

BAB II

HIMPUNAN DAN RELASI

2.1. HIMPUNAN

DEFINISI 2.1.1

Suatu himpunan adalah kumpulan obyek-obyek yang berada dalam satu kesatuan dan yang mempunyai sifat keterikatan diantara anggota-anggotanya.

Himpunan biasanya dituliskan dengan huruf besar A,B,C dan seterusnya. Anggota himpunan A disebut elemen A. Jika x elemen A maka ditulis $x \in A$, dan jika x bukan elemen A maka ditulis $x \notin A$. Dalam menyebutkan satu persatu anggota himpunan dapat dipilih salah satu dengan menyebutkan satu persatu, atau dengan memberikan sebuah batasan yang dimiliki. Tanda kurung kurawal dipakai untuk menunjukkan suatu himpunan, dan tanda garis miring dalam tanda kurung kurawal adalah kependekan untuk istilah seperti/semacam itu.

Contoh 2.1.1

A adalah himpunan bilangan bulat yang elemen-elemennya 5,6,7,8 dan terbatas dengan empat elemen.

Dapat ditulis dengan $A = \{5,6,7,8\}$.

Perhatikan bahwa $5 \in A$ dan $9 \notin A$ adalah kedua-duanya benar

dimana \in dibaca sebuah elemen dari dan \notin dibaca bukan sebuah elemen dari.

Contoh 2.1.2

Jika A adalah himpunan bilangan riil antara 0 dan 1 maka A dapat ditulis dengan sebuah batasan tertentu sebagai berikut $A = \{x | 0 < x < 1, x \in R\}$ dimana $R =$ bilangan riil.

Himpunan universal/umum adalah himpunan semua obyek, dan biasanya ditulis dengan U atau S . Himpunan khusus lainnya adalah himpunan kosong yaitu himpunan yang tidak mempunyai anggota atau elemen, dan biasanya ditulis dengan \emptyset atau $\{\}$.

Contoh 2.1.3

Jika $A = \{x | x^2 = -1, x \in R\}$ dimana $R =$ bilangan riil maka A adalah himpunan kosong atau $A = \emptyset$ karena himpunan tersebut tidak mempunyai anggota bilangan riil yang dimiliki batasan tertentu $x^2 = -1$.

Sebaliknya jika $A = \{x | x^2 = -1, x \in C\}$ dimana $C =$ bilangan kompleks maka A adalah himpunan yang mempunyai anggota atau $A \neq \emptyset$ karena himpunan tersebut memuat bilangan kompleks yaitu $A = \{(0,1)\}$ atau i sehingga $x^2 = i^2 = -1$.

Untuk semua R dan C merupakan himpunan universal / umum.

Keterangan :

Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut bilangan

riil yang dinyatakan oleh (a, b) atau $a + bi$.

DEFINISI 2.1.2

Himpunan A dikatakan menjadi himpunan bagian dari B dengan tanda $A \subset B$, bila dan hanya bila setiap anggota dari A menjadi anggota dari B .

$A \subset B$ bhb $(\forall x). x \in A \Rightarrow x \in B$.

DEFINISI 2.1.3

Dua himpunan A dan B di sebut sama atau berimpitan bila dan hanya bila setiap anggota dari A menjadi anggota dari B dan sebaliknya.

$A = B$ bhb $(\forall x). x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Sebagai akibat langsung dapat ditunjukkan bahwa :

1. Untuk setiap himpunan A , $\emptyset \subset A$.
2. Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$, maka $A \subset C$

Contoh 2.1.4

Misal $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 1, 2\}$, maka kedua himpunan tersebut mempunyai anggota yang sama ($A = B$), dimana urutan daftar elemen tidak diperhatikan.

Contoh 2.1.5

Misalkan $A = \{x | x = \text{bilangan prima genap}, x \in \mathbb{R}\}$ dan $B = \{x | x + 3 = 5, x \in \mathbb{R}\}$, maka kedua himpunan tersebut mempunyai anggota yang sama ($A = B$) yaitu $\{2\}$.

Selanjutnya dapat diperhatikan definisi, dari

beberapa operasi himpunan, misalkan A dan B merupakan subset dari himpunan universal U.

