BAB II
MATERI DASAR

2.1. TEORI HIMPUNAN

DEFINISI.1.

Himpunan adalah kumpulan sesuatu (benda, tumbuhan, hewan, bilangan, dan lain-lain) yang mempunyai ciri yang sama sesuai dengan ketentuan yang ditetapkan.

contoh.3.

H adalah himpunan bilangan asli yang lebih kecil dari 5, atau ditulis H = {1,2,3,4}.

DEFINISI.2.

Suatu elemen a adalah anggota suatu himpunan H dan ditulis $a \in H$,jika a memenuhi ketentuan yang dsyaratkan himpunan H.

contoh.4.

4 adalah anggota himpunan H pada contoh.1, karena 4 adalah bilangan asli yang lebih kecil dari 5, sehingga ditulis $4 \in H$. Jika a bukan anggota H ditulis $a \notin H$.

DEFINISI.3.

Himpunan H dikatakan menjadi **himpunan bagian** (*sub-set*) dari K, dengan tanda $H \subset K$, jika dan hanya jika setiap anggota dari H menjadi anggota dari K.

DEFINISI.4.

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut **himpunan kosong** dan dinotasikan dengan $\emptyset$.

DEFINISI.5.

Interseksi dari dua himpunan H dan K, dengan tanda $H \cap K$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen yang sekaligus berada dalam H maupun K.

$$H \cap K =df \{ x | x \in H \ \& \ x \in K \}.$$

Tanda "=df" dibaca "didefinisikan sebagai".

Apabila $H \neq \emptyset$, $K \neq \emptyset$ sedangkan $H \cap K = \emptyset$, maka H dan K disebut asing satu sama lain.

DEFINISI.6.

Union dari himpunan H dan K, dengan tanda $H \cup K$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan H atau K.

$$H \cup K = df \{ x | x \in H \vee x \in K \}.$$

DEFINISI.7.

Selisih dari dua himpunan H dan K, dengan tanda H-K, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen dalam H, yang tidak berada dalam K.

DEFINISI.8.

Suatu **partisi** dari himpunan H adalah penggolongan terhadap semua anggota dari H ke dalam himpunan-himpunan bagian yang saling asing.

DEFINISI.9.

Suatu **keluarga himpunan-himpunan** adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya juga himpunan-himpunan. Keluarga himpunan ini dinotasikan dengan $\mathcal{F}$.

contoh. 5.

Misal H_1 = { 1,2,3,4 }, H_2 = { 2,4,6,8 }, H_3 = { 1,3,5,7 }, maka $\mathcal{F}$ = { H_1,H_2,H_3 }.

2.2. PENGERTIAN DAN DEFINISI-DEFINISI DALAM GRAPH

DEFINISI.10.

Suatu graph *G=(X,E)* didefinisikan sebagai himpunan terbatas yang tidak kosong X = { x_1, x_2, ... ,x_n } yang merupakan himpunan titik-titik (*vertex*), dan himpunan E = { e_1,e_2, ... ,e_n } yang merupakan himpunan ruas-ruas (*edge*), sedemikian rupa setiap ruas e_k ditentukan oleh sepasang titik (x_i,x_j).

Jumlah semua titik dalam suatu graph disebut *order*.

DEFINISI.11.

Dua buah titik dikatakan **terhubung** (*adjacent*), apabila keduanya merupakan titik ujung dari ruas yang sama.

Suatu titik yang tidak berhubungan dengan titik lain disebut *titik terisolasi.*

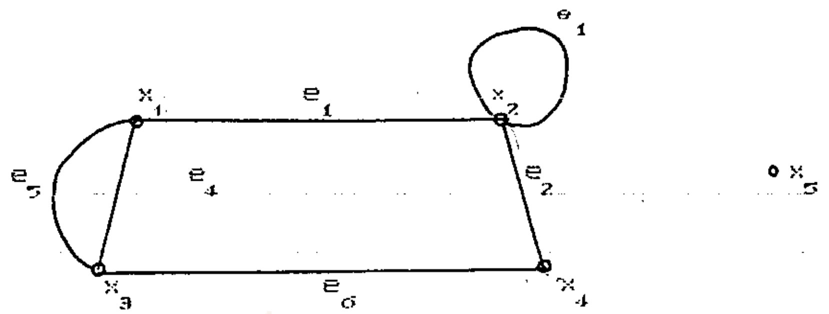
Himpunan semua titik yang adjacen dengan suatu titik x dalam graph *G* atau disebut himpunan semua titik persekitaran dari x, biasa dinotasikan dengan $\Gamma_G(x)$.

Jika $A \subset X$, maka $\Gamma_G(A) = {}_{a\in A}\Gamma_G(a)$.

DEFINISI.12.

Dua buah ruas dikatakan **terhubung** (*adjacent*), apabila kedua ruas tersebut bertemu pada sebuah titik bersama.

contoh.6.



$G = (X,E)$

gambar.3.

Gambar.3. di atas menunjukkan suatu graph $G=(X,E)$ dengan lima titik dan enam ruas, yaitu $X = \{ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \}$ dan $E = \{ e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6 \}$. Dengan demikian graph G mempunyai order 5, karena jumlah semua titiknya adalah 5.

x_3 dan x_4 pada graph G adalah terhubung, karena keduanya merupakan titik ujung dari ruas e_6. Sedangkan x_1 dan x_4 adalah tidak terhubung karena keduanya bukan merupakan titik ujung dari ruas yang sama.

Untuk ruas e_6 dan e_2 adalah terhubung, karena bertemu pada sebuah titik bersama yaitu titik x_4.

$\Gamma_G(x_3)$ pada graph G gambar.3. adalah $\{ x_1,x_4 \}$, karena x_1 dan x_4 berhubungan dengan x_3.

Titik x_5 adalah titik terisolasi.

Misal $A = \{ x_2,x_4 \}$ maka, $\Gamma_G(A) = \{ x_1,x_2,x_3,x_4 \}$, karena semua titik tersebut adjacent dengan titik x_2 atau titik x_4.

DEFINISI.13.

