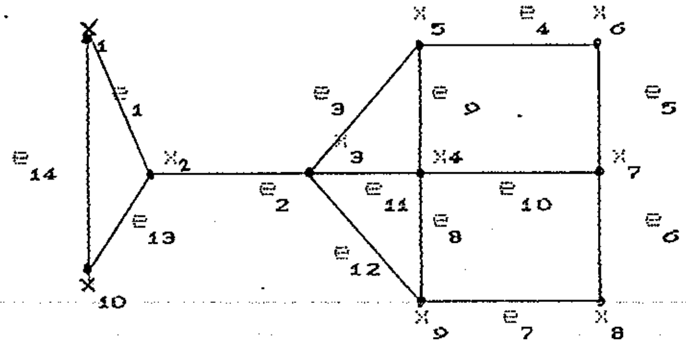
Definisi 2.1.5.

Suatu path (e_1, e_2 ,........, e_n)dengan e_1, e_2 ,......e_n masing-masing merupakan garis yang berlainan disebut *path sederhana* (*simple path*).

Definisi 2.1.6.

Suatu path (e_1, e_2,........e_n) dengan titik-titik yang dilalui semuanya berlainan disebut *path elementer*.

Contoh :



gb.3

(i) $e_1, e_2, e_3, e_9, e_{11}, e_2, e_{13}$ path

(ii) $e_{12}, e_3, e_9, e_{11}, e_2$ path sederhana

(iii) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 path elementer

Definisi.2.1.7

Panjang Lintasan (Length of path) adalah banyaknya garis pada suatu lintasan.

Pada gb.3 (i) panjang path = 7

(ii) panjang path = 5

(iii) panjang path = 5

Definisi 2.1.8.

Banyaknya garis pada lintasan terpendek (shortest path) disebut *jarak (distance)*.

Jarak dari titik x_i dan titik x_j dinyatakan dengan : $d(x_i, x_j)$.

Pada gb.3 diatas : $d(x_1,x_6) = 4$

$d(x_2,x_7) = 3$

Definisi 2.1.9.

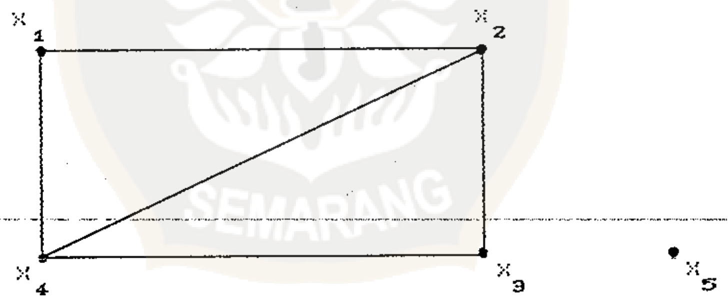
Titik terasing adalah titik yang tidak insident dengan suatu garis.

Pandang gambar 2 (ii). Titik x_3 merupakan titik terasing. Suatu graph yang memiliki titik terasing merupakan graph tak terhubung.

Definisi 2.1.10

Banyaknya garis yang insident dengan suatu titik disebut *derajad (degree).*

ditulis : $deg(x_i)$



gb. 4

Pada gambar 4:

x_1 berderajad 2 ditulis : $deg(x_1) = 2$

x_2 berderajad 3 $deg(x_2) = 3$

x_3 berderajad 2 $deg(x_3) = 2$

x_4 berderajad 3 $deg(x_4) = 3$

x_5 berderajad 0 $deg(x_5) = 0$

x_5 merupakan titik terasing. titik terasing berderajad nol.

Definisi 2.1.11.

Suatu graph yang masing-masing titiknya berderajad nol disebut *graph nol.*

Pada graph nol tidak terdapat garis. Hanya terdiri dari titik-titik saja. Seperti pada gambar 4.

gb. 5

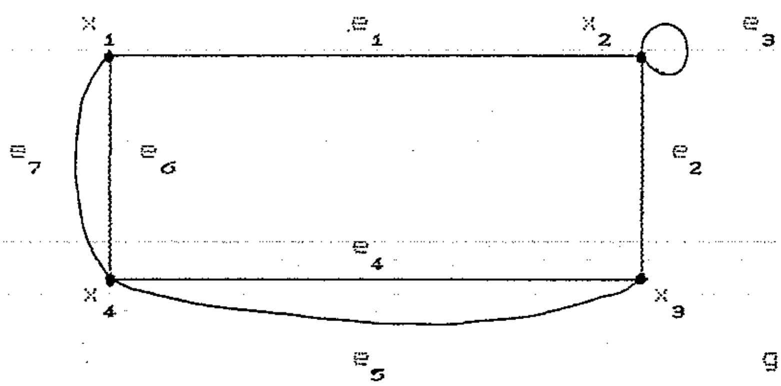
Definisi 2.1.12.