DEFINISI 2.1.4

1. Komplemen dari A (yang berada dalam U) adalah himpunan yang melengkapi elemen U yang bukan anggota A.

2. Interseksi / irisan A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya berada dalam A dan B, dinotasikan dengan $A \cap B$ atau

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \& \ x \in B, x \in U\}$$

3. Union / gabungan dari A dan B adalah himpunan yang elemen-elemennya berada dalam A atau B, dinotasikan dengan $A \cup B$ atau

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \vee \ x \in B, x \in U\}$$

Contoh 2.1.6

Misal U himpunan semua huruf abjad, yaitu $U = \{x | x = \text{adalah huruf abjad}\}$, $A = \{x | x = \text{huruf hidup}\}$ dan $B = \{x | x = \text{huruf a,b,c}\}$ maka

$A^c =$ himpunan semua huruf mati

$B^c = \{d,e,f,g,\dots,x,y,z\}$

$A \cup B = \{a,b,c,e,i,o,u\}$

$A \cap B = \{a\}$

Contoh 2.1.7

Jika himpunan universal didefinisikan sebagai $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan tiga himpunan bagian $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,3,5,7\}$ maka

$$A^c = \{4,5,6,7\} B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$B^c = \{1,3,5,7\} A \cap B = \{2\}$$

$$C^c = \{2,4,6\} A \cap C = \{1,3\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6\} B \cap C = \emptyset$$

$$A \cup C = \{1,2,3,5,7\}$$

Sering kali banyaknya elemen-elemen dalam suatu himpunan A mempunyai beberapa kepentingan, dan dinotasikan dengan $n(A)$, jika banyaknya elemen-elemen dalam himpunan tersebut berhingga maka himpunannya disebut Himpunan berhingga. Jika banyaknya elemen-elemen dalam himpunan tersebut menjadi tidak berhingga seperti elemen-elemen yang dapat disusun kedalam suatu hubungan itu satu-satu dengan bilangan asli, maka himpunan itu disebut Himpunan tidak berhingga yang tidak dapat dihitung.

Contoh 2.1.8

A adalah himpunan bilangan bulat antara 4 dan 9 yaitu $A = \{x | 4 < x < 9, x \in \mathbb{Z}\}$ dimana \mathbb{Z} = bilangan bulat sehingga $A = \{5,6,7,8\}$.

Jadi A merupakan himpunan berhingga karena banyaknya elemen-elemen dapat dihitung atau $n(A) = 4$.

Contoh 2.1.9

A adalah himpunan bilangan riil antara 0 dan 1 yaitu $A = \{x | 0 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ dimana \mathbb{R} = bilangan riil sehingga A merupakan himpunan tidak berhingga karena banyaknya

elemen-elemen dalam himpunan tersebut menjadi tidak berhingga atau $n(A) = \infty$.

Sebagai akibat dari *Definisi 2.1.2*, *Definisi 2.1.3* dan *Definisi 2.1.4* dapat dinyatakan sbb :

- $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$

Selanjutnya jika himpunan A dan B tidak mempunyai elemen-elemen yang dimiliki bersama, maka himpunan A dan B disebut saling asing, sehingga $A \cap B = \emptyset$.

Dengan demikian bahwa mengenai konsep interseksi maupun union dapat pula diterapkan pada tiga himpunan atau lebih. Jika diketahui himpunan R, S, T maka berlaku :

1. $S \cap (S \cup T) = S$
2. $S \cup (S \cap T) = S$
3. $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$
4. $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$

2.2. BILANGAN ALAM

Apabila anggota dari dua himpunan S, T dapat berpasangan dalam korespondensi satu-satu yaitu setiap anggota dari S berkorespondensi tepat dengan satu anggota dari T dan setiap anggota dari T juga tepat berkorespondensi dengan satu anggota dari S, maka

dikatakan bahwa S dan T adalah ekuivalen yang ditulis

dengan $S \sim T$.

Jika himpunan S ekuivalen dengan subset sejati dari dirinya sendiri, maka S disebut Infinite. Sebaliknya jika himpunan S tidak ekuivalen dengan subset sejati dari dirinya sendiri, maka S disebut Finite.

Himpunan infinite yang pokok dalam matematika adalah bilangan alam yaitu $1, 2, 3, \dots$ dst.