Derajat *(degree)* dari titik x atau $d_G(x)$ adalah jumlah semua ruas yang yang menghubungkan titik x dalam suatu graph G, dan khusus untuk ruas yang menghubungkan titik yang sama (*loop*) dihitung sebanyak dua.

contoh .7.

Dari graph $G=(X,E)$ pada gambar.3 di atas dapat dicari $d_G(x_1)=3$, yaitu ruas e_3, e_4 dan e_5, sedangkan $d_G(x_2)=4$, yaitu ruas e_2, e_3, dan 2 kali e_1 (loop).

DEFINISI.14.

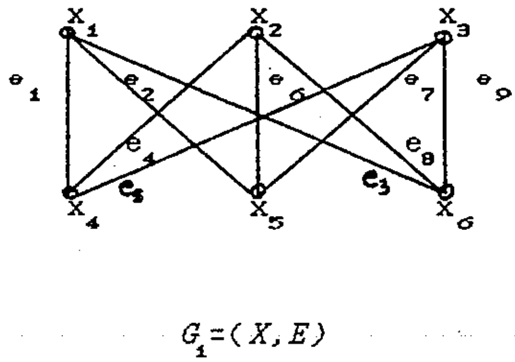
Dua graph G_1 dan G_2 dikatakan sebagai **isomorphic** dinotasikan $G_1 = G_2$, jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan-himpunan titiknya dan suatu korespondensi satu-satu antara himpunan-himpunan ruasnya, dan sedemikian hingga. ruas-ruas yang bersesuaian bertemu dengan titik yang bersesuaian.

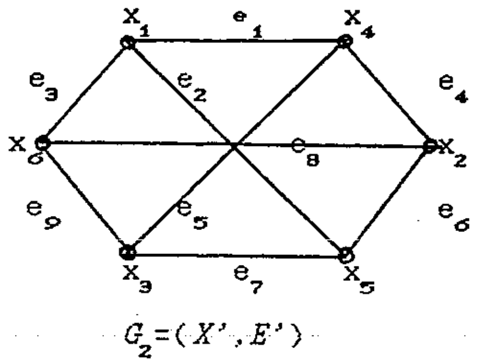
Dengan kata lain, pada dua graph yang isomorphic, titik-titik yang bersesuaian, di satu pihak adalah terhubung dengan ruas, jika dan hanya jika di pihak lain juga terhubung oleh ruas dengan jumlah yang sama.

Dari definisi.14 dapat dijabarkan dua syarat isomorphisme dari dua graph yaitu :

1. Pada kedua graph harus mempunyai jumlah titik dan jumlah ruas yang sama
2. Derajat pada titik-titik yang bersesuaian adalah sama.

contoh.8.





gambar.4.

Pada gambar.4 di atas, korespondensi yang terjadi antara dua buah graph G_1 dan G_2 adalah sebagai berikut :

- titik x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 dan x_6 berkorespondensi dengan titik $x_1', x_2', x_3', x_4', x_5'$ dan x_6'.
- ruas $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$ berkorespondensi dengan ruas $e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6', e_7', e_8', e_9'$

Jadi korespondensi yang terjadi antara himpunan titik dan himpunan ruasnya adalah korespondensi satu-satu. Oleh karena itu kedua graph di atas adalah isomorphic.

Isomorphisme dua graph G_1 dan G_2 di atas juga dapat ditunjukkan dari jumlah titik yang sama yaitu 6 ; jumlah ruas yang bersesuaian adalah sama yaitu 3.

DEFINISI.15.

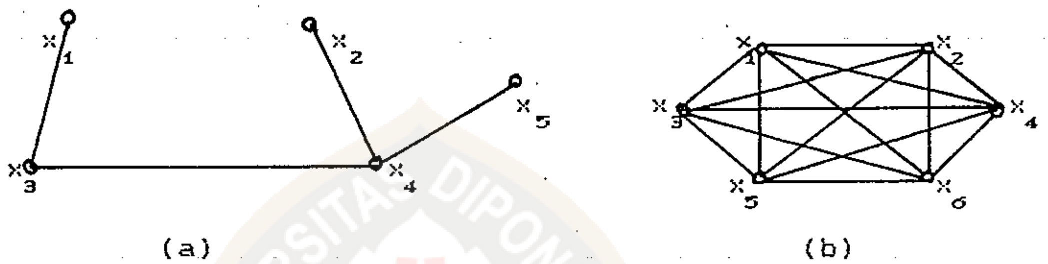
Suatu graph dikatakan sebagai graph sederhana (*simple graph*) jika dipenuhi

1. Graph tersebut tidak mempunyai loop,
2. Ruas yang menghubungkan dua buah titik, tidak lebih dari satu ruas.

DEFINISI.16.

Suatu graph $G=(X,E)$ disebut sebagai graph lengkap (*complete graph*), bila setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh sebuah ruas, dan khusus untuk graph dengan satu titik, maka titik tersebut tidak perlu dihubungkan oleh sebuah ruas.

contoh.9.



gambar.5 .

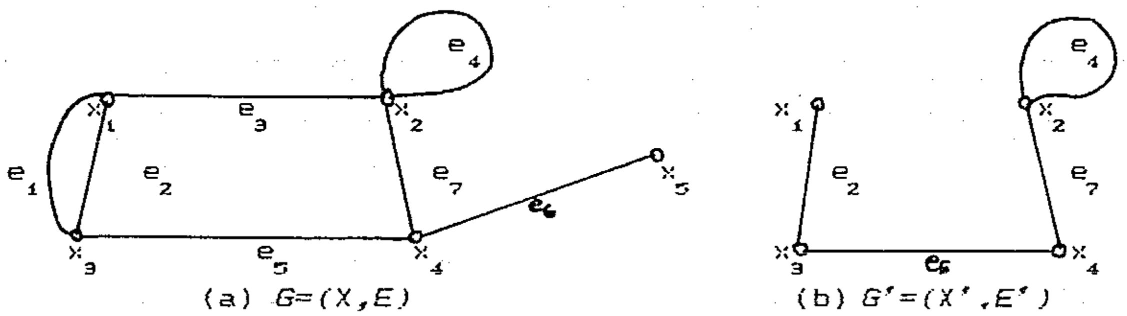
Graph pada gambar.5(a) adalah graph sederhana karena tidak mempunyai loop dan ruas paralel. Sedangkan graph pada gambar.5(b) adalah graph lengkap karena setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh sebuah ruas.

