BAB III
BENTUK LATTICE

3.1. ORDE PARSIAL DAN SIFAT-SIFAT KHUSUS

DEFINISI 3.1.1

Misal S = {a,b,c,...}. *Suatu relasi orde parsial* O *pada* S *adalah suatu relasi dyadic pada* S *yang memenuhi*

1. *Refleksif yaitu* aOa, *untuk setiap* a ∈S
2. *Anti Simetri, yaitu jika* aOb *dan* bOa, *maka* a=b
3. *Transitif yaitu jika* aOb *dan* bOc, *maka* aOc

Selanjutnya relasi orde parsial O dalam S dinyatakan dengan "a ≤b" yang dibaca a **mendahului** b

DEFINISI 3.1.2

Himpunan S *yang memenuhi relasi orde parsial* O *dinamakan* **Himpunan terorde parsial**.

DEFINISI 3.1.3

Misalnya S = {a,b,c,...} *adalah himpunan terorde parsial, jika* a<b *dan tidak ada elemen* x ∈ S *dimana* a<x<b, *maka dikatakan bahwa* b **cover** a.

Himpunan terorde parsial digambarkan dengan sebuah diagram sebagai berikut. Elemen-elemen digambarkan dengan titik, jika b cover a maka titik yang mewakili a dihubungkan dengan titik yang mewakili b dengan sebuah garis yang naik.

Contoh 3.1.1.

Misal S adalah himpunan bilangan alam, dan relasi orde O, $a \leq b$, didefinisikan sebagai a **membagi habis** b dengan notasi a/b yang artinya ada c sedemikian hingga $a \times c = b$.

Maka S adalah himpunan terorde parsial yaitu relasi orde O yang memenuhi :

1. Refleksif

   Ambil $a \in S$

   Sehingga jelas a membagi a atau a/a sebab dari definisi berlaku $a \leq a \Rightarrow (\exists c \in S)\ a \times c = a$ yaitu a/a berarti ada $c=1 \in S$ karena $a \times 1 = a$ dan $c = a/a = 1$

   Syarat refleksif dipenuhi.

2. Anti Simetri

   ambil $a,b \in S$

   Andaikan berlaku $a \leq b$ dan $b \leq a$

   akan dibuktikan bahwa $a=b$, yaitu :

   $a \leq b \Rightarrow (\exists c \in S)\ a x c = b$

   $b \leq a \Rightarrow (\exists d \in S)\ b x d = a$

   berarti $c = \frac{b}{a}$; $c = \frac{b}{b.d} = \frac{1}{d}$, bertentangan dengan pernyataan bahwa $c = \frac{1}{d} \in S$ sehingga haruslah $d=1$ sebab jika $d \neq 1$, maka $\frac{1}{d} \notin S$

   Dengan demikian $c=1$ dan $d=1$

   jadi $a \leq b \Rightarrow (\exists c=1 \in S)\ a \times 1 = b$, $a = b$

$b \le a \Rightarrow (\exists a=1 \in S)\ b \times 1 = a,\ a = b$

Sehingga berlaku $a \le b$, dan $b \le a \Rightarrow a = b$

Syarat Anti simetri dipenuhi

3. Transitif

Ambil $a,b,c \in S$

Andaikan berlaku $a \le b$ dan $b \le c$

akan dibuktikan bahwa $a \le c$ yaitu :

$a \le b \Rightarrow (\exists n \in S)\ a \times n = b$

$b \le c \Rightarrow (\exists m \in S)\ b \times m = c$

dari persamaan

$a \times n = b$

$(a \times n) \times m = b \times m$

$a \times (n \times m) = c$ (karena $n \in S$ dan $m \in S$ maka $n \times m \in S$)

$a \times z = c$ (Misalnya $z = n \times m \in S$)

berarti $(\exists z \in S)\ a \times z = c \Rightarrow a \le c$

jadi berlaku $a \le b$ dan $b \le c \Rightarrow a \le c$

Syarat Transitif dipenuhi

Contoh 3.1.2.

