

BAB II

METODE SIMPLEX

2.1. BENTUK UMUM MASALAH PROGRAM LINIER

Program linier merupakan kelompok teknik analisis kuantitatif yang tergabung dalam riset operasi, yang mengandalkan model-model matematika atau model-model simbolik sebagai wadahnya. Artinya, setiap persoalan yang dihadapi dalam suatu sistem permasalahan tertentu perlu dirumuskan dulu dalam simbol-simbol matematika tertentu dimana program linier dapat digunakan sebagai alat analisisnya. Permasalahan tersebut adalah dunia nyata, sedangkan model simbolik yang dibentuk oleh program linier adalah dunia abstraksi yang dibuat sedemikian rupa mendekati kenyataan. Karena mendekati kenyataan, maka keputusan-keputusan yang diambil diharapkan sesuai dengan atau mendekati kenyataan, atau tidak banyak meleset.

Agar dapat menyusun dan merumuskan suatu persoalan atau permasalahan yang dihadapi ke dalam model program linier, maka harus dipenuhi lima syarat sebagai berikut :

1. Tujuan

Apa yang menjadi tujuan permasalahan yang dihadapi dan ingin dipecahkan atau dicari jalan keluarnya. Tujuan ini harus jelas dan tegas yang disebut fungsi tujuan. Fungsi tujuan tersebut dapat berupa dampak positif, manfaat-manfaat, keuntungan-keuntungan, kebaikan-keba-

ikan, dan seterusnya yang ingin dimaksimalkan atau dampak negatif, kerugian-kerugian, resiko-resiko, biaya-biaya, jarak, waktu, dan hal-hal lain yang ingin diminimalkan.

2. Alternatif perbandingan

Harus ada sesuatu atau berbagai alternatif yang ingin diperbandingkan, misalnya antara kombinasi waktu tercepat dan biaya tertinggi dengan waktu terlambat dan biaya terendah, atau antara alternatif padat modal dengan padat karya, atau antara kebijakan A dengan B, atau antara proyeksi permintaan tinggi dengan permintaan rendah dan masih banyak lagi yang lainnya.

3. Sumber daya

Sumber daya yang dianalisis harus berada dalam keadaan terbatas. Misalnya keterbatasan waktu, keterbatasan biaya, keterbatasan tenaga, keterbatasan luas tanah, keterbatasan sumber air, keterbatasan ruangan, dan lain-lain. Keterbatasan sumber daya tersebut dinamakan kendala atau syarat-ikatan.

4. Perumusan kuantitatif

Fungsi tujuan dan kendala tersebut harus dapat dirumuskan secara kuantitatif dalam apa yang disebut model matematika.

5. Keterkaitan peubah

Optimalkan (maksimalkan atau minimalkan):

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \dots\dots\dots(2.4)$$

dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_{ij} (\leq, =, \geq) b_i \dots\dots\dots(2.5)$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\text{dan } X_j \geq 0, \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \dots, n \dots\dots\dots(2.6)$$

dimana untuk:

- C_j : Parameter yang dijadikan kriteria optimasi, atau koefisien peubah pengambilan keputusan dalam fungsi tujuan.
- X_j : Peubah pengambilan keputusan atau kegiatan yang ingin dicari, yang tidak diketahui).
- a_{ij} : Koefisien teknologi peubah pengambil keputusan (kegiatan yang bersangkutan) dalam kendala ke-i.
- b_i : Sumber daya yang terbatas, yang membatasi kegiatan atau usaha yang bersangkutan, disebut pula konstanta atau "nilai sebelah kanan" dari kendala ke-i.
- Z : Nilai skalar kriteria pengambilan keputusan atau nilai suatu fungsi tujuan.

Jika model dasar yang dirumuskan dalam (2.1) sampai ke (2.3) atau (2.4) sampai ke (2.6) diformulasikan lagi dalam notasi matriks, maka akan terlihat rumusan (2.7) sampai ke (2.9) sebagai berikut :

Optimalkan (maksimalkan atau minimalkan) :

dengan kendala :

$$AX \ (\leq, =, \geq) \ b \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

$$X \geq 0 \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

dimana $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ adalah vektor kolom.

$B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ adalah vektor kolom.

$C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ adalah vektor baris.