Suatu garis yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama disebut *Loop* .

Definisi 2.1.13.

Garis paralel adalah garis-garis yang menghubungkan sepasang titik yang sama.

ditulis: $(x_i,x_j)_1, (x_i,x_j)_2, \ldots, (x_i,x_j)_k$ $\quad k \geq 2$



gb.6

Pada gambar 6:

Titik x_1 dan x_4 mempunyai garis-garis paralel yaitu :

$e_7 = (x_1,x_4)_1$ dan $e_6 = (x_1,x_4)_2$.

Titik (x_3,x_4) mempunyai garis-gari paralel yaitu:

$e_4 = (x_3,x_4)_1$ dan $e_5 = (x_3,x_4)_2$.

e_3 merupakan loop.

Definisi 2.1.14.

Dua garis non paralel disebut *adjacent* jika insiden pada titik yang sama.

Definisi 2.1.15.

Dua titik disebut *adjacent* jika keduanya dihubungkan oleh garis yang sama.

gb.7

Pada gambar 7 e_1 adjacent dengan e_2

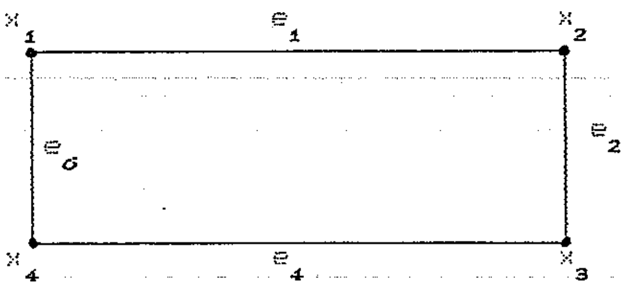
x_1 adjacent dengan x_2

x_2 adjacent dengan x_3

x_1 dan x_3 tidak adjacent

Definisi 2.1.16.

Subgraph dari graph $G = (X,E)$ adalah graph $G_A = (X_A,E_A)$ dengan $X_A \subset X$ dan $E_A \subset E$.



gb.8

Gambar 8 merupakan subgraph dari graph pada gambar 6.

Macam-macam subgraph :

1. Subgraph murni (proper subgraph) adalah suatu subgraph G_A dengan $E_A \subset E$ dan $E_A \neq E$

   $X_A \subset X$ dan $X_A \neq X$

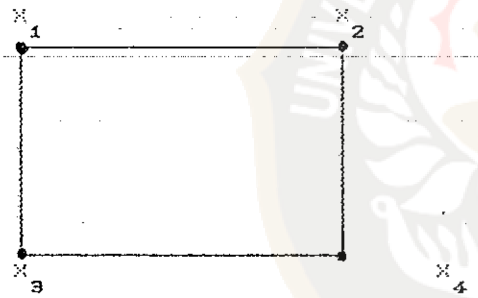
2. Subgraph bentangan (spanning subgraph) adalah suatu subgraph G_A dengan