Misal S adalah sebuah keluarga himpunan, dan relasi orde O, $A \le B$, didefinisikan sebagai A **himpunan bagian** dari B dengan notasi "$A \subset B$".

Maka S adalah himpunan terorde parsial yaitu relasi orde O yang memenuhi :

1. Refleksif

Ambil $A \in S$

Sehingga jelas $A \le A$, sebab $A \subset A$ yaitu A subset dari dirinya sendiri

Syarat Refleksif dipenuhi

2. Anti simetri

Ambil $A,B \in S$

Andaikan berlaku $A \leq B$ dan $B \leq A$

akan dibuktikan bahwa $A=B$ yaitu :

$A \leq B \Rightarrow A \subset B$

$B \leq A \Rightarrow B \subset A$

Mengingat bahwa dua himpunan A dan B dikatakan sama

$A=b \Leftrightarrow A \subset B$ dan $B \subset A$

Jadi berlaku $A \leq B$, dan $B \leq A \Rightarrow A=B$

Syarat Anti Simetri dipenuhi

3. Transitif

Ambil $A,B,C \in S$

Andaikan berlaku $A \leq B$ dan $B \leq C$

akan dibuktikan bahwa $A \leq C$ yaitu :

$A \leq B \Rightarrow A \subset B$

$B \leq C \Rightarrow B \subset C$

Mengingat untuk $A \subset B \subset \Rightarrow A \subset B$

Jadi berlaku $A \leq B$ dan $B \leq C \Rightarrow A \leq C$

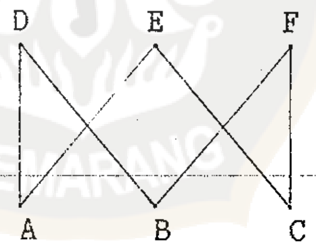
Syarat Transitif dipenuhi

DEFINISI 3.1.4

Jika S,T *adalah dua himpunan terorde parsial,dan* S $\sim$ T *korespondensi satu-satu antara elemen-elemen* S *dan* T. *Misal* $s_1,s_2 \in S$ *berkorespondensi dengan* $t_1,t_2 \in T$, *yaitu* $s_1 \sim t_1$, $s_2 \sim t_2$. *Korespondensi dikatakan Isomorphism jika* *memenuhi* $s_1 \leq s_2 \in S$ bhb $t_1 \leq t_2 \in T$, *selanjutnya* S *dan* T *dikatakan saling isomorphic ditulis dengan* $S \overset{\circ}{\sim} T$.

Contoh 3.1.4.

Jika T = {2,3,5,6,10,15} dimana relasi orde O, $t_1 \leq t_2$ didefinisikan sebagai t_1 **membagi habis** t_2 dengan notasi t_1/t_2 dan S adalah keluarga himpunan dari {A,B,C,D,E,F} yaitu A={a}, B={b} C={c}, D={a,b}, E={a,c}, F={b,c} dimana relasi orde O $s_1 \leq s_2$ didefinisikan sebagai s_1 **himpunan bagian** s_2 seeperti pada gb. 1 maka terdapatlah korespondensi satu-satu dari S ke T yaitu A ~ 2, B ~ 3, C ~ 5, D ~ 6, E ~ 10, F ~ 15 dan $S \overset{\circ}{\sim} T$ sebab dipenuhi $s_1 \leq s_2 \in S \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 \in T$.

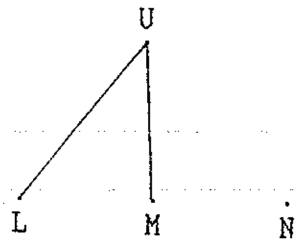


gb. 1

Contoh 3.1.5.