Jika memenuhi persamaan (2.8) dan (2.9), X disebut penyelesaian fisibel, dan jika penyelesaian fisibel tersebut juga memenuhi (2.7), X disebut penyelesaian optimal. Dari rumusan model dasar program linier tersebut terlihat bahwa ada tiga unsur penting yang harus dipenuhi oleh suatu persoalan program linier untuk dapat dirumuskan secara matematis, yaitu :

1. Suatu fungsi tujuan.
2. Berbagai kendala-kendala fungsional.
3. Kendala tidak boleh negatif atau syarat ikatan non negatif.

Salah satu ciri khas model program linier ini adalah didukung oleh lima macam asumsi dasar yang menjadi tulang punggung model tersebut. Asumsi-asumsi dasar tersebut adalah sebagai berikut :

1. Linieritas

Asumsi ini menginginkan agar perbandingan antara input yang satu dengan input yang lainnya, atau untuk suatu input dengan output besarnya tetap dan terlepas (tidak tergantung)

pada tingkat produksi. Jika fungsi tujuan, $C_j X_j$ bersifat non linier, maka teknik program linier ini tidak dapat dipakai.

2. Proporsionalitas

Asumsi ini menyatakan bahwa jika peubah pengambil keputusan, X_j berubah, maka dampak perubahannya akan menyebar dalam proporsi yang sama terhadap fungsi tujuan $C_j X_j$, dan juga pada kendalanya $a_{ij} X_j$. Misalnya, jika dinaikkan nilai X_j dua kali, maka secara proporsionalitas (seimbang dan serasi) nilai-nilai $a_{ij} X_j$ nya juga akan menjadi dua kali lipat. Implikasi asumsi ini adalah bahwa dalam model program linier yang bersangkutan tidak berlaku hukum kenaikan yang semakin menurun.

3. Aditivitas

Asumsi ini menyatakan bahwa nilai parameter suatu kriteria optimisasi (koefisien peubah pengambilan keputusan dalam fungsi tujuan) merupakan jumlah dari nilai individu-individu C_j dalam model program linier tersebut. Dampak total terhadap kendala ke- i merupakan jumlah dampak individu terhadap peubah pengambilan keputusan X_j .

4. Divisibilitas

Asumsi ini menyatakan bahwa peubah-peubah

pengambilan keputusan X_j , jika diperlukan dan

pat dibagi ke dalam pecahan - pecahan, yaitu bahwa nilai-nilai X_j tidak perlu integer tetapi boleh non integer (real).