2.3. PENGERTIAN KLIK

DEFINISI.17.

Suatu subgraph $G'=(X',E')$ dari sebuah graph $G=(X,E)$ adalah sebuah graph dengan himpunan titik X' dan himpunan ruas E', sedemikian rupa $X' \subset X$ dan $E' \subset E$.

contoh10.



gambar.6 .

Graph pada gambar.6(a) mempunyai himpunan titik $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ dan himpunan ruas $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$. Sedangkan gambar.6(b) menunjukkan suatu graph dengan himpunan titik $X'=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ dan himpunan ruas $E'=\{e_2, e_4, e_5, e_7\}$. Jadi $X' \subset X$ dan $E' \subset E$, oleh karena itu graph G' pada gambar 6.(b) merupakan suatu subgraph dari graph G pada gambar 6.(a).

DEFINISI.18.

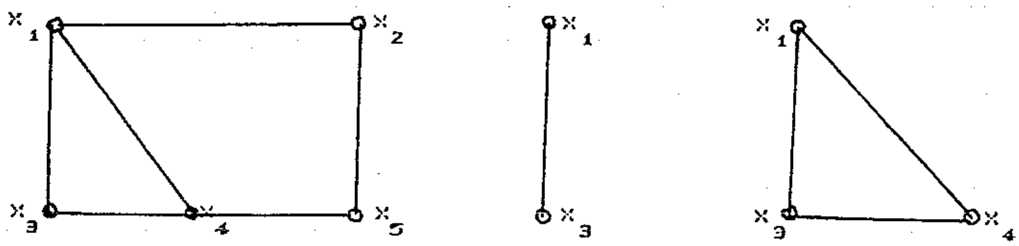
Dua subgraph dari suatu graph G dikatakan **terpisah** (*disjoint*), jika keduanya tidak mempunyai ruas bersama dan titik bersama.

DEFINISI.19.

Suatu klik dari suatu graph $G=(X,E)$ adalah sebuah subgraph dari suatu graph G yang merupakan graph lengkap. Dengan kata lain klik didefinisikan sebagai himpunan $C \subset X$, sedemikian rupa setiap pasang dari titik yang berbeda di dalam C adalah terhubung (*adjacent*), dan khusus untuk C dengan anggota satu titik, maka titik tersebut tidak perlu terhubung.

Klik dari suatu graph, biasa dinotasikan dengan C. Untuk suatu klik yang himpunan titiknya mempunyai anngota sebanyak i dikatakan sebagai *kilk-i*.

contoh.11



(a) $G=(X,E)$ (b) *2-klik* (c) *3-klik*

gambar. 7.

Graph pada gambar.7(b) adalah suatu klik dari graph pada gambar.7(b), yang merupakan klik-2. Karena graph pada gambar.7(b) merupakan suatu subgraph dari graph *G* yang merupakan graph lengkap dan himpunan titiknya mempunyai anggota sebanyak 2 yaitu x_1 dan x_3. Sedangkan gambar.7(c) menunjukkan klik-3, karena merupakan subgraph lengkap dari graph *G=(X,E)* yang himpunan titiknya mempunyai anggota sebanyak 3 yaitu x_1, x_3 dan x_4.

2.4. PENGERTIAN TREE DAN SPANNING TREE

DEFINISI.20.

Suatu barisan ruas (*edge squence*) dalam suatu graph G adalah suatu barisan terbatas dari ruas-ruas dengan bentuk :

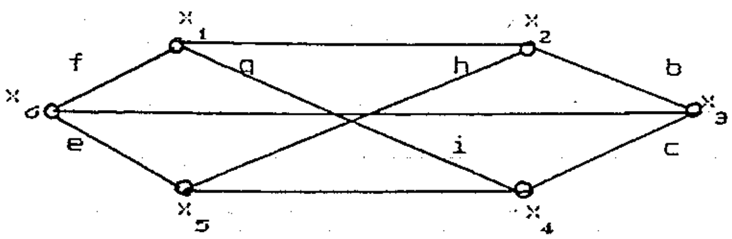
$$\mu = ((x_1,x_2),\ (x_2,x_3),\ \ldots\ ,(x_{k-1},x_k)),$$

untuk $k \geq 2$, dalam G.

Atau dapat ditulis,

$$\mu = (\ e_1, e_2,\ \ldots\ ,e_q\ ),\ \text{untuk } q \geq 1$$

contoh.12.



G=(X,E)

gambar.8.

Salah satu barisan ruas pada graph G=(X,E) di atas adalah :

$$\mu = ((x_1,x_6),(x_6,x_5),(x_5,x_4),(x_4,x_1),(x_1,x_6),(x_6,x_3))$$

atau

$$\mu = (f,e,d,g,f,i),$$

karena pada setiap ruas pada barisan tersebut, salah satu titik ujungnya adalah titik ujung ruas sebelumnya ,dan titikujung yang lainnya adalah titik ujung ruas berikutnya. Khusus untuk ruas pertama dan terakhir yaitu ruas (x_1,x_6) dan (x_2,x_3) titik x_1 tidak menjadi titik ujung ruas sebelumnya dan titik x_3 tidak menjadi titik ujung ruas berikutnya, karena menurut definisi x_1 tidak harus sama dengan x_k.

DEFINISI.21.

Suatu barisan titik (*vertex sequence*) dalam suatu graph G adalah suatu barisan titik-titik dari suatu barisan ruas dengan bentuk :

$$\sigma = (x_1,x_2, \ldots ,x_k),$$

untuk k ≥1 , dalam G.

contoh.13.

Suatu barisan titik dari graph G=(X,E) gambar.8. adalah :

$$\sigma = (x_1,x_6,x_5,x_4,x_1,x_6,x_3),$$

karena semua titiknya adalah titik-titik dari suatu barisan ruas pada contoh.12, yang tersusun sesuai dengan urutan ruas-ruas pada barisan ruas tersebut.