Jika T = {2,3,5,6} dimana relasi orde O, $t_1 \leq t_2$ didefinisikan sebagai t_1 **membagi habis** t_2 dengan notasi t_1/t_2 dan S adalah keluarga himpunan {U,L,M,N} yaitu U ={a,b,c}, L = {a}, M = {b}, N = {c} dimana relasi orde O, $s_1 \leq s_2$ didefinisikan sebagai s_1 **himpunan bagian** s_2 dengan notasi $s_1 \subset s_2$ seperi ditunukkan pada gb. 2, maka korespondensi sbb :

L ~ 2, M ~ 3, N ~ 5, U ~ 6 ternyata S tidak Isomorphic dengan T sebab N ≤ U ternyata 5 tidak membagi habis 6.



gb. 2

Selanjutnya dari himpunan terorde parsial dapat didefinisikan suatu elemen yang mempunyai sifat-sifat khusus sbb :

DEFINISI 3.1.5

Misalnya T *merupakan himpunan bagian dari suatu himpunan terorde parsial* S.

1. a. *Jika* $a \in T$ *sedemikian hingga* $a < t$ *untuk semua* $t \in T$, *maka* a *disebut* **elemen terkecil** *dari* T.

   Jika T=S *elemen terkecil disebut* **elemen nol** *atau* 0

   b. *Jika* $a \in T$ *sedemikian hingga* $a > t$ *untuk semua* $t \in T$, *maka* a *disebut* **elemen terbesar** *dari* T.

   Jika T=S *elemen terbesar disebut* **elemen unit** *atau* U.

2. a. *Jika* $a \in T$ *dan tak ada elemen* $t \in T$ *sedemikian hingga* $t < a$ *maka* a *disebut* **elemen minimal** *dari* T. *Elemen minimal tak perlu tunggal.*

   b. *Jika* $a \in T$ *dan tak ada elemen* $t \in T$ *sedemikian hingga* $t > a$, *maka* a *disebut* **elemen maximal** *dari* T.

Elemen maximal tak perlu tunggal.

3. a. *Jika* b $\in$ S *sedemikian hingga* b $<$ t, *untuk setiap* t $\in$ T, *maka* b *disebut* **batas bawah** *dari* T. *Batas bawah tak selalu dalam* T.

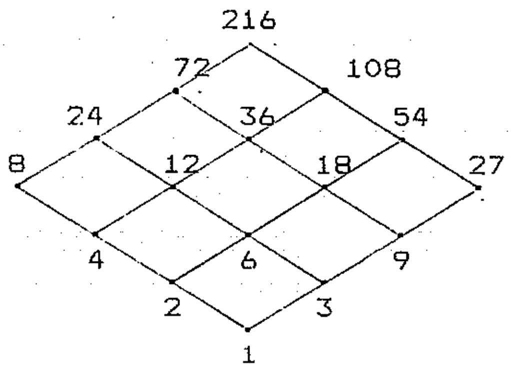
   b. *Jika* b $\in$ S *sedemikian hingga* b $>$ t, *untuk setiap* t $\in$ T, *maka* b *disebut* **batas atas** *dari* T. *Batas atas tak selalu dalam* T.

4. a. *Jika* g *adalah batas bawah dari* T *sedemikian hingga* b $<$ g, *untuk setiap batas bawah* b *dari* T, *maka* g *disebut* **batas bawah terbesar** *dari* T.

   b. *Jika* g *adalah batas atas dari* T *sedemikian hingga* b $>$ g, *untuk setiap batas atas* b *dari* T, *maka* g *disebut* **batas atas terkecil** *dari* T.

Contoh 3.1.6.

Misalnya S = {1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,27,36,54,72,108, 216} yang relasi ordenya seperti ditunjukkan pada gb. 3 dibawah ini.



gb. 3

1. Untuk T = {2,6,12,18,36,108} maka elemen terkecil 2 dan

elemen terbesar 108.