Dengan demikian sebarang himpunan yang ekuivalen dengan himpunan bilangan alam akan dikatakan himpunan yang dapat dihitung, kemudian ciri-ciri pokok dari bilangan alam adalah bahwa ada anggota-anggota pertama yang diikuti dengan suatu urutan dari anggota-anggota yang dapat dilanjutkan dan setiap anggota yang dimiliki dari urutannya adalah tunggal.

Selanjutnya dalam bilangan alam ini berlaku operasi-operasi Adisi, misalnya jika a, b, c adalah bilangan alam sedemikian hingga $a + c = b$, maka dikatakan bahwa "a lebih kecil dari b" atau b lebih besar dari a ditulis " $a < b$ " atau " $b > a$ " (c beda dari b dan a , ditulis $c = b - a$). Jika a, b sebarang bilangan alam, hanya berlaku salah satu dari relasi-relasi :

1. $a < b$
2. $a = b$
3. $a > b$

Jika yang pertama atau yang kedua bersamaan (mempunyai dua arti relasi) ditulis " $a \leq b$ ", sedangkan jika yang kedua atau yang ketiga bersamaan ditulis " $a \geq b$ ".

Dengan demikian dapat ditentukan :

$$\min (a,b) = a \quad , \quad a \leq b$$

$$\min (a,b) = b \quad , \quad a > b$$

$$\max (a,b) = a \quad , \quad a \geq b$$

$$\max (a,b) = b \quad , \quad a < b$$

Sehingga dapat diperoleh hasil-hasil yang dibuat untuk bilangan alam a, b, c sbb :

$$4. \min [a, \max (a,b)] = a$$

$$5. \max [a, \min (a,b)] = a$$

$$6. \min [a, \max (b,c)] = \max [\min (a,b), \min (a,c)]$$

$$7. \max [a, \min (b,c)] = \min [\max (a,b), \max (a,c)]$$

Bukti :

4. jika $a < b$

$$\min [a, \max (a,b)] = \min (a,b) = a$$

sedangkan jika $a \geq b$

$$\min [a, \max (a,b)] = \min (a,a) = a$$

5. jika $a > b$

$$\max [a, \min (a,b)] = \max (a,b) = a$$

sedangkan jika $a \leq b$

$$\max [a, \min (a,b)] = \max (a,a) = a$$

6. jika $a > \max (b,c)$

$$\min [a, \max (b,c)] = \max (b,c) \text{ dan}$$

$$\max [\min (a,b), \min (a,c)] = \max (b,c)$$

$$\text{jika } \min (b,c) < a \leq \max (b,c)$$

$$\min [a, \max (b,c)] = a \text{ dan}$$

$$\max [\min (a,b), \min (a,c)] = \max [a, \min (b,c)] = a$$

$$\text{jika } a \leq \min (b,c) \leq \max (b,c)$$

$$\min [a, \max (b,c)] = a \text{ dan}$$

$$\max [\min (a,b), \min (a,c)] = \max (a,a) = a$$

Maka dari ketiga ketentuan diatas, terbukti

$$\min [a, \max (b,c)] = \max [\min (a,b), \min (a,c)]$$

7. Jika $a < \min (b,c)$

$$\max [a, \min (b,c)] = \min (b,c) \text{ dan}$$

$$\min [\max (a,b), \max (a,c)] = \min (b,c)$$

$$\text{Jika } \max (b,c) > a \geq \min (b,c)$$

$$\max [a, \min (b,c)] = a \text{ dan}$$

$$\min [\max (a,b), \max (a,c)] = \min [a, \max (b,c)] = a$$

$$\text{Jika } a \geq \max (b,c) \geq \min (b,c)$$

$$\max [a, \min (b,c)] = a \text{ dan}$$

$$\min [\max (a,b), \max (a,c)] = \min (a,a) = a$$

Maka dari ketiga ketentuan diatas, terbukti

$$\max [a, \min (b,c)] = \min [\max (a,b), \max (a,c)]$$

Kemudian untuk sebarang dua bilangan alam dapat direlasikan pada multiplikasi, misalnya jika a, b, c adalah bilangan alam sedemikian hingga $a \times c = b$ dikatakan bahwa "a dan c adalah faktor-faktor dari b", "b adalah hasil kali dari a dan c" atau "a dan c membagi habis b" dan ditulis $a/b, c/b$.