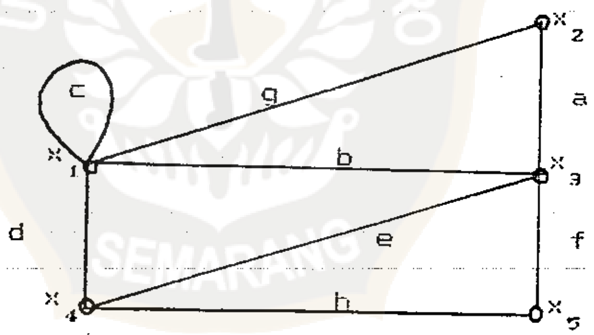
DEFINISI. 22 .

Suatu rantai (*chain*) adalah suatu barisan ruas μ = ($e_1, e_2, \ldots , e_q$) pada graph G dengan semua ruas yang berbeda sedemikian hingga setiap ruas e_i pada barisan ($2 \le i \le q-1$) mempunyai sebuah titik ujung bersama dengan ruas e_{i-1} untuk $e_{i-1} \neq e_i$, dan satu lagi titik ujung bersama dengan ruas e_{i+1} untuk $e_{i+1} \neq e_i$.

Suatu rantai $\mu = (e_1, e_2, \ldots , e_q)$ pada graph $G=(X,E)$ dapat juga ditulis $\mu = ((x_1,x_2),(x_2,x_3), \ldots , (x_q,x_{q+1}))$.

Panjang suatu rantai adalah jumlah ruas yang terdapat pada barisan tersebut.

contoh.14.



gambar. 9 .

Suatu rantai pada graph $G=(X,E)$ pada gambar.9. di atas adalah μ = (a,b,c,d,e,f) atau dapat ditulis $\mu = ((x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_1,x_1),(x_1,x_4),(x_4,x_3),(x_3,x_5))$. Pada gambar.9. dapat dilihat bahwa setiap ruas e_i pada rangkaian ($2 \le i \le q-1$) yaitu ruas b,c,d dan e, masing-masing mempunyai sebuah titik ujung bersama dengan ruas sebelumnya dan sebuah lagi titik ujung bersama dengan ruas selanjutnya. Misalnya ruas b pada barisan μ mempunyai titik ujung bersama dengan ruas a yaitu titik x_3 ; dan mempunyai satu buah lagi titik ujung bersama dengan ruas c yaitu titik x_1.

Panjang rantai tersebut adalah 6, karena jumlah seluruh ruasnya adalah 6.

DEFINISI .23.

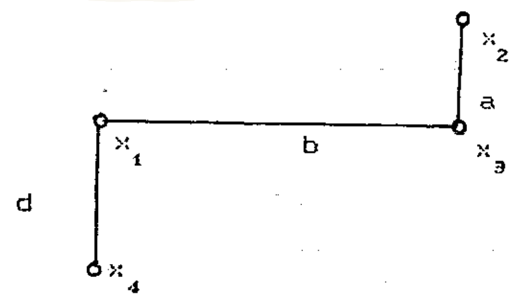
Suatu rantai yang tidak menggunakan dua buah ruas yang sama dikatakan sebagai rantai sederhana (*simple chain*).

DEFINISI .24.

Suatu lintasan (*path*) adalah suatu rantai μ = $((x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_q,x_{q+1}))$ yang memenuhi sifat :

1. Titik x_1 dan x_{q+1} mempunyai derajat 1,
2. Semua titik pada barisan μ selain x_1 dan x_{q+1}, mempunyai derajat 2.

contoh .15.



gambar .10.

Barisan μ=(a,b,d) atau $\mu=((x_2,x_3),(x_3,x_1),(x_1,x_4))$ pada gambar 10 di atas adalah suatu lintasan dalam graph G pada gambar .8. Karena derajat x_2 dan x_4 adalah 1, sedangkan derajat titik lainya yaitu x_1 dan x_3 adalah 2.

DEFINISI .25.

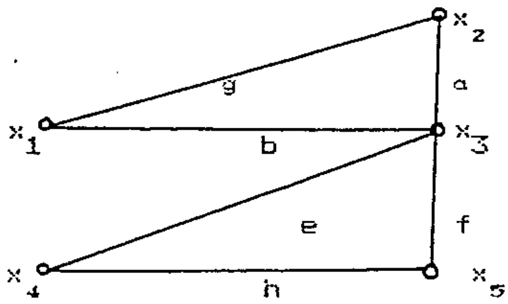
Suatu cycle adalah suatu rantai yang memenuhi syarat sebagai berikut :

1. Tidak ada ruas yang muncul dua kali dalam barisan
2. Titik awal dan titik akhir dalam suatu barisan adalah sama atau $x_1 = x_{q+1}$.

contoh .14.

Salah satu cycle yang terdapat pada graph $G=(X,E)$ pada gambar. 9 adalah $\mu = ((x_2,x_1),(x_1,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_3),(x_3,x_2))$. Dapat ditunjukkan bahwa barisan μ adalah rantai karena, ruas pada barisan ($2 \le i \le q-1$) yaitu ruas b,e,h dan f, masing-masing mempunyai sebuah titik ujung bersama dengan ruas sebelumnya, dan satu buah lagi titik ujung bersama dengan ruas selanjutnya. Pada barisan μ tidak ditemukan adanya ruas yang muncul dua kali, kemudian titik awal dan titik akhir dalam barisan μ adalah sama yaitu x_2.
Oleh karena semua syarat dipenuhi maka rangkaian μ adalah sebuah cycle.

Cycle pada contoh .14. di atas dapat digambarkan sebagai berikut :



gambar .11.

DEFINISI .15.