2. Jika T = S, maka elemen nol atau O=1 dan elemen unit atau U = 216.
3. Untuk T = {4,6,8,9,12,18,24,27,36,54}, maka elemen minimal adalah 4,6,9 dan elemen maksimal adalah 24,36,54.
4. Untuk T = {2,3,6,12,18,36,72,108}, maka batas bawah adalah 1,2,3,6 dan batas atas adalah 36,72,108,216. Sedangkan 6 adalah batas bawah terbesar atau elemen terbesar dari himpunan batas bawah dan 36 adalah batas terkecil atau elemen terkecil dari himpunan batas atas.

3.2. DUALITAS

DEFINISI 3.2.1

Relasi kebalikan (konversi) dari suatu relasi dyadic O *adalah suatu relasi dyadic* O′ *yang didefinisikan sebagai berikut :*

aO′b bhb bOa *atau* a≤b bhb b≤a.

Teorema 3.2.1

Jika himpunan s terorde parsial oleh relasi O maka S terorde parsial oleh relasi kebalikan (Konversi) O′.

Bukti :

Diketahui S adalah himpunan terorde parsial oleh relasi O sehingga untuk membuktikan S terorde parsial oleh relasi konversi O′ haruslah relasi konversi O′ tersebut memenuhi syarat-syarat pada *Definisi 3.1.1.*

1. Refleksif

Karena $a \leq a$ untuk setiap $a \in S$, maka relasi konversinya $a \geq a$

Syarat refleksif terpenuhi.

2. Anti Simetri

Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$, untuk setiap $a, b \in S$

Sehingga $a \leq b$, relasi konversinya $a \geq b$

dan $b \geq a$, relasi konversinya $b \geq a$

Jadi jika $a \geq b$, dan $b \geq$ maka $a = b$, untuk setiap $a, b \in S$

Syarat Anti Simetri terpenuhi.

3. Transitif

Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$, untuk setiap $a, b, c \in S$

sehingga $a \leq b$, relasi konversinya $a \geq b$

dan $b \leq c$, relasi konversinya $b \geq c$

Jadi jika $a \geq b$ dan $b \geq c$ maka $a \geq c$, untuk setiap $a, b, c \in S$

Syarat Transitif terpenuhi

Karena semua syarat telah terpenuhi, maka terbukti bahwa S adalah himpunan terorde parsial oleh relasi konversi O′.

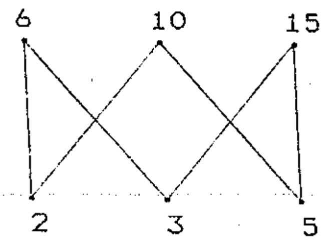
DEFINISI 3.2.2

Suatu himpunan S *terorde parsial oleh relasi* O′ *disebut* **Dual** *dari* S *terorde parsial oleh relasi* O.

Contoh 3.2.1.

Misal $T = \{2,3,5,6,10,15\}$ seperti ditunjukkan pada gb. 4 dengan relasi orde O, $a \leq b$, didefinisikan sebagai a **membagi habis** b yaitu $2 \leq 10$, $3 \leq 6$, $3 \leq 15$, $5 \leq 10$, $5 \leq 15$ maka relasi kebalikan (konversi) $b \geq a$ adalah $6 \geq 2$, $10 \geq 2$, $6 \geq 3$, $15 \geq 3$, $10 \geq 5$, $15 \geq 5$ artinya b

kelipatan a yang merupakan dual dari relasi orde O, a≤b.



gb. 4

Contoh 3.2.2.

Jika dual dinyatakan dari S ke S'dan S'merupakan isomorphic dengan sebuah himpunan T, maka dapat dikatakan S,T merupakan dual isomorphic.