Jika suatu bilangan lebih besar dari satu, hanya mempunyai satu faktor atau dirinya sendiri, maka bilangan tersebut dikatakan suatu "prime", sedangkan bilangan mempunyai faktor lebih dari 2 faktor maka bilangan tersebut dikatakan suatu "komposit". Dengan demikian bahwa untuk sebarang bilangan alam lebih besar dari satu ($0 > 1$)

adalah hasil kali dari himpunan kuasa faktor-faktor prime yang berlainan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_s$ atau

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_s^{\alpha_s}$$

$$a = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$$

$s =$ tertentu dan α adalah bilangan alam sedangkan untuk $a = 1$, α adalah 0 atau $a = p^0$

Contoh 2.2.1

$$\begin{aligned} 600 &= 8 \times 3 \times 25 \\ &= 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \end{aligned}$$

bilangan 2,3,5 adalah prime

bilangan 600,6,25 adalah komposit

Untuk sebarang bilangan alam a, b dapat dicari Fator Persekutuan Terbesar (FPB) dari a dan b yang dinotasikan $\varphi(a, b)$ dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari a dan b yang dinotasikan $\mu(a, b)$.

Misalkan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_t$ adalah bilangan prime t yang pertama, yang terdapat dalam barisan 1,2,3, ... dimana p_t adalah faktor prime terbesar yang dalam faktorisasi a dan b , selanjutnya jika

$$a = \prod_{j=1}^t p_j^{\alpha_j} \quad \text{dan} \quad b = \prod_{j=1}^t p_j^{\beta_j}$$

$$\text{maka } \varphi(a,b) = \prod_{j=1}^t p_j^{\min(\alpha_j, \beta_j)},$$

$$\mu(a,b) = \prod_{j=1}^t p_j^{\max(\alpha_j, \beta_j)}$$

dimana pangkat α_j, β_j boleh nol.

Contoh 2.2.2

$$a = 18 = 2 \times 3^2; \quad b = 600 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$\text{atau } a = 18 = 2^1 \times 3^2 \times 5^0; \quad b = 600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$$

$$\text{maka } \varphi(a,b) = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 6$$

$$\mu(a,b) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$$

jadi FPB dari 18 dan 600 adalah 6 dan

KPK dari 18 dan 600 adalah 1800

Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa himpunan lain yang berbentuk

$$8. \quad \varphi[a, \mu(a,b)] = a$$

$$9. \quad \mu[a, \varphi(a,b)] = a$$

$$10. \quad \varphi[a, \mu(b,c)] = \mu[\varphi(a,b), \varphi(a,c)]$$

$$11. \quad \mu[a, \varphi(b,c)] = \varphi[\mu(a,b), \mu(a,c)]$$

Bukti :

$$8. \quad \varphi[a, \mu(a,b)] = \prod_{j=1}^t p_j^{\min[\alpha_j, \max(\alpha_j, \beta_j)]}$$

$$= \prod_{j=1}^t p_j^{\alpha_j} = a \quad (\text{menurut 4})$$

$$9. \mu [a, \varphi (a,b)] = \prod_{j=1}^t p_j^{\max [\alpha_j, \min (\alpha_j, \beta_j)]}$$

$$= \prod_{j=1}^t p_j^{\alpha_j} = a \quad (\text{menurut 5})$$

10. Misal $p_1, p_2, p_3, \dots, p_t$ adalah bilangan prime t yang pertama, dimana p_t adalah prime terbesar yang terdapat dalam faktorisasi a, b dan c , misalkan a, b , dan c mempunyai bentuk-bentuk hasil kali sbb :

$$a = \prod_{j=1}^t p_j^{\alpha_j}, \quad b = \prod_{j=1}^t p_j^{\beta_j}, \quad c = \prod_{j=1}^t p_j^{\gamma_j}$$

$$\text{maka } \mu (b,c) = \prod_{j=1}^t p_j^{\max (\beta_j, \gamma_j)}$$

Sehingga :

$$\varphi [a, \mu(b,c)] = \prod_{j=1}^t p_j^{\min [\alpha_j, \max (\beta_j, \gamma_j)]} \quad \dots\dots(i)$$

dan

$$\varphi (a,b) = \prod_{j=1}^t p_j^{\min (\alpha_j, \beta_j)}$$

$$\varphi (a,c) = \prod_{j=1}^t p_j^{\min (\alpha_j, \gamma_j)}$$

maka

$$\mu [\varphi (a,b), \varphi (b,c)] = \pi \prod_{j=1}^t \max[\min(\alpha_j, \beta_j), \min(\alpha_j, \gamma_j)] \dots\dots\dots(ii)$$

Dan berdasarkan rumus (6) jenis pangkat-pangkat dalam pernyataan (i) dan (ii) adalah identik.