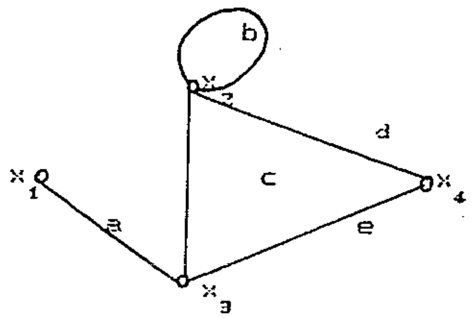
Suatu **cycle elementer** adalah suatu cycle yang didalamnya tidak didapatkan titik yang muncul lebih dari satu kali.

Cycle pada gambar.11 di atas adalah bukan cycle elementer , karena ditemukan suatu titik yang muncul dua kali yaitu titik x_3. Contoh cycle elementer dari graph *G* pada gambar.9 adalah μ = (g,b,a). Karena semua titik yang muncul pada barisan μ adalah sekali yaitu titik x_2,x_1 dan x_3.

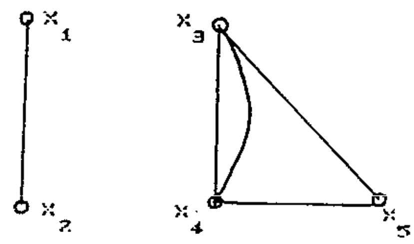
DEFINISI .27.

Suatu graph disebut **graph terhubung** (*connected graph*) apabila selalu terdapat lintasan di antara setiap dua titik dari graph tersebut. Sedangkan graph yang tidak demikian disebut graph tidak terhubung.

contoh .15.



(a) $G_1=(X,E)$



(b) $G_2=(X,E)$

gambar .12.

Graph $G_1=(X,E)$ pada gambar.12(a) adalah graph terhubung, karena di antara setiap pasang titik dari graph G terdapat lintasan. Yaitu :

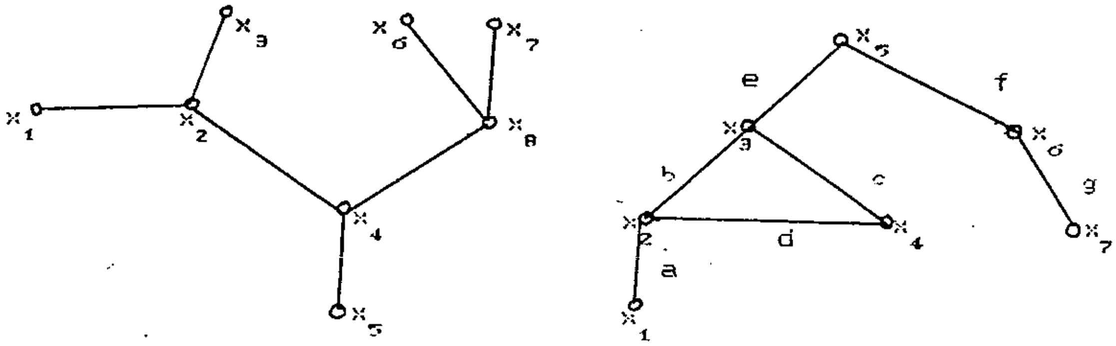
- antara titik x_1 dan x_2 terdapat lintasan $\mu=(a,e,d\ \ )$
- antara titik x_1 dan x_3 terdapat lintasan $\mu=(a)$
- antara titik x_1 dan x_4 terdapat lintasan $\mu=(\ a,c,d\ \ )$
- antara titik x_2 dan x_3 terdapat lintasan $\mu=(\ d,e\ \ )$
- antara titik x_2 dan x_4 terdapat lintasan $\mu=(\ c,e\ \ )$
- antara titik x_3 dan x_4 terdapat lintasan $\mu=(\ c,d\ )$

Sedangkan graph $G_2=(X,E)$ pada gambar.12(b) adalah graph tidak terhubung, karena di antara titik x_1 dan x_3 tidak didapatkan lintasan.

DEFINISI .28.

Suatu **tree** adalah suatu graph terhubung yang tidak mengandung cycle.

contoh .16.



(a) $G_1=(X,E)$ (b) $G_2=(X,E)$

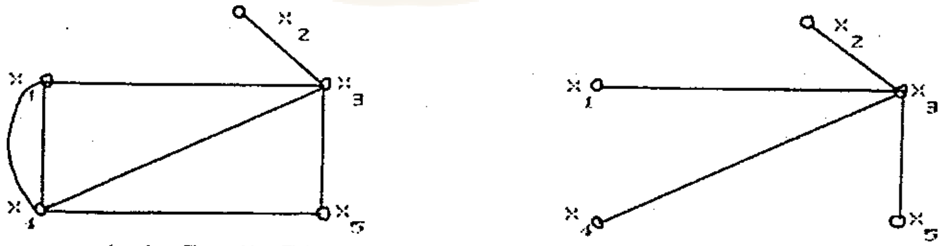
gambar .13.

Graph pada gambar.13(a) adalah tree, karena pada G_1 tidak ditemukan adanya cycle. Sedangkan graph G_2 pada gambar .13(b) adalah bukan tree, karena didapatkan sebuah cycle yaitu μ=(b,c,d).

DEFINISI . 29.

Spanning tree dari suatu graph terhubung $G=(X,E)$ adalah tree yang himpunan titiknya sama dengan titik pada graph G yaitu himpunan X.

contoh .17.



(a) $G=(X,E)$ (b) $G'=(X,E')$

gambar .14.

Graph G' pada gambar.14(b) adalah spanning tree dari graph G, karena himpunan titiknya yaitu $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ adalah sama dengan himpunan titik pada G. Dan pada graph

G' juga tidak mengandung cycle.

DEFINISI .30.

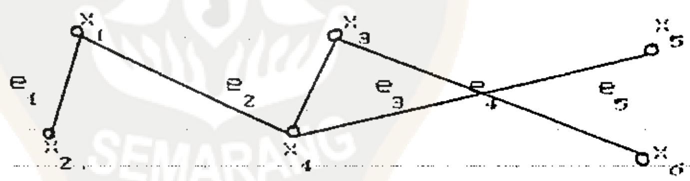
Titik pendant pada suatu tree adalah titik pada tree yang mempunyai derajat satu.

2.5. PENGERTIAN GRAPH BIPARTISI

DEFINISI .31.