Misalnya S adalah U={a,b,c}, L={a}, M={b}, N={c} dimana relasi orde A≤B dinyatakan dengan A⊂B, yaitu L≤U, M≤U, N≤U maka relasi konversi b≥a adalah U≥L, U≥M, U≥N yang merupakan Dual S' dan S dan karena S' isomorphic dengan T maka terdapatlah korespondensi satu-satu dari S' ke T yaitu U ∼ 30, L ∼ 2, M ∼ 3, N ∼ 5 atau $S' \overset{o}{\sim} T_{\sim}$ sebab dipenuhi $S_2 \geq S_1 \in S' \Leftrightarrow t_1 \geq t_2 \in T$ yaitu 30 ≥ 2, 30 ≥ 3, 30 ≥ 5.Dengan demikian S,T merupakan Dual isomorphic.

3.3. CHAIN

DEFINISI 3.3.1

Jika untuk setiap pasangan a,b *dari himpunan terorde parsial* K *yang memenuhi* a≤b *atau* b≤a *maka himpunan* K *dinamakan* **terorde total** *dan disebut* **Chain**.

Berdasarkan relasi *Anti simetri* jika a≤b dan b≤a , maka a=b , dengan demikian dapat dijelaskan suatu Chain merupakan sebuah himpunan terorde parsial yang dipenuhi untuk setiap pasangan elemen a , b akan didapatkan a<b atau b<a selanjutnya sebarang himpunan bagian dari suatu Chain merupakan Chain.

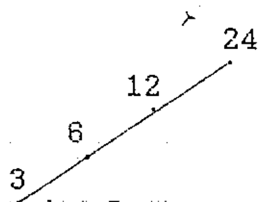
Contoh 3.3.1.

Misalnya O adalah orde parsial dalam T={1,2,3,4,5,6} yang didefinisikan sebagai a **membagi habis** b. Maka O bukanlah sebuah orde total dalam T karena 3 dan 5 tidak dapat dibandingkan.

Contoh 3.3.2.

Misal $\{A_i\}_{i\in N}$, N bilangan asli, adalah keluarga himpunanyang terorde total dari himpunan-hinpunan terorde total yang terputus secara sepasang-sepasang. Maka gabungan $\cup_{i\in N} A_i$ terorde total (kecuali dinyatakan orde yang lain) sebagai berikut : Misal a,b $\in \cup_{i\in N} A_i$, maka terdapat j,k $\in$ N sedemikian hingga a $\in A_j$, b $\in A_k$. Kemudian jika j<k , maka a≤b , dan jika j=k , maka a dan b diorde menurut pengordean (ordering) A_j.

Misal S = {{3,6},{6,12},{12,24}} diorde total dengan a≤b didefinisikan sebagai a **membagi habis** b seperti ditunjukan pada gb. 5.



gb. 5

Ambil A_1, A_2, $A_3 \in S$

$A_1 = \{3,6\}$; $A_2 = \{6,12\}$; $A_3 = \{12,24\}$

Akan ditunjukan bahwa gabungan $\cup_{i\in N} A_i$ terorde total, yaitu

Misal $a=3 \in A_1$; $b=12 \in A_2$ & A_3

Maka $a\cup b = 3\cup 12 = \{3,12\}$, untuk $j=1 < k=2$ dan

$a\cup b = 3\cup 12 = \{3,12\}$, untuk $j=1 < k=3$

Tetap terorde total dengan relasi orde $a\leq b$, jadi gabungan $\cup_{i\in N} A_i$ terorde total atau Chain.

Suatu chain terbatas dari n elemen mempunyai satu anggota yang terkecil dan satu anggota yang terbesar dan merupakan isomorphic dengan urutan bilangan asli (1,2,3,...,n)

Karena jika chain terdiri dari n elemen tertentu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (yang diambil dalam beberapa urutan secara acak).

Misalnya : $y_1 = x_1$

$y_1 = \min (y_0, x_1)$

$y_2 = \min (y_0, x_1)$

$\vdots$

$y_k = \min (y_{k-1}, y_k)$

dimana min menunjukan relasi orde dari chain yang ada maka didapat

$$yn \leq y_{n-1} \leq \ldots \leq y_{k-1} \leq y_k \leq x_k \text{ , untuk } k = 1,2,3,\ldots,n$$

y_n : elemen terkecil dari chain

Contoh 3.3.3.