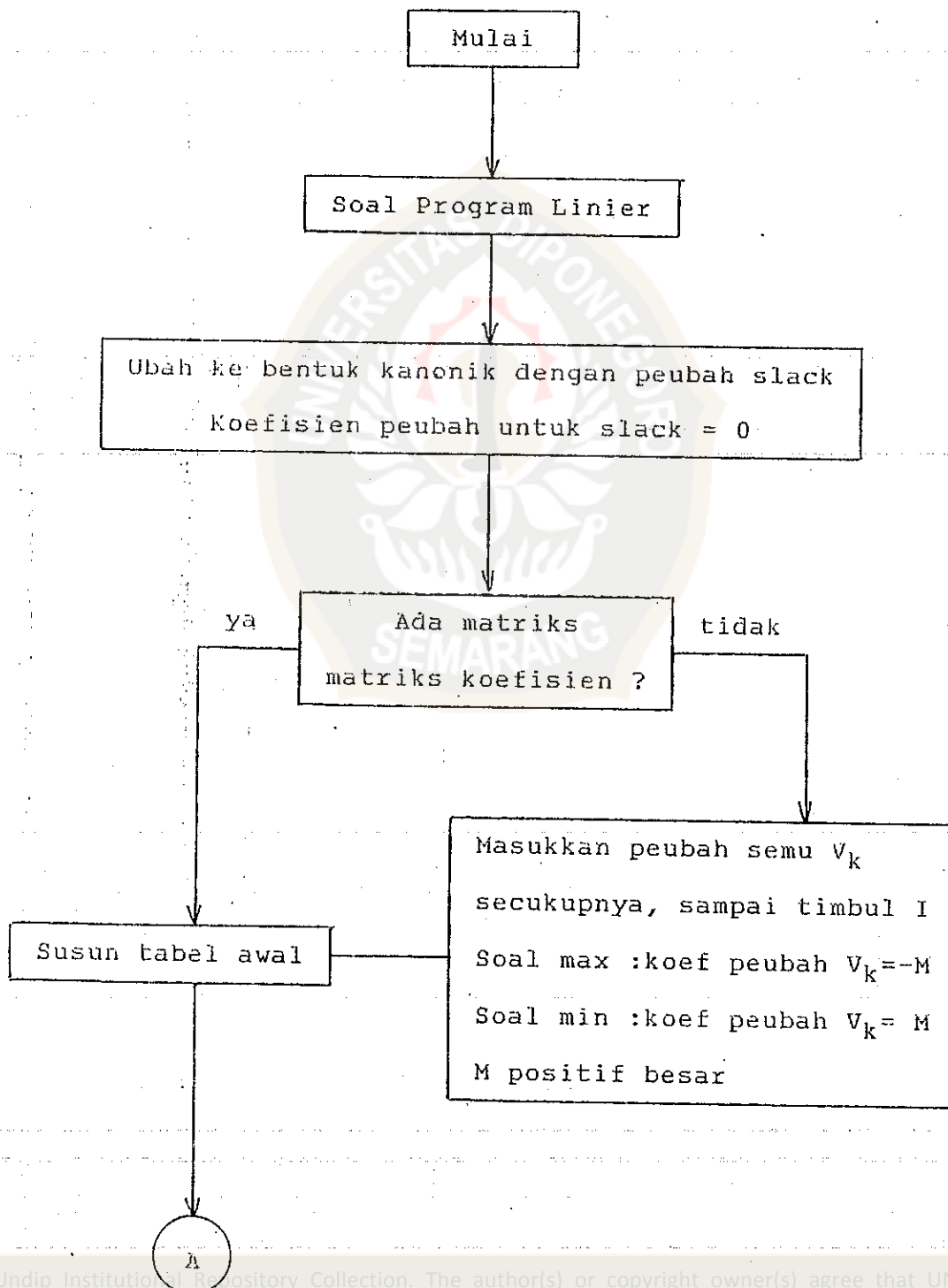
5. Deterministik

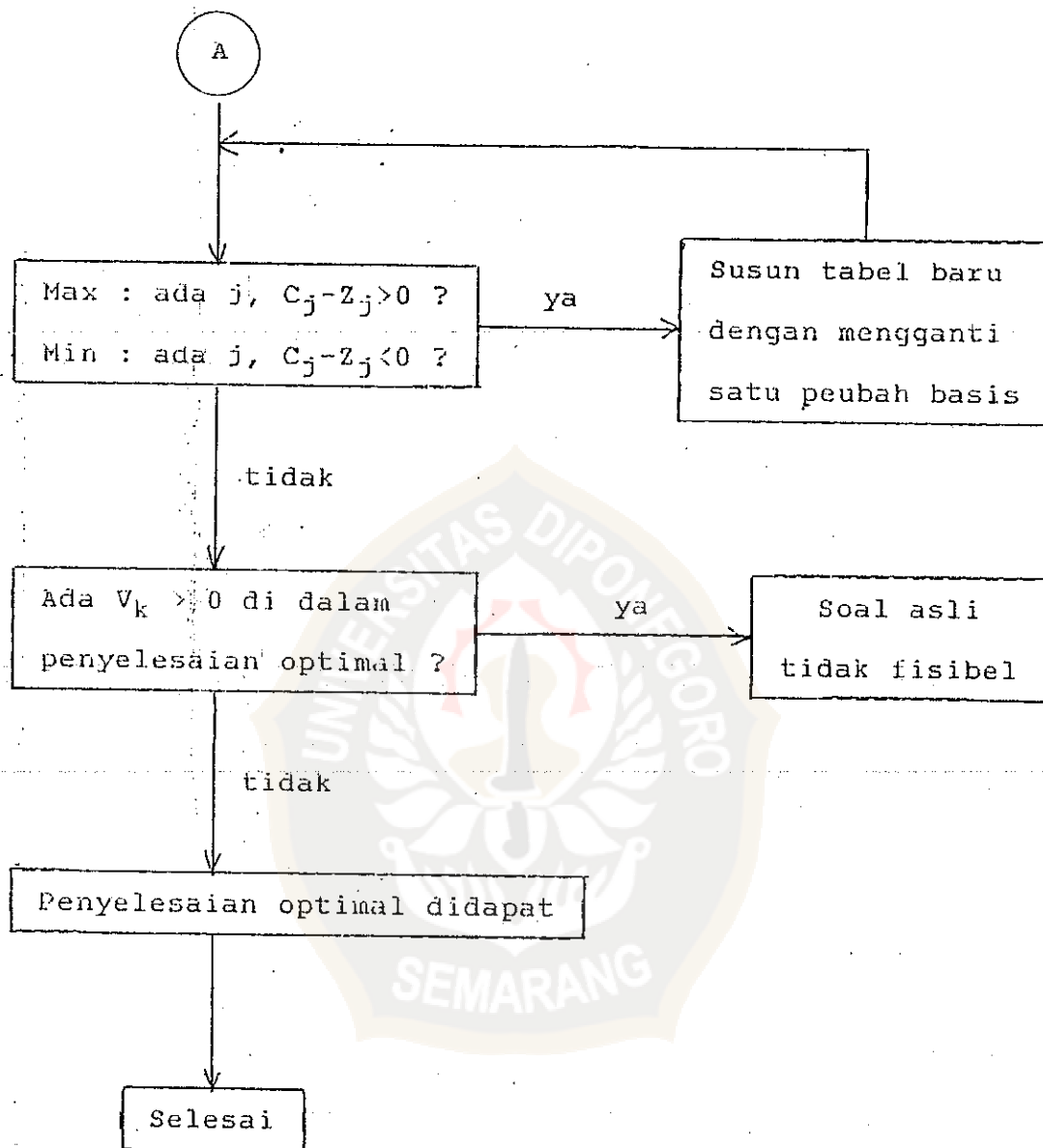
Asumsi ini menghendaki agar semua parameter dalam model program linier (yaitu nilai - nilai C_j , a_{ij} dan b_j) tetap dan diketahui atau ditentukan secara pasti. Dalam dunia nyata a - sumsi ini kadang-kadang memang memuaskan dengan baik sekali. Namun dalam model-model program linier yang kiranya dapat dipakai untuk untuk perencanaan jangka panjang, biasanya parameter penduganya (misalnya koefisien fungsi tujuan atau nilai sebelah kanan) diramalkan terlebih dahulu (dengan teknik statistik), sehingga pertimbangan ketidaktahuan juga turut diperhitungkan.