Suatu graph bipartisi G adalah sebuah graph yang himpunan titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian X_1 dan X_2, sedemikian rupa setiap ruas pada G menghubungkan X_1 dengan X_2.

contoh .18.



gambar .15.

Semua titik pada graph gambar .15 dapat dikelompokkan ke dalam $X_1 = \{ x_1, x_3, x_5 \}$ dan

$X_2 = \{ x_2, x_4, x_6 \}$.

Setiap ruas pada graph G di atas menghubungkan titik-titik pada X_1 dengan titik-titik pada X_2. Jadi graph G pada gambar .15 di atas adalah graph bipartisi.

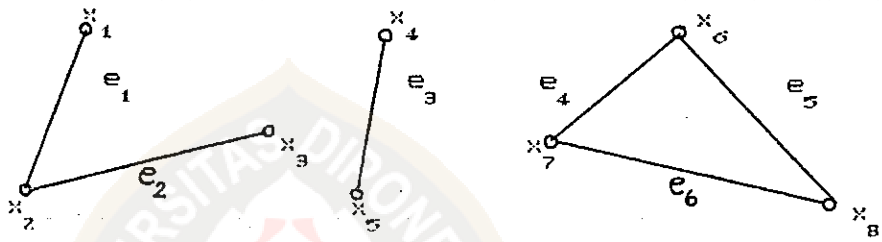
2.6. KOMPONEN DALAM GRAPH

DEFINISI .32.

Komponen dari suatu graph G adalah subgraph terhubung maksimal dari graph G.

Pada komponen suatu graph G apabila ditambahkan satu atau beberapa titik dan ruas lagi akan menjadi subgraph tidak terhubung.

contoh .19.



$G = (X,E)$

gambar .16.

Graph G pada gambar.16. mempunyai tiga komponen yaitu :

1. Komponen (x_1, e_1, x_2, e_2, x_3) yang merupakansubgraph terhubung maksimal yang terdiri darihimpunan titik $X' = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ dan himpunanruas$E' = \{ e_1, e_2 \}$ Pada subgraph ini apabiladitambahkan satu atau lebih titik dan ruas, maka akan menjadi subgraph tidak terhubung. Misalnya pada subgraph tersebut apabila titambah titik x_4, x_5 dan ruase_3, akan menjadi subgraph yangtidak terhubung, karena antara titik x_3 dan $x_4$tidak didapatkan lintasan
2. Komponen (x_4, e_3, x_5) , dan

3. Komponen ($x_6, e_4, x_7, e_6, x_8, e_5$), dengan penjelasan yang sama dengan komponen nomor.1, yaitu apabila ditambahkan satu atau lebih titik dan ruas akan merubah subgraph terhubung menjadi tidak terhubung.

2.7. OPERASI DALAM GRAPH

Beberapa operasi di dalam graph adalah :

1. **Gabungan** (*union*) yang dinotasikan dengan $\cup$.

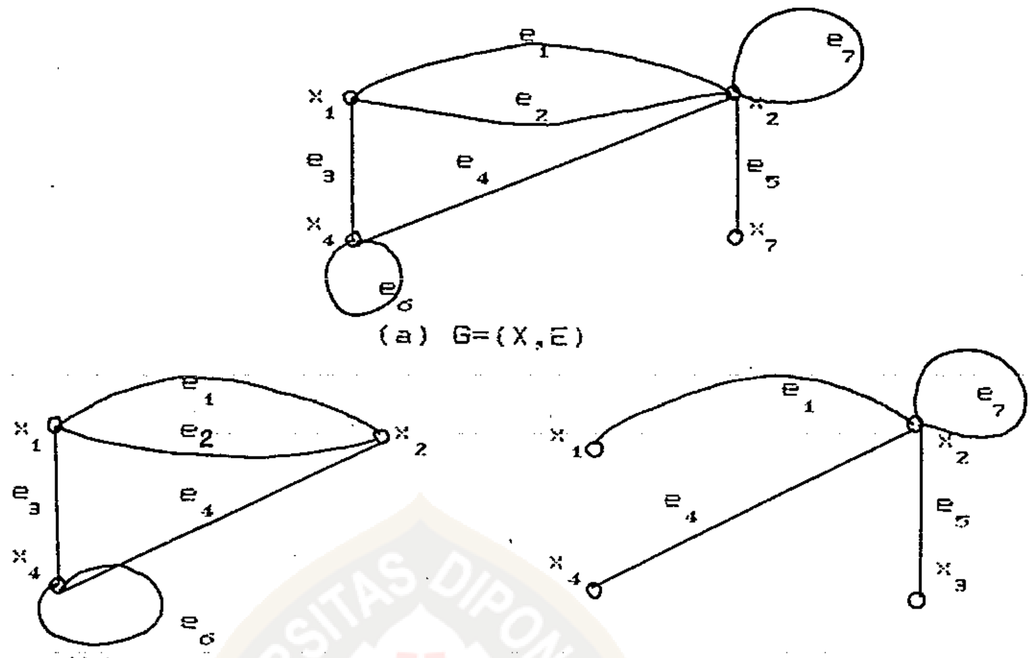
   Jika $G_1=(X_1,E_1)$ dan $G_2=(X_2,E_2)$ adalah dua subgraph dari suatu graph $G=(X,E)$, maka $G_1 \cup G_2$ menunjukkan subgraph dari G dengan himpunan titik $X_1 \cup X_2$ dan himpunan ruas $E_1 \cup E_2$.

2. **Irisan** (intersection) yang dinotasikan dengan $\cap$.

   $G_1 \cap G_2$ dari subgraph G_1 dan G_2, adalah subgraph dari G dengan himpunan titik $X_1 \cap X_2$ dan himpunan ruas $E_1 \cap E_2$.

3. Jika G_1 dan G_2 adalah subgraph dari G yang tidak mengandung titik terisolasi, maka $G_1 - G_2$ menunjukkan subgraph yang mengandungsemua ruas dari G_1 yang bukan merupakan ruas G_2.

contoh .20.