Jadi $\varphi [a, \mu (b,c)] = \mu [\varphi (a,b), \varphi (a,c)]$ terbukti.

11. Dengan cara yang sama seperti bukti 10 maka

$$\varphi (b,c) = \pi \prod_{j=1}^t \min (\beta_j, \gamma_j)$$

sehingga :

$$\mu [a, \varphi(b,c)] = \pi \prod_{j=1}^t \max [\alpha_j, \min (\beta_j, \gamma_j)] \dots\dots\dots(i)$$

dan

$$\mu (a,b) = \pi \prod_{j=1}^t \max (\alpha_j, \beta_j)$$

$$\mu (a,c) = \pi \prod_{j=1}^t \max (\alpha_j, \gamma_j)$$

maka

$$\varphi [\mu (a,b), \mu (b,c)] = \pi \prod_{j=1}^t \min[\max(\alpha_j, \beta_j), \max(\alpha_j, \gamma_j)] \dots\dots\dots(ii)$$

Dan berdasarkan rumus (7) jenis pangkat-pangkat dalam pernyataan (i) dan (ii) adalah identik.

Jadi $\mu [a, \varphi (b,c)] = \varphi [\mu (a,b), \mu (a,c)]$ terbukti.

Contoh 2.2.3

$$a = 40 = 2^3 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^0$$

$$b = 35 = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1$$

$$c = 42 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$$

maka dengan memakai rumus (10)

$$\varphi [a, \mu(b, c)] = \mu [\varphi(a, b), \varphi(a, c)]$$

$$\begin{aligned} \text{untuk } \varphi [a, \mu(b, c)] &= \varphi [40, \mu(35, 42)] \\ &= \varphi(40, 210) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } \mu [\varphi(a, b), \varphi(a, c)] &= \mu [\varphi(40, 35), \varphi(40, 42)] \\ &= \mu(5, 2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Kemudian dengan memakai rumus (11)

$$\mu [a, \varphi(b, c)] = \varphi [\mu(a, b), \mu(a, c)]$$

$$\begin{aligned} \text{untuk } \mu [a, \varphi(b, c)] &= \mu [40, \varphi(35, 42)] \\ &= \mu(40, 7) \\ &= 280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } \varphi [\mu(a, b), \mu(a, c)] &= \varphi [\mu(40, 35), \mu(40, 42)] \\ &= \varphi(280, 840) \\ &= 280 \end{aligned}$$

2.3. RELASI DAN HIMPUNAN

DEFINISI 2.3.1

Suatu barisan finite adalah himpunan yang terdiri atas n elemen yang ditempatkan dengan korespondensi satu-

satu dengan himpunan bilangan alam $\{1,2,3, \dots\}$, selanjutnya untuk barisan dengan dua elemen dinamakan Pasangan terurut.

Contoh 2.3.1

S adalah 5 bilangan dengan kelipatan dua pertama yaitu $S = \{2,4,6,8,10\}$, maka S adalah barisan yang terdiri atas 5 elemen sedangkan pasangan terurut S adalah $R = \{(a,b), a,b \in S\}$.

DEFINISI 2.3.2

Himpunan S dengan elemen-elemen a,b,c, \dots suatu relasi dyadic dalam S adalah suatu himpunan R dari pasangan terurut (a,b) dimana a,b dalam S. Selanjutnya pasangan terurut (a,b) dalam R ditulis aRb dan dikatakan a berelasi dengan b didalam relasi R, a disebut antesenden dari b, dan b konsekween dari a dalam relasi R. Jika setiap anggota dari S muncul sebagai antesenden maka R dikatakan berelasi terhadap S.