2.2. METODE SIMPLEX

Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa permasalahan program linier dalam dunia nyata adalah sangat kompleks, luas dan besar, sehingga untuk memecahkan persoalan dunia nyata perlu dilakukan analisis secara aljabar. Teknik matematika yang tepat untuk masalah program linier ini adalah aljabar matriks. Prosedur komputasi atau algoritma yang sangat terkenal untuk analisis persoalan program linier tersebut adalah metode simplex. Pa-

da garis besarnya langkah-langkah dalam analisis program linier dengan metode simplex adalah seperti terlihat dalam flowchart gambar 2.1.

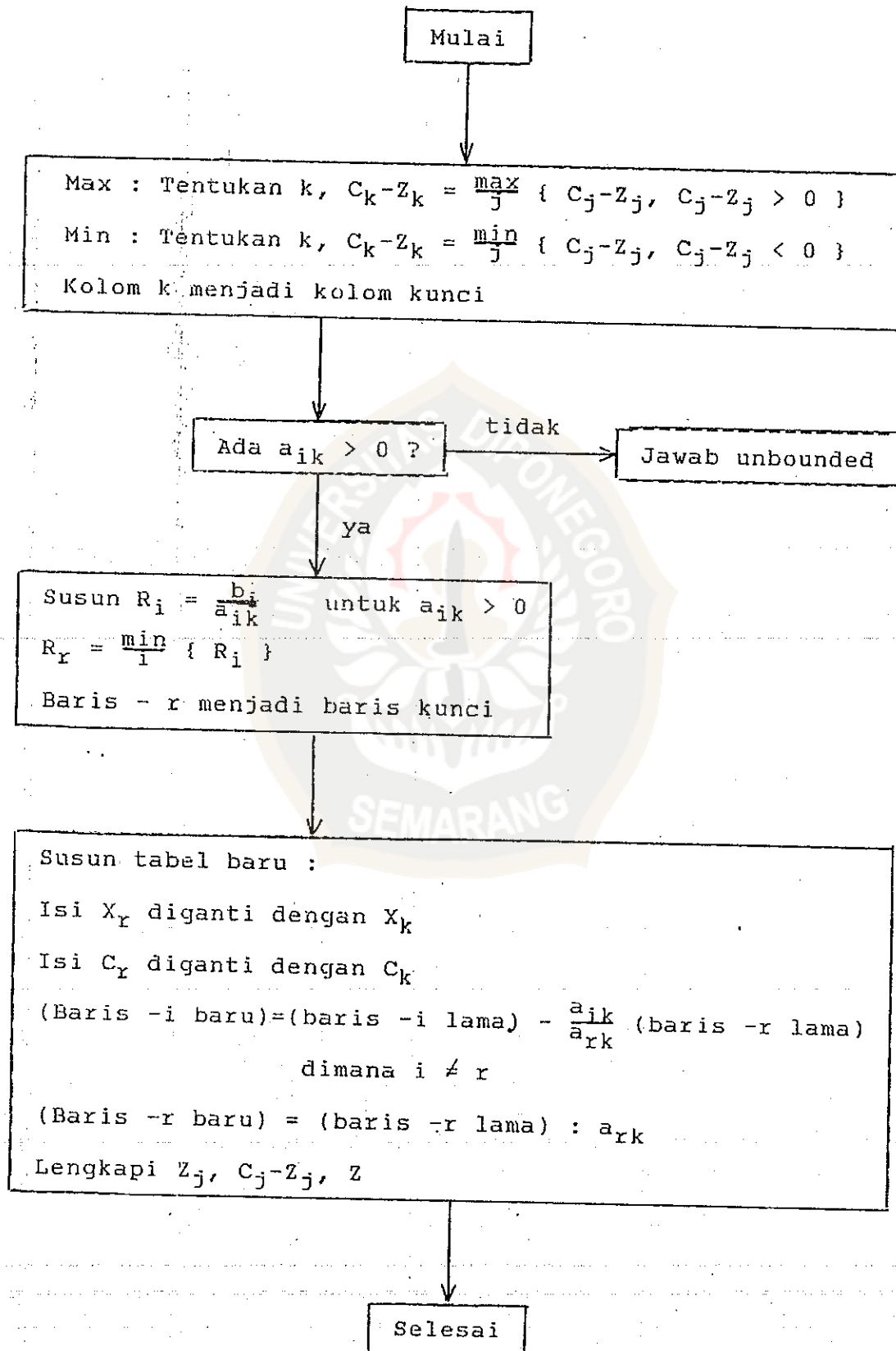




Gambar 2.1. Langkah-langkah dalam analisis program linier dengan metode simplex.

Sedangkan untuk penyusunan tabel baru dengan mengganti satu peubah basis dapat dirinci pada flowchart gambar 2.

Metode simpleks dikerjakan secara sistematis bermula dari suatu pemecahan dasar yang laik atau fisibel ke pemecahan dasar yang laik lainnya. Hal ini dilakukan berulang-ulang (iteratif) hingga akhirnya ditemukan satu pe-



Gambar 2.2. Perincian penyusunan tabel baru.

mecahan dasar yang optimal. Dalam pencarian kombinasi variabel yang menghasilkan nilai optimal, disusun tabel-tabel matriks pada setiap tahapan pengerjaan. Bentuk umum tabel matriks metode simplex tersebut adalah sebagai berikut :

Tabel 2.1. Tabel matriks metode simplex.

	C_j			
C_i	$X_i \setminus X_j$		b_i	R_i
	Z_j			
	$C_j - Z_j$			

Keterangan untuk tabel di atas :

1. Baris C_j : baris yang berisi koefisien dari masing-masing variabel dalam fungsi tujuan ($Z = \sum_j C_j X_j$).
2. Baris X_j : baris yang berisi variabel-variabel yang hendak dikombinasikan termasuk variabel semunya.
3. Kolom C_i : kolom yang berisi koefisien dari obyektif yang hendak dioptimalkan (koefisien yang sesuai dengan X_i).

4. Kolom X_i : kolom yang berisi variabel-variabel yang hendak dikombinasikan (peubah yang kebetulan menjadi basis).
5. Baris Z_j : baris yang berisi jumlah hasil kali antara angka-angka dalam kolom C_i dengan kolom ke $-j$ dalam matriks A ($Z_j = \sum_i C_i a_{ij}$).
6. Kolom b_i : kolom yang berisi kendala-kendala .
7. Kolom R_i : kolom yang berisi hasil bagi antara angka-angka dalam kolom b_i dengan kolom yang menjadi kunci.
8. Baris $C_j - Z_j$: Baris yang berisi hasil pengurangan antara angka-angka pada baris C_j dengan baris Z_j .
9. Kotak di tengah adalah matriks identitas I dan matriks A .