(a) G=(X,E)

(b) $G_1=(X_1,E_1)$ (c) $G_2=(X_2,E_2)$

gambar .17.

Pada gambar .17(a) di atas menunjukkan grap G=(X,E) dengan himpunan titik X = { x_1,x_2,x_3,x_4 } dan himpunan ruas E = { $e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7$ }.

Gambar .17(b) menunjukkan subgraph dari G yang mempunyai himpunan titik X_1 = { x_1,x_2,x_4 } dan himpunan ruas E = { e_1,e_2,e_3,e_4,e_6 }.Subgraphtersebutadalah$G_1=(X_1,E_1)$.

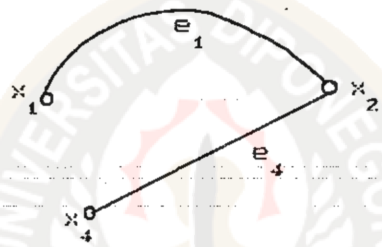
Gambar .17(c) menunjukkan subgraph dari G yaitu $G_2=(X_2,E_2)$ yang mempunyai himpunan titik X_2 = { x_1,x_2,x_3,x_4 } dan himpunan ruas E_2 = { e_1,e_4,e_5,e_7 }.

Beberapa operasi terhadap graph-graph gambar .17. adalah :

1. $G_1 \cup G_2$ menghasilkan suatu graph dengan himpunan titik $X_1 \cup X_2$ = { x_1,x_2,x_4 } $\cup$ { x_1,x_2,x_3,x_4 } = {

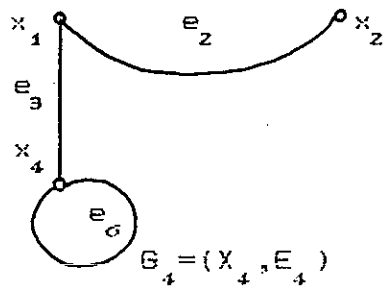
$x_1,x_2,x_3,x_4\}$ dan himpunan ruas $E_1 \cup E_2 = \{ e_1,e_2,e_3,e_4,e_6 \} \cup \{ e_1,e_4,e_5,e_7 \} = \{ e_1,e_2,e_3,e_4,e,e_5,e_6,e_7 \}$. Jadi $G_1 \cup G_2 = G$.

2. $G_1 \cap G_2$ menghasilkan suatu graph G_3 dengan himpunan titik $X_1 \cap X_2 = \{ x_1,x_2,x_4 \} \cap \{ x_1,x_2,x_3,x_4 \} = \{ x_1,x_2,x_4 \} = X_3$ dan himpunan ruas $E_1 \cap E_2 = \{ e_1,e_2,e_3,e_4,e_6 \} \cap \{ e_1,e_4,e_5,e_7 \} = \{ e_1,e_4 \} = E_3$.
Graph $G_3=(X_3,E_3)$ dapat ditunjukkan oleh gambar berikut



$G_3=(X_3,E_3)$
gambar .18.

3. $G_1 - G_2$ menghasilkan suatu graph G_4 yang mempunyai himpunan ruas $E_4 = E_1 - E_2 = \{ e_1,e_2,e_3,e_4,e_6 \} - \{ e_1,e_4,e_5,e_7 \} = \{ e_2,e_3,e_6 \}$, sedangkan himpunan titiknya menyesuaikan dengan himpunan ruasnya. Jadi $X_4 = \{x_1,x_2,x_6\}$.
Graph $G_4=(X_4,E_4)$ dapat digambarkan sebagai berikut :



gambar .19 .

2.8. BEBERAPA PRINSIP LOGIKA

2.8.1. KONTRAPOSISI

DEFINISI.33.

Kalimat " $A \Rightarrow B$ " diucapkan " apabila A maka B ", disebut suatu **implikasi** atau **kondisional**. Kalimat depan anak panah disebut **anteseden** dan yang terletak di belakangnya disebut **konsekwen**.

DEFINISI.34.

Kalimat " $\bar{A}$ " diucapkan " tidaklah A " atau " non-A " dan disebut **negasi** atau **ingkaran** dari " A ".

DEFINISI.35.

Apabila kalimat " $A \Rightarrow B$ " disebut implikasi mula-mula maka kalimat " $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ " disebut **kontraposisi** implikasi mula-mula.

Jika implikasi mula-mula benar maka, kontraposisinya pasti benar juga. Dan sebaliknya apabila kontraposisi dari suatu implikasi yang diketahui benar, maka implikasi mula-mulapun benar juga. Sebab, kontraposisi dari kontraposisi itu, yaitu kontraposisi dari "$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$" adalah "$\bar{\bar{A}} \Rightarrow \bar{\bar{B}}$" yaitu tidak lain adalah "$A \Rightarrow B$" karena $\bar{\bar{A}}$ adalah A. Dengan kata lain suatu implikasi dan kontraposisinya mempunyai nilai logika yang sama.

contoh.21.

"Apabila ABCD bujur sangkar maka diagonal-diagonalnya potong memotong tegak lurus". Ini suatu implikasi yang benar.

Kontraposisinya adalah :

"Apabila diagonal-diagonalnya tidak potong-memotong tegak lurus maka ABCD pasti bukan bujur sangkar". Suatu kalimat yang benar juga.

Contoh penggunaan kontraposisi dalam pembuktian teorema :

contoh. 22.

Teorema :

Misal x dan y adalah bilangan bulat positip. Jika x.y adalah suatu bilangan ganjil, maka x dan y keduanya ganjil.

Bukti :

Diandaikan sebaliknya, bahwa kedua bilangan x dan y tidak keduanya ganjil. Jadi salah satu dari bilangan tersebut adalah bilangan genap. Misal x = 2.z, sehingga x.y = 2.z.y adalah suatu bilangan genap. Hal ini merupakan kontradiksi atau negasi terhadap teorema, bahwa x.y adalah bilangan ganjil.

Karena dari pengandaian bahwa, jika kedua bilangan x dan y tidak keduanya ganjil dapat diturunkan menjadi x.y adalah bilangan genap, maka kotraposisi dari teorema di atas dapat dibuktikan, sehingga teorema di atas juga terbukti.