   $E_A \subset E$

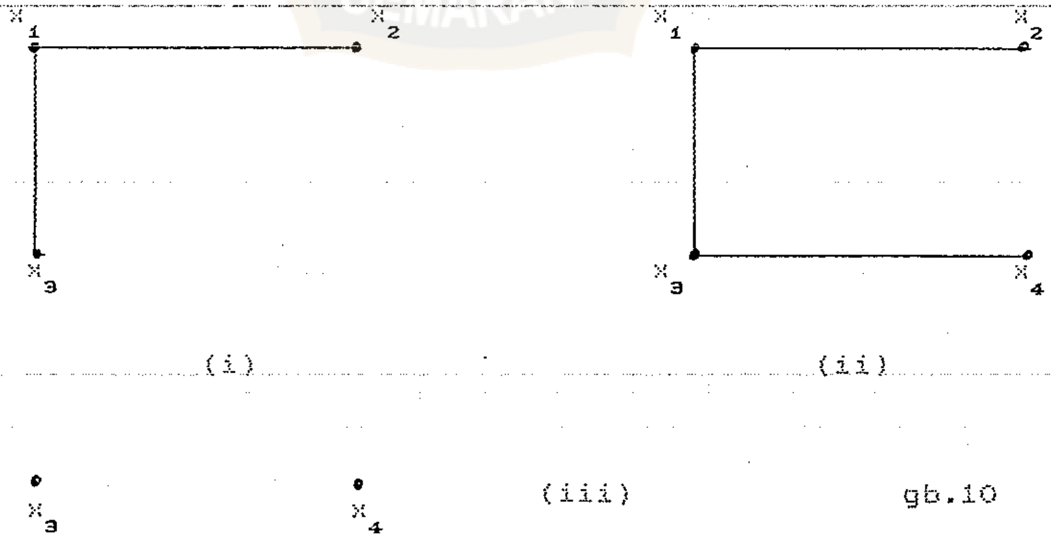
   $X_A = X$

3. Subgraph nol (null subgraph) adalah subgraph G_A dengan $E_A = \phi$

Contoh :Diberikan graph seperti pada gambar 9.



gb. 9



(i) (ii) (iii)

gb.10

Keterangan :

gambar 10 merupakan subgraph dari gambar 9.

gambar 10 (i) subgraph murni.

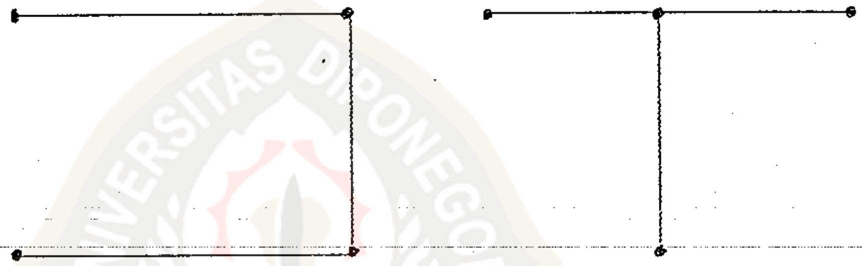
(ii) subgraph bentangan

(iii) subgraph nol

Definisi 2.1.17.

Graph sederhana adalah suatu graph yang tidak memiliki loop dan garis paralel.

Contoh graph sederhana ini dapat kita lihat pada gb. 11.

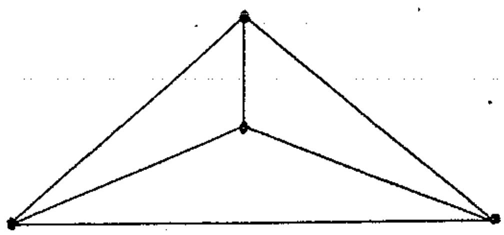


gb. 11

Definisi 2.1.18.

Graph lengkap adalah graph sederhana yang setiap pasang titik dihubungkan langsung oleh satu garis.

Sebagai contoh kita dapat mengamati gb. 12.



gb.12

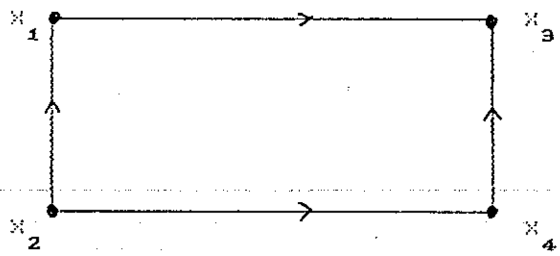
2.1.2.GRAPH BERARAH

Definisi 2.1.19.

Suatu graph G(X,E) disebut *graph berarah (directed graph)* apabila garis yang menghubungkan x_i (titik awal) dan x_j (titik akhir) merupakan garis berarah.

Directed graph biasanya disingkat digraph

Contoh

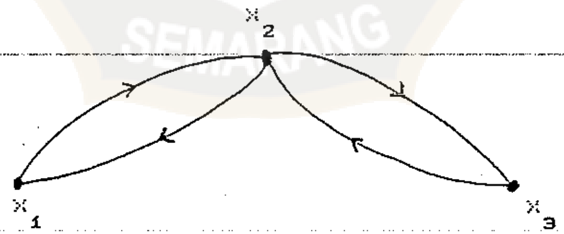


gb.13

Definisi 2.1.20.