Misalnya 4,32,8,64,16,128,2 merupakan bilangan-bilangan dari chain dengan 7 elemen, yang akan diurutkan dengan relasi orde a≤b yang berarti b kelipatan dari a. Karena bilangan-bilangan itu merupakan kelipatan 2 dari setiap pasangan satu persatu adalah kelipatan dari yang lain, yaitu :

$y_0 = x_1 = 4$

$y_1 = \min (y_0,x_1) = \min (4,4) = 4$

$y_2 = \min (y_1,x_2) = \min (4,32) = 32$

$y_3 = \min (y_2,x_3) = \min (32,8) = 32$

$y_4 = \min (y_3,x_4) = \min (32,64) = 64$

$y_5 = \min (y_4,x_5) = \min (64,16) = 64$

$y_6 = \min (y_5,x_6) = \min (64,128) = 128$

$y_7 = \min (y_6,x_7) = \min (128,2) = 128 = z_1$

Dengan menghilangkan 128 dari himpunan itu akan didapat z_2 = 64, kemudian dengan menghilangkan 128 dan 64 akan didapat z_3 = 32, dengan cara yang sama maka diperoleh susunan elemen-elemen dari chain dalam urutan yang naik (naik dalam arti memperhatikan relasi ordenya).

128,64,32,16,8,4,2.

Isomorphic dengan bilangan asli

1,2,3,4,5,6,7

128 adalah elemen terkecil/elemen nol dan 2 adalah elemen terbesar/elemen unit.

3.4. MEET DAN JOIN

DEFINISI 3.4.1

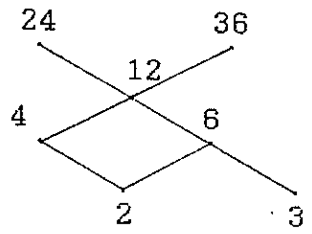
Misal A *adalah sebarang himpunan bagian dan himpunan terorde parsial* S.

1. *Jika ada elemen* x *dalam* S *sedemikian hingga* $x < a$ *untuk setiap* a *dalam* A, *maka* x *dinamakan batas bawah dari* A. *Misalnya* X *adalah himpunan batas bawah dari* A *dalam* S. *Jika* X *tidak kosong dan mempunyai anggota terbesar* b *sedemikian hingga* $x < b$ *untuk semua* x *dalam* X, *maka* b *dinamakan batas bawah terbesar dari* A *dan dinyatakan dengan* b = *inf* A *atau* **Meet** *dari* A *dan dinyatakan dengan* $b = \bigwedge_{a \in A} a$

2. *Jika ada elemen* x *dalam* S *sedemikian hingga* $x > a$ *untuk setiap* a *dalam* A, *maka* x *dinamakan batas atas dari* A. *Misalnya* X *adalah himpunan batas atas dari* A *dalam* S. *Jika* X *tidak kosong dan mempunyai anggota terkecil* c *sedemikian hingga* $x > c$ *untuk semua* x *dalam* X, *maka* c *dinamakan batas atas terkecil dari* A *dan dinyatakan dengan* c = *sup* A *atau* **Join** *dari* A *dan dinyatakan dengan* $c = \bigvee_{a \in A} a$

Contoh 3.4.1.

Misalnya S = {2,3,4,6,12,24,36} adalah himpunan terorde parsial yang diorde menurut diagram gb. 6.



gb. 6

Misalnya A = {4,6,12} maka 12,24, dan 36 adalah batas atas dari A dan 2 adalah satu-satunya batas bawah dari A. Sedangkan 3 bukan batas bawah dari B karena 3 tidak mendahului 4,3 dan 4 tidak dapat dibandingkan. Selanjutnya 12 = sup A atau Join dari A, sedangkan 2 = inf A atau **Meet** dari A yang bukan merupakan elemen dari A.