2.3. PENYELESAIAN SOAL PROGRAM LINIER

1. Kepala desa Wanaraja di Kabupaten Subang, Jawa Barat, ingin mengetahui berapa seharusnya luas tanah yang akan ditanami jagung, padi, kacang kedele kacang tanah dan rumput gajah oleh para petani di desanya dalam rangka meningkatkan pendapatan bagi masyarakat dari hasil pertanian tersebut. Para petani di desa ini memiliki total tanah pertanian seluas 350.000 hektare. Kepala desa, melalui anggaran belanja desanya yang telah disahkan oleh Bappeda Kabupaten Subang di dalam Daftar Isian Proyek (DIP)-nya mempunyai anggaran sebe-

sar 5 milyar rupiah untuk membayar upah buruh tani yang akan dipekerjakan pada tanah pertanian tersebut. Upah buruh tani tersebut ditetapkan menurut Hari Orang Kerja (HOK) yaitu sebesar Rp 2.000/HOK/hektare. Tabel 2.2. menyajikan jumlah buruh tani yang diperlukan untuk menanam tiap hektare jenis-jenis tanaman pertanian tersebut.

Tabel 2.2. Kebutuhan Buruh Tani untuk Usaha Pertanian di Desa Wanaraja, dalam HOK/ha.

Hasil Pertanian	Buruh Tani (HOK/ha)
Jagung	2
Padi	2
Kacang kedele	9
Kacang tanah	5
Rumput gajah	7

Para petani di desa ini rata-rata memiliki 50.000 hektare tanah yang cocok untuk ditanami jagung dan rumput gajah. Jagung, selain untuk kebutuhan manusia, juga untuk makanan ternak. Rumput gajah selain sumber energi pembakaran bata, juga untuk kebutuhan makanan ternak seperti kerbau dan sapi yang dimiliki oleh para petani di desa ini.

Dalam rangka memenuhi target yang telah ditetapkan

kan oleh KUD/BUUD Kabupaten Subang, maka tanah pertanian di desa ini harus ditanami paling sedikit dengan 20.000 hektare kacang tanah dan 20.000 hektare kacang kedele. Tanah di desa ini tidak dapat ditanami dengan padi pada areal yang lebih dari 150.000 hektare karena adanya keterbatasan dalam peralatan mesin, jumlah manusia, dan sistem pengairan (karena airnya bukan dari waduk Jatiluhur). Pendapatan bersih yang diharapkan oleh desa Wanaraja untuk setiap kilogram hasil dan setiap hektare areal tanah pertanian tersebut adalah sebagaimana terlihat dalam tabel 2.3.

Tabel 2.3. Perkiraan pendapatan bersih per kg hasil dan harapan produksi pertanian per tahun dari desa Wanaraja untuk Repelita IV.

Kode kegiatan	Hasil pertanian	Perkiraan pendapatan bersih (Rp/ha)	Harapan produksi (kg/ha)	Perkiraan Pendapatan bersih per ha (Rp/ha)
X ₁	Jagung	500	80	40.000
X ₂	Padi	300	60	18.000
X ₃	Kacang kedele	900	55	49.500
X ₄	Kacang tanah	600	50	30.000
X ₅	Rumput gajah	650	60	39.000

Untuk dapat merumuskan persoalan tersebut dalam suatu

model program linier maka dinyatakan :

X_1 = Luas areal untuk tanaman jagung guna konsumsi manusia.

X_2 = Luas areal untuk padi.

X_3 = Luas areal untuk kacang kedele.

X_4 = Luas areal untuk kacang tanah.

X_5 = Luas areal untuk rumput gajah guna pembakaran bata.

X_6 = Luas areal untuk jagung sebagai makanan ternak.

X_7 = Luas areal untuk rumput gajah sebagai makanan ternak.

Kemudian fungsi tujuan persoalan program linier yang dihadapi oleh kepala desa Wanaraja ini adalah memaksimalkan pendapatan bersih para petani di desanya. Pendapatan bersih per hektare adalah sama dengan harapan pendapatan bersih per kilogram dikalikan perkiraan produksi hasil per hektare, seperti yang disajikan pada tabel 2.3. tersebut. Perlu diperhatikan bahwa tidak terdapat pendapatan bersih yang khusus untuk kegiatan X_6 dan X_7 . Dengan demikian fungsi tujuannya adalah :

$$\text{Memaksimalkan } Z = 40.000 X_1 + 18.000 X_2 + 49.500 X_3 + 30.000 X_4 + 39.000 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7$$

Fungsi kendala yang menjadi syarat-ikatannya adalah sebagai berikut :

- Para petani memerlukan 50.000 hektare untuk tanaman jagung dan rumput gajah secara kombinasi

untuk makanan ternak, yaitu : $X_6 + X_7 = 50.000$

- Kendala tanah pertanian desa Wanaraja tinggal 300.000 hektare ($350.000 - 50.000 = 300.000$), fungsi kendalanya menjadi :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 300.000$$