Contoh 2.3.2

Misalkan pasangan terurut dari bilangan alam $(1,2), (2,3), (3,4), \dots, (n,n+1), \dots$ sehingga relasi R dimana aRb yang berarti "a mendahului b" merupakan suatu relasi terhadap himpunan bilangan alam.

DEFINISI 2.3.3

Diberikan himpunan S dibentuk barisan $S_n =$

(x_1, x_2, x_3, \dots) yang terdiri atas n elemen-elemen S . Untuk n tertentu pada setiap barisan tersebut ditempatkan hanya satu elemen y dari S maka himpunan P dari pasangan terurut (S_n, y) dinamakan Operasi finitary dalam S . Selanjutnya untuk $n = 1, 2, 3$ P disebut Unary, Binary, Ternary dan umumnya untuk n , P disebut n ary.

Dengan demikian P merupakan operasi dyadic yaitu $S_n P y$ sebagai antesenden adalah suatu barisan S_n , dengan n elemen dan konsekwen adalah elemen tunggal.

Jika $n=1$, Operasi Unary adalah relasi dyadic antara elemen tunggal. Jika $n=2$, Operasi Binary adalah relasi dyadic antara pasangan terurut sebagai antesenden dan elemen tunggal sebagai konsekwen. Selanjutnya jika P operasi n ary maka relasi dyadic $S_n P y$ dapat dinotasikan dengan :

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = Y$$

Contoh 2.3.3

Misal S himpunan bilangan alam.

Untuk setiap bilangan a dengan menempatkan bilangan a' sebagai berikut :

Jika $a = 1$, maka $a' = 1$

$$\text{Jika } a = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} \text{ , maka } a' = \prod_{i=1}^s p_i$$

Jadi :

Jika $a = 5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2$

maka $a' = 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Sehingga $P(a, a')$ himpunan pasangan terurut

Operasi Unary dalam S adalah $P(5880, 210)$

DEFINISI 2.3.4

Jika dalam himpunan A suatu operasi n ary P didefinisikan untuk setiap barisan S_n dari n elemen-elemen himpunan A maka himpunan A dikatakan tertutup terhadap operasi P . Suatu himpunan tertutup terhadap satu atau lebih jenis operasi finitary disebut suatu Aljabar.

Sedangkan Sub Aljabar adalah suatu himpunan bagian dari aljabar A dengan operasi yang sama pada A .

Contoh 2.3.4

Misal $U = \{a, b, c, d\}$ dan A himpunan bagian dari U .

Himpunan tersebut dengan dua operasi biner Interseksi (\cap) dan Union (\cup) merupakan Aljabar dan Sub Aljabar.

Himpunan kuasa dari U .

Karena himpunan A dengan operasi yang sama pada U dipenuhi

yaitu :

$$\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$$

$$\emptyset \cap \{b\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{b\} = \{b\}$$

$$\emptyset \cap \{c\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{c\} = \{c\}$$

$$\emptyset \cap \{a, b\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{a, b\} = \{a, b\}$$

$$\emptyset \cap \{a, c\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{a, c\} = \{a, c\}$$

$$\emptyset \cap \{b, c\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{b, c\} = \{b, c\}$$

$$\emptyset \cap \{a, b, c\} = \emptyset \quad ; \quad \emptyset \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \quad ; \quad \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$$

$$\{a\} \cap \{c\} = \emptyset \quad ; \quad \{a\} \cup \{c\} = \{a, c\}$$

$$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset \quad ; \quad \{b\} \cup \{c\} = \{b, c\}$$

$$\{a, b\} \cap \{c\} = \emptyset \quad ; \quad \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset \quad ; \quad \{a, c\} \cup \{b\} = \{a, b, c\}$$

$$\{b, c\} \cap \{a\} = \emptyset \quad ; \quad \{b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}$$

$$\{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\} \quad ; \quad \{a\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{b\} \cap \{a, b, c\} = \{b\} \quad ; \quad \{b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{c\} \cap \{a, b, c\} = \{c\} \quad ; \quad \{c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\} \quad ; \quad \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{a, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\} \quad ; \quad \{a, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

$$\{b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{b, c\} \quad ; \quad \{b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

Maka himpunan A adalah Sub Aljabar dari himpunan U.