3.5. LATTICE

Lattice didefinisikan dalam dua cara yang berbeda yaitu, secara aljabar dan teori himpunan.

I. Secara Aljabar

DEFINISI 3.5.1

Lattice L *adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner dengan simbol* ($\wedge, \vee$) *yang memenuhi aksioma-aksioma sbb :*

Untuk setiap $a,b,c \in L$ *berlaku*

A. Terhadap cap ($\wedge$)

1. Untuk setiap pasangan berurutan (a,b) *terdapat elemen tunggal sedemikian hingga* $a \wedge b$ *dalam* L

2. $a \wedge b = b \wedge a$ *(Komutatip)*

3. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ *(Assosiatip)*

4. $a \wedge (a \vee b) = a$ *(Absorsi)*

B. Terhadap cup ($\vee$)

1. *Untuk setiap pasangan berurutan* (a,b) *terdapat elemen tunggal sedemikian hingga* $a \vee b$ *dalam* L

2. $a \vee b = b \vee a$ *(Komutatip)*

3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ *(Assosiatip)*

4. $a \vee (a \wedge b) = a$ *(Absorsi)*

Selanjutnya akan dibuktikan sejumlah teorema tentang Lattice, yang memberikan bukti secara detail untuk mempermudah deduksi dari aksioma-aksioma

TEOREMA 3.5.1

1. $a \wedge a = a$
2. $a \vee a = a$

Bukti :

1. $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b))$ *dg 4B*

$= a$ *dg 4A*

1. $a \vee a = a \vee (a \wedge a)$ *dg th pertama*

$= a$ *dg 4B*

TEOREMA 3.5.2

1. Jika $a \wedge b = a$, maka $a \vee b = b$
2. Jika $a \vee b = b$, maka $a \wedge b = a$

Bukti :

1. $a \vee a = (a \wedge b) \vee b$ *dg hipotesa*

$= b \vee (a \wedge b)$ *dg 2B*

$= b \vee (b \wedge a)$ *dg 2A*

$= b$ *dg 4B*

2. $a \wedge b = a \wedge (a \vee b)$ *dg hipotesa*

$= a$ *dg 4A*

DEFINISI 3.5.2

Relasi O *antara dua elemen dari Lattice* L *didefinisikan sebagai berikut :*

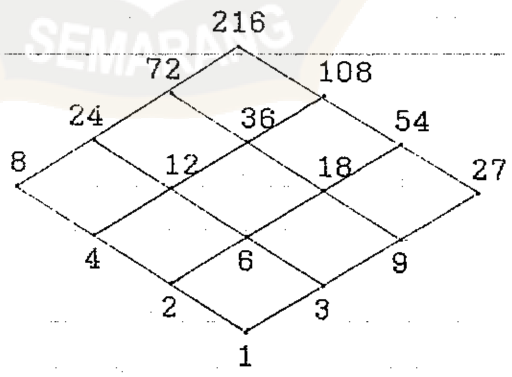
a O b bhb $a \wedge b = a$

a O b bhb $a \vee b = a$

Contoh 3.5.1.

Misalnya elemen dari Lattice L semua ada 16 faktor dari bilangan asli 216 yaitu : 1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36, 54,72,108,216.

Seperti yang ditunjukkan pada diagram gb. 7.



gb. 7

Himpunan ini mengandung Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) yang tunggal dari sebarang dua anggotanya.

Jika $a \wedge b$ dinyatakan sebagai FPB (a,b) dan $a \vee b$ dinyatakan KPK (a,b) maka menurut definisi 3.5.2.