Suatu digraph G dikatakan *digraph simetri* apabila untuk setiap garis berarah (x_i,x_j) dimana x_i titik awal dan x_j titik akhir pada G akan terdapat titik berarah lain yaitu (x_j,x_i) dengan x_j titik awal dan x_i titik akhir.

Contoh :



gb. 14

Definisi 2.1.21.

Suatu digraph dikatakan sebagai *digraph konvers* G^R dari suatu digraph G apabila arah dari setiap garis berarahnya berlawanan dengan arah dari setiap garis berarah dari digraph G pada setiap pasang titiknya.

Contoh :

Pandang digraph berikut (i) dan (ii)

(i) (ii)

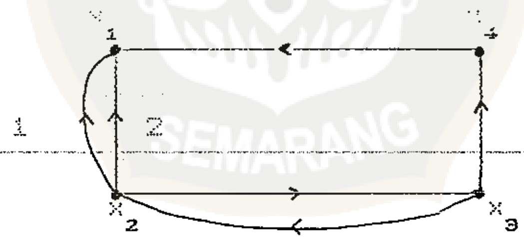
gb. 15.

Graph G (i) merupakan konvers G^R dari graph (ii).

Definisi 2.1.22.

Garis paralel dari suatu directed graph adalah garis-garis berarah dengan x_i sebagai titik awal dan x_j sebagai titik akhir

Contoh :Pandang digraph pada gambar 14.



gb.16

$(x_2,x_1)_1$, $(x_2,x_1)_2$ merupakan garis paralel.

(x_2,x_3), (x_3,x_2) bukan garis paralel.

Jadi meskipun sepasang titik dihubungkan oleh 2 buah garis, belum tentu garis tersebut merupakan garis paralel, tergantung arah dari garis-garis tersebut.

Karena arah garis sangat menentukan suatu digraph, maka derajad yang berlaku pada digraph dibedakan menjadi *derajad keluar* dan *derajad masuk*.

Definisi 2.1.23.

Derajad keluar dari titik x_i adalah banyaknya garis yang memiliki titik awal x_i, ditulis $\deg^+(x_i)$.

Derajad masuk dari titik x_i adalah banyaknya garis yang memiliki titik akhir x_i, ditulis $\deg^-(x_i)$.

Contoh :

Pada gambar 16.

$\deg^+(x_1) = 0$

$\deg^+(x_2) = 3$

$\deg^+(x_3) = 2$

$\deg^+(x_4) = 1$

$\deg^-(x_1) = 3$

$\deg^-(x_2) = 1$

$\deg^-(x_3) = 1$

$\deg^-(x_4) = 1$

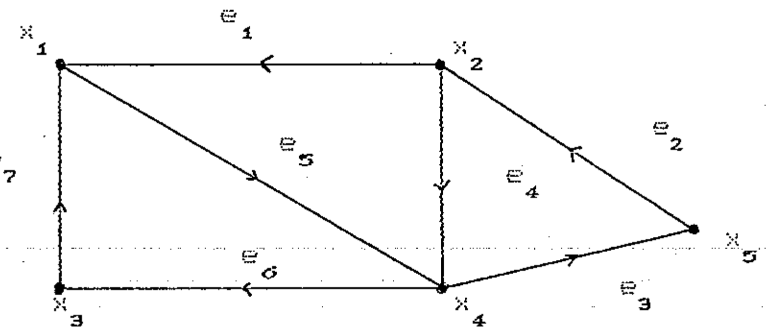
Definisi 2.1.24.

Lintasan garis berarah (directed path) adalah suatu lintasan garis berarah terbuka $e_1, e_2, \ldots\ e_k$ dengan panjang k.

Definisi 2.1.25.

Sirkuit berarah (directed circuit) adalah suatu lintasan garis berarah tertutup $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ dengan $e_1 = e_k$.

Contoh :



gb.17

(e_5, e_3, e_2) *merupakan path berarah*

$(e_5, e_6, e_7, e_5, e_3, e_2, e_1)$ *merupakan sirkuit berarah*

Selanjutnya directed graph yang biasa disingkat digraph secara umum dikatakan sebagai graph saja.