- Para petani perlu menanam paling sedikit 200.000 hektare dengan kacang kedele, jadi :

$$X_3 \geq 20.000$$

- Juga paling sedikit 20.000 hektare lagi dengan kacang tanah, jadi : $X_4 \geq 20.000$

- Para petani di desa ini hanya mampu menanam tidak lebih dari 150.000 hektare dengan padi, jadi : $X_2 \leq 150.000$

- Kendala anggaran DIP yang Rp 5 milyar/(Rp2.000/HOK) adalah 2.500.000 HOK, dalam arti tenaga kerja buruh tani yang tersedia, jadi :

$$2 X_1 + 2 X_2 + 4 X_3 + 5 X_4 + 7 X_5 + 2 X_6 + 2 X_7 \leq 2.500.000$$

2. Kabupaten Bekasi di Jawa Barat membagi habis desa-desa nya atas KUD/BUUD yang bertugas menampung dan menyalurkan hasil-hasil pertanian dari masing-masing desa. Kalau perlu memberikan penyuluhan, latihan, dan pendidikan melalui kerjasama dengan badan/lembaga-lembaga pendidikan latihan yang ada menyangkut usaha tani, irigasi, pemasaran, dan pengetahuan umum tentang pengembangan wilayah pedesaan dan pertanian pada umumnya. Urusan pengairan ditangani oleh Perhimpunan Peta-

ni Pemakai Air (P3 Mitra Cai) yang bertugas mengatur, mengelola fungsi air dengan tujuan pemanfaatannya di tiap desa. Data tentang luas lahan yang dapat dikerjakan untuk usaha pertanian dan keadaan air irigasi Mitra Cai yang bersumber pada Jatiluhur adalah seperti terlihat pada tabel 2.4.

Tabel 2.4. Keadaan lahan usaha pertanian dan keadaan air irigasi di tiga desa kabupaten Bekasi.

Desa	Lahan Pertanian (hektare)	Air irigasi (meter ³)
I	400	600
II	600	800
III	300	375

Jenis tanaman pangan pertanian yang cocok untuk ditanam di wilayah ini padi, jagung, dan kacang kedele sepanjang tahun. Dinas Pertanian Rakyat Kabupaten Bekasi melalui KUD/BUUD-nya maupun program Bimas dan Inmas-nya telah memberikan target, bahwa untuk tahun depan harus dapat dihasilkan pendapatan yang tinggi dari bidang pertanian di wilayah ini, dengan target penanamannya seluas-sebagaimana disajikan dalam tabel 2.5.

Dalam hal ini setiap desa telah ditetapkan semacam ku-

ota luas lahan yang harus ditanam dalam tiap musim ta-

nam sesuai dengan kebijaksanaan pemerintah daerah dalam rangka mengejar target nasional.

Tabel 2.5. Data target penanaman, harapan pendapatan dan konsumsi air untuk pertanian di tiap desa, Kabupaten Bekasi.

Jenis tanaman	Kwota lahan maksimal (ha)	Konsumsi air (m^3/ha)	Pendapatan bersih (Rp/ha)
Padi	600	3	400
Jagung	500	2	300
Kacang kedele	325	1	100

Dengan target penanaman, konsumsi air, dan pendapatan bersih seperti dalam tabel 2.5. tersebut membuat tiap kepala desa bingung memberikan pengarahan kepada rakyat pemilik tanah pertanian; mengenai berapa luas tanah yang sesuai dan paling menguntungkan (optimal) untuk dapat ditanami dengan padi, jagung, dan kacang kedele. Kemudian pola penanamannya, dan kombinasi luas yang sesuai dan memadai di tiap desa ?

Masalah tersebut perlu dirumuskan dan dianalisis dengan model program linier. Masalahnya sekarang adalah bagaimana mengambil keputusan/pola kebijaksanaan yang tepat tentang berapa luas areal penanaman dari

tiap jenis tanaman (padi, jagung, dan kacang kedele)

tersebut di desa I, II, dan III. Ada sembilan peubah pengambilan keputusan X_j ($j=1,2,\dots,9$) seperti ditunjukkan oleh tabel 2.6.

Tabel 2.6. Peubah pengambilan keputusan untuk pengembangan wilayah pertanian / pedesaan di Kabupaten Bekasi.