DEFINISI.36.

Kalimat " A $\Longleftrightarrow$ B" disebut bi-implikasi atau bi-konditional, dan diucapkan " A jika dan hanya jika B " disingkat " A jhj B ".

Apabila kedua kalimat komponennya bernilai sama maka, bi-implikasi bernilai benar. Sebaliknya jika kalimat-kalimat komponennya benilai berlainan maka, bi-implikasi itu bernilai salah. Dengan demikian kalimat "A $\Longleftrightarrow$ B" dapat juga dituliskan " (B $\Longrightarrow$ A) & (A $\Longrightarrow$ B) ".

2.7.2. INDUKSI MATEMATIKA

Gagasan prinsip pembuktian dengan metode induksi ini, ditemukan oleh Augustus de Morgan (1806-1871). Gagasan tersebut dapat diibaratkan atau identik dengan proses merobohkan sederetan kartu domino yang disusun secara tegak berderet. Apabila salah satu kartu dirobohkan ke arah kartu lainnya, maka kartu-kartu di sebelahnya akan roboh pula. Dengan demikian semua kartu akan roboh kalau, (1). kartu yang pertama dirobohkan, dan (2). jika kartu ke-i roboh, maka kartu yang ke-(i+1) juga akan roboh.

Cara semacam ini dapat diterapkan untuk memperlihatkan kebenaran hasil suatu proses yang terjadi secara berulang-ulang dan berpola teratur.

Misalnya P_n adalah suatu pernyataan yang menyangkut bilangan asli n. Prinsip pembuktian dengan menggunakan induksi matematika mencakup langkah-langkah sebagai berikut :

1. Perlihatkan bahwa P_n benar untuk $n = 1$. (dalam beberapa hal perlu diperlihatkan kebenaran untuk bilangan asli selain 1)
2. Anggaplah P_n benar untuk bilangan asli $n = k$, sedangkan k adalah bilangan asli sembarang; ini disebut **hipotesa induksi.**
3. Bertolak dari hipotesa induksi ini, perlihatkan bahwa P_n juga benar untuk $n = k+1$.

Ini disebut langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematika.

contoh. 23 .

Perlihatkan bahwa jumlah n bilangan yang pertama memenuhi hubungan : $1+2+3+ \ldots +n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Penyelesaian :

Misalkan $P_n = 1+2+3+ \ldots +n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pada langkah pertama harus diperlihatkan bahwa P_n benar untuk $n = 1$. Berarti,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$= \frac{1.2}{2}$$

$$1 = 1$$

Ruas kiri dan ruas kanan dari P_1 sama dengan 1. Jadi untuk P_1 adalah benar.

Andaikan P_n benar untuk n=k, berarti,

$$P_k = 1+2+3+ \ldots +k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ adalah benar.}$$

Pada langkah selanjutnya akan diperlihatkan bahwa P_{k+1} juga benar.

Untuk n = k+1 , ruas kiri P_n adalah :

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots +k+(k+1) &= \{ \frac{k(k+1)}{2} \} + (k+1) \\ &= (k+1) (\frac{k}{2} + 1) \\ &= (k+1) (\frac{k+2}{2}) \\ &= \frac{1}{2} (k+1) (k+2) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1). \end{aligned}$$

Ternyata hasil ruas kiri ini adalah sama dengan ruas kana untuk P_n untuk n = k+1, yaitu $\frac{1}{2} n(n+1)$.

Dengan demikian terbukti bahwa, jumlah n bilangan asli yang pertama memenuhi hubungan $1+2+3+ \ldots +n = \frac{n(n+1)}{2}$.

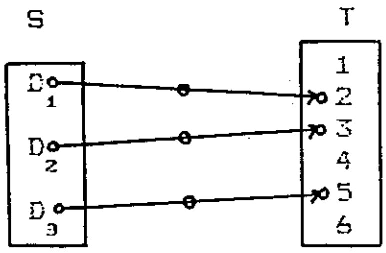
2.8. PEMETAAN.

DEFINISI.37.

Suatu pemetaan dari S ke T (atau S sebagai daerah sumber dan T sebagai daerah kawan) adalah suatu aturan yang pada setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dalam T.

contoh.24.

S adalah himpunan tiga dadu, S = $\{D_1, D_2, D_3\}$; T himpunan bilangan-bilangan (mata dadu) 1 sampai 6, T = {1,2,3,4,5,6}. Suatu lemparan menentukan suatu pemetaan dari S ke T.



gambar.20.

Gambar.20. di atas memperlihatkan bahwa dadu D_1 jatuh dengan mata 2 di atas; D_2 jatuh dengan mata 3; sedangkan D_3 jatuh dengan mata 5 di atas. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa kawan dari D_1 adalah 2 ; dari D_2 adalah 3 ; dan dari D_3 adalah 5.

Yang perlu diperhatikan dalam pemetaan adalah :

1. Setiap anggota dari S mempunyai kawan di dalam T. Dikatakan bahwa S (domainnya) dihabiskan dan sebaliknya tidak usah. Artinya ada anggota-anggota dari T, misalnya pada contoh di atas 1,4,6 yang tidak mempunyai kawan dalam S.
2. Kawan dari anggota S adalah tunggal, sebaliknya tidak usah demikian. Mungkin juga ada anggota-anggota dari T yang mempunyai beberapa kawan di S.

Suatu pemetaan f dari S ke T disajikan dengan tanda f : S –o-> T. Apabila s ∈ S, maka kawannya (tunggal) yang berada dalam T disajikan dengan f(s) dan dikatakan bahwa S dibawa ke dalam f(s), dengan simbol :

S –o-> f(s)

Definisi fungsi secara simbolis adalah :

f : S –o-> T jhj (∀ s ∈ S) (∃ t ∈ T), f(s) = t.

Himpunan anggota-anggota dari T yang mempunyai kawan disajikan dengan f(S) dan disebut daerah hasil (range) dari pemetaan f.

Pada contoh di atas daerah hasil dari f adalah { 2,3,5 }.