2.2.GRAPH ISOMORPHIS

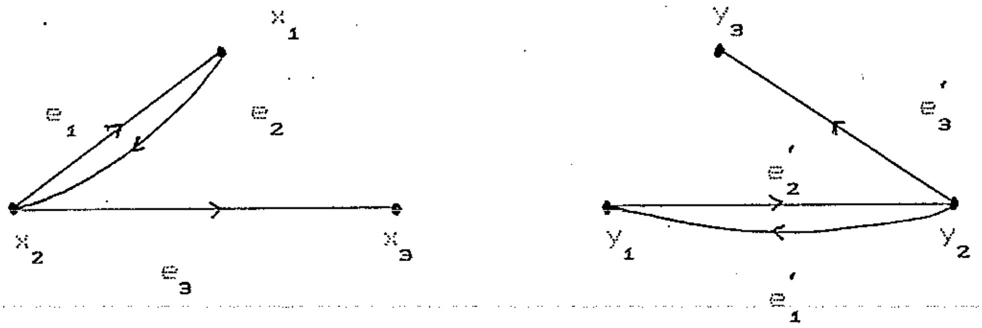
Definisi 2.2.1.

Dua buah graph $G = (X,E)$ dan $G' = (X',E')$ dikatakan *isomorphis* jika terdapat korespondensi satu-satu antara garis-garis pada G dan G' sedemikian sehingga jika garis e_1 insiden dengan titik-titik x_1 dan x_2 pada G maka garis e'_1 insiden dengan titik-titik x'_1 dan x'_2 pada G'.

Dua buah graph G dan G' yang isomorphis dinotasikan

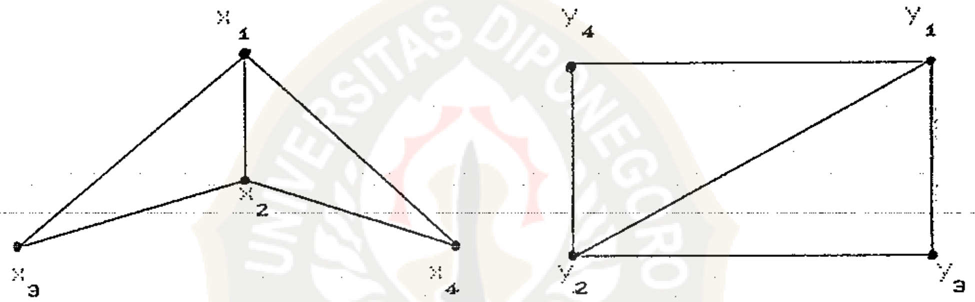
$G \simeq G'$

Contoh dua buah graph yang isomorphis



gb.18 (i) (ii)

Contoh 2.

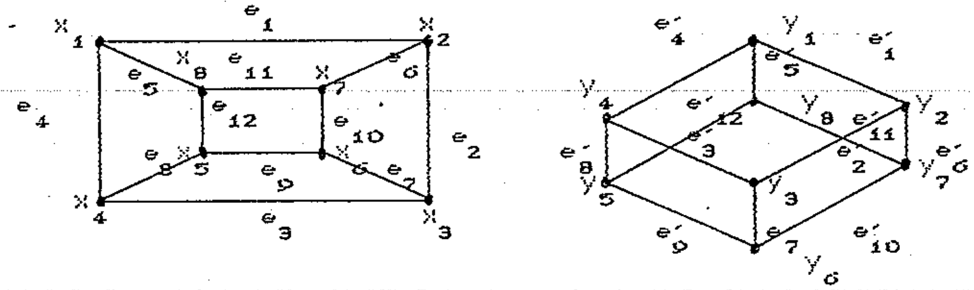


gb.19

Pada gambar 19 diatas menunjukkan 2 buah graph yang isomorphis. Hal ini menunjukkan bahwa 2 graph yang isomorphis tidak musti merupakan 2 buah graph dengan bentuk gambar yang sama.

Untuk lebih memperjelas keterangan diatas, lihat contoh 3.

Contoh 3.



gb.20

Dari contoh-contoh diatas dapat dimengerti bahwa 2 buah graph yang isomorphis pasti :

1. Memiliki jumlah titik yang sama.
2. Memiliki jumlah garis yang sama.
3. Terdapat kesamaan jumlah titik dengan degree yang sama.