Desa	Luas yang dialokasikan (ha)			
	Tanaman	Desa I	Desa II	Desa III
Padi		X_1	X_2	X_3
Jagung		X_4	X_5	X_6
Kacang kedele		X_7	X_8	X_9

Dengan tujuan untuk memaksimalkan pendapatan bersih dari hasil pertanian di desa ini, maka (dengan memperhatikan tabel 2.4., 2.5., dan 2.6.) diperoleh model program linier untuk pengembangan wilayah pedesaan dan pertanian di kabupaten Bekasi sebagai berikut

$$\text{Memaksimalkan } Z = 400 X_1 + 400 X_2 + 400 X_3 + 300 X_4 + 300 X_5 + 300 X_6 + 100 X_7 + 100 X_8 + 100 X_9$$

Dengan fungsi kendala

$$\text{Tanah : } X_1 + X_4 + X_7 \leq 400$$

$$X_2 + X_5 + X_8 \leq 600$$

$$X_3 + X_6 + X_9 \leq 300$$

$$\begin{aligned}
\text{- air :} & \quad 3 X_1 + 2 X_4 + X_7 \leq 600 \\
& \quad (\text{irigasi}) \quad 3 X_2 + 2 X_5 + X_8 \leq 800 \\
& \quad \quad \quad 3 X_3 + 2 X_6 + X_9 \leq 375 \\
\text{- tanaman :} & \quad X_1 + X_2 + X_3 \leq 600 \\
& \quad \quad \quad X_4 + X_5 + X_6 \leq 500 \\
& \quad \quad \quad X_7 + X_8 + X_9 \leq 325 \\
\text{- sosial :} &
\end{aligned}$$

$$\frac{X_1 + X_4 + X_7}{400} = \frac{X_2 + X_5 + X_8}{600} = \frac{X_3 + X_6 + X_9}{300}$$

dan bahwa $X_j \geq 0$, untuk $j=1,2,\dots,9$

Fungsi kendala yang terakhir merupakan kendala sosial di tiap desa perlu disempurnakan sehingga dapat memenuhi ketentuan yang berlaku bagi suatu model program linier, yaitu bahwa tidak boleh ada peubah bebas di sebelah kanan fungsi kendala sebagai nilai sebelah kannannya. Oleh karena itu fungsi kendala sosial ini di-rubah sebagai berikut :

$$600X_1 + 600X_4 + 600X_7 - 400X_2 - 400X_5 - 400X_8 = 0$$

$$300X_2 + 300X_5 + 300X_8 - 600X_3 - 600X_6 - 600X_9 = 0$$

$$400X_3 + 400X_6 + 400X_9 - 300X_1 - 300X_4 - 300X_7 = 0$$

Perlu ditekankan di sini bahwa sangatlah penting untuk mengerti struktur model-model program linier daripada menjadi ahli dalam pekerjaan mekanik (prosedur penghitungan algoritma simplex. Penghayatan terhadap suatu masalah dunia nyata, kemudian merumuskannya dalam suatu model program linier adalah sangat penting. Dalam dunia

teknologi tinggi yang modern dewasa ini hampir semua ma-

salah dapat dianalisis dengan komputer yang sangat efisien. Maka dari itu untuk menyelesaikan masalah program linier dari format soal yang besar diperlukan suatu program komputer.

2.4. BEBERAPA KELAINAN

1. Degeneracy (kemerosotan)

Jika ada peubah basis dalam penyelesaian optimal yang bernilai nol, penyelesaian disebut degenerate, tetapi hal ini bukan halangan.

2. Redundancy (kelebihan)

Adanya artificial variable dalam penyelesaian optimal tetapi dengan nilai nol bukan halangan, tetapi menunjukkan bahwa ada redundant (kelebihan).

3. Cycling

Jika pada suatu soal diperoleh tabel (basis) yang sama dengan salah satu tabel sebelumnya, berarti proses berputar-putar saja (komputer menjalani infinite looping). Biasanya karena ada dua pilihan pada kunci dan dapat diatasi dengan mengambil pilihan yang lain. Dalam prakteknya cycling jarang dijumpai.

4. Penyelesaian tak terbatas (unbounded)

Jika ada kolom misal ke $-k$ yang menjadi calon kunci I ($C_k - Z_k > 0$ untuk soal maksimal dan $C_k - Z_k < 0$ untuk soal minimal) sedang $a_{ik} \leq 0$ untuk semua i , maka ini menunjukkan bahwa penyelesaian soal tak terbatas atau tidak ada penyelesaian optimal.

5. Tidak fisibel

Adanya peubah semu yang bernilai positif dalam penyelesaian optimal menandakan bahwa soalnya tidak fisibel.