$a \; O \; b \Leftrightarrow$ FPB $(a\ ,\ b) = a$ atau $a \leq b \Leftrightarrow$ FPB $(a,b) = a$

$a \; O \; b \Leftrightarrow$ KPK $(a\ ,\ b) = a$ atau $a \leq b \Leftrightarrow$ KPK $(a,b) = b$

Sehingga syarat pada *Definisi 3.5.1* harus dipenuhi

1. Syarat *A & B* cukup jelas dipenuhi
2. Syarat *A & B* cukup jelas dipenuhi
3. *A.* misal $3,18,72 \in L$

$* \; 3 \wedge (18 \wedge 72) \Rightarrow 3 \leq (18 \wedge 72)$

$3 \leq (18 \wedge 72) \Rightarrow$ FPB $(3,\ 18 \wedge 72)= 3$

$* \; (3 \wedge 18) \wedge 72 \Rightarrow (3 \wedge 18) \leq 72$

$(3 \wedge 18) \leq 72 \Rightarrow$ FPB $(3 \wedge 18,\ 72)= 3 \wedge 18$

Untuk $3 \wedge 18 \Rightarrow 3\leq18$, maka $3\leq18 \Rightarrow$ FPB $(3,18) = 3$

B. misalnya $3,18,72 \in L$

$* \; 3 \vee (18 \vee 72) \Rightarrow 3 \leq (18 \vee 72)$

$3 \leq (18 \leq 72) \Rightarrow$ KPK $(3,18 \vee 72) = 18 \vee 72$

Untuk $18 \wedge 72 \Rightarrow 18 \leq 72$, maka $18\leq72 \Rightarrow$ KPK $(18,72)= 72$

$* \; (3 \vee 18) \vee 72 \Rightarrow (3 \vee 18) \leq 72$

$(3 \vee 18) \leq 72 \Rightarrow$ KPK $(3 \vee 18,\ 72)= 72$

Jadi syarat *3A & B* dipenuhi.

4. *A.* misalnya $3,18 \in L$

$3 \wedge (3 \vee 18) \Rightarrow 3 \leq (3 \vee 18)$

$3 \leq (3 \vee 18) \Rightarrow$ FPB $(3,3 \vee 18) = 3$

B. misalnya $3,18 \in L$

$3 \vee (3 \wedge 18) \Rightarrow 3 \leq (3 \wedge 18)$

$3 \leq (3 \wedge 18) \Rightarrow$ KPK $(3,3 \wedge 18) = 3 \wedge 18$

Untuk $3 \wedge 18 \Rightarrow 3 \leq 18$, maka $3 \leq 18 \Rightarrow$ FPB $(3,18) = 3$

Jadi syarat *4A & B* dipenuhi

Karena semua syarat pada *Definisi 3.5.1* dipenuhi maka diagram gb. 7 adalah Lattice

II. Secara Teori Himpunan

DEFINISI 3.5.3

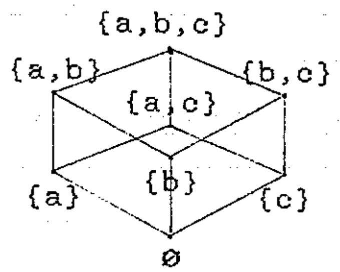
Suatu Lattice merupakan himpunan terorde parsial yang setiap pasangan elemen a,b *dalam* L *mempunyai batas bawah terbesar atau Meet yang dinotasikan dengan* $a \wedge b$ *dan batas atas terkecil atau join yang dinotasikan dengan* $a \vee b$.

Contoh 3.5.2.

Misal S adalah himpunan bilangan alam yangmerupakan himpunan terorde parsial dengan relasi orde O , a≤b yang didefinisikan sebagai a **membagi habis** b, kemudian didalam pasangan elemennya mempunyai harga Meet dan Join maka himpunan S merupakan Lattice.

Contoh 3.5.3.

Misal S = {∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c}, {a,b,c}} adalah keluarga himpunan yang merupakan himpunan terorde parsial dengan relasi O yang dinyatakan dengan A≤B artinya A subset B, seperti ditunjukkan pada diagram gb. 8.



gb. 8

Kemudian karena didalam himpunan ini pasangan elemennya mempunyai harga Meet dan Join maka keluarga himpunan tersebut adalah Lattice.