BAB II

2.1. Persamaan Differensi Linier

Persamaan Differensi Linier yang akan dibahas pada bab ini dibatasi hanya pada persamaan differensi linier dengan koefisien konstan.

Misalnya ditentukan $y=f(x)$ suatu fungsi yang didefinisikan pada interval $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$ pada sumbu riil x.

Definisi 2.1.1

Differensi dari suatu fungsi $f(x)$ ditulis sebagai,

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

Notasi "Δ" disebut operator differensi, dengan h bilangan bulat positif. $\Delta f(x)$ disebut differensi pertama dari $f(x)$. Untuk n berhingga $(n\in\mathbb{N})$, differensi ke n ditulis dengan $\Delta^n(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x))$.

Untuk $n=2 \Longrightarrow \Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x) = \Delta(f(x+h)-f(x))$

$$= f(x+h+h)-f(x+h)-f(x+h)-f(x)$$

$$= f(x+2h)-2f(x+h)-f(x)$$

Untuk $n=3 \Longrightarrow \Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x))$

$$= \Delta(f(x+2h)-2f(x+h)-f(x))$$

$$= f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)$$

Untuk n berhingga $(n\in\mathbb{N})$,

$$\Delta^n f(x) = \binom{n}{0}f(x+nh)-\binom{n}{1}f(x+nh-h)+\ldots+(-1)^N\binom{n}{n}f(x)$$

Definisi 2.1.2

Persamaan Differensi order N ditulis dengan :

$$F\left[x,y,\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2},\ldots\ldots,\ \frac{\Delta^N y}{(\Delta x)^N}\right] = 0 \qquad (2.1.1)$$

Untuk $f(x)=x \Longrightarrow \Delta f(x)=\Delta x=(x+h)-x=h$. Dengan demikian $(\Delta x)^2=h^2, \ldots, (\Delta x)^N=h^N$ suatu konstanta-konstanta. Sehingga persamaan (2.1.1) dapat ditulis dengan,

$$F\left[x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ \ldots \ , \Delta^N y\right] = 0 \quad \text{atau}$$

$$G\left[x, f(x), f(x+h), \ \ldots \ , f(x+Nh)\right] = 0 \qquad (2.1.2)$$

<u>**Definisi 2.1.3**</u>

Order dari sebuah persamaan differensi adalah pangkat tertinggi dari operator differensi yang muncul dalam persamaan .

<u>**Contoh 2.1.1**</u>

$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} - 3\frac{\Delta y}{\Delta x} + 2y = 4x$ adalah persamaan differensi order 2. Misalkan $x=a+nh$ dan $z=f(a+nh)$ (n bilangan bulat positif). Maka persamaan (2.1.2) berubah menjadi,

$$H\left[n, z_n, z_{n+1}, \ \ldots \ , z_{n+N}\right] = 0 \qquad (2.1.3)$$

<u>**Definisi 2.1.4**</u>

Derajat persamaan differensi adalah pangkat tertinggi dari z yang muncul dalam persamaan.

<u>**Contoh 2.1.2**</u>

$z_{n-1}^2 + 4z_n + 3z_{n+1} = 0$ adalah persamaan differensi order 2 derajat 2. Dari persamaan (2.1.3), sebuah persamaan differensi disebut linier jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi H adalah fungsi linier dari $z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+N}$. Sehingga persamaan differensi linier order N dapat ditulis dengan :

$$a_N z_n + a_{n-1} z_{n+1} + \ldots + a_0 z_{n+N} = b_n \qquad (2.1.4)$$

Dengan menggunakan transformasi $j=n+N$ atau $n=j-N$, maka dapat ditulis persamaan (2.1.4) dalam bentuk:

$$a_N z_{j-N} + a_{N-1} z_{J-(N-1)} + \ldots + a_0 z_j = b_{j-N} \quad . \quad \text{atau}$$

$a_0 z_j + a_1 z_{j-1} + \ldots + a_N z_{j-N} = b_{j-N}$

Jadi bentuk umum dari persamaan differensi linier order N dengan koefisien konstan dapat dituliskan dalam bentuk :

$$a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + \ldots + a_N z_{n-N} = b_n \qquad (2.1.5)$$

dengan $a_0 \neq 0$ dan $a_N \neq 0$ untuk menjaga agar ordernya tetap N. Untuk menyederhanakan persamaan (2.1.5) digunakan operator L dengan cara, bila dipunyai $Z=\{z_n\}$ suatu barisan sembarang, maka dapat dinyatakan barisan baru, LZ yang unsur ke-n nya adalah sebagai berikut :

$(LZ)n = a_o z_n + a_1 z_{n-1} + \ldots + a_N z_{n-N}$

Bila persamaan (2.1.5) dibagi a_o akan diperoleh :

$$Z_n + a_1^* Z_{n-1} + \ldots + a_N^* Z_{n-N} = b_n^* \qquad (2.1.6)$$

2.2 Persamaan Differensi Liner order satu dengan koefisien konstan

Bentuk umum persamaan differensi linier order satu :

$$a_o z_n + a_1 z_{n-1} = b_n \qquad , a_o \neq 0 \qquad (2.2.1)$$

Karena $a_o \neq 0$ maka persamaan (2.2.1) dapat dibagi dengan a_o, diperoleh : $z_n + a_1^* z_{n-1} = b_n^*$

dengan $a_1^* = \dfrac{a_1}{a_o}$, $b_n^* = \dfrac{a_n}{a_o}$

Jika $b_n^* = 0$ maka $z_n + a_1^* z_{n-1} = 0$, disebut persamaan homogen dan jika $b_n^* \neq 0$ disebut persamaan tak homogen.

$$z_n + a_1^* z_{n-1} = b_n^* \implies z_n = -a_1^* z_{n-1} + b_n^*$$

karena ada satu-satunya konstanta, maka z_n bisa dituliskan dalam bentuk : $z_n = a_n z_{n-1} + b_n^*$ atau

$$z_n = a_n z_{n-1} + c_n \qquad (2.2.2)$$

Untuk mencari penyelesaian persamaan (2.2.2) diberikan teorema dibawah ini :

Teorema 2.2.1

Misalkan $a_n \neq 0$, $n=1,2,3,\ldots$. Penyelesaian persamaan differensi linier order satu $z_n = a_n z_{n-1} + c_n$, yang memenuhi syarat awal $z_0 = d$, diberikan oleh: $z_n = \pi_n\left(d + \frac{c_1}{\pi_1} + \frac{c_2}{\pi_2} + \ldots + \frac{c_n}{\pi_n}\right)$, $n=1,2,3,\ldots$

dengan $\pi_0 = 1$ dan $\pi_n = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$;

Bukti:

Untuk $c_n = 0 \Longrightarrow z_n = a_n z_{n-1}$

$n = 1 \Rightarrow z_1 = a_1 z_0$

$n = 2 \Rightarrow z_2 = a_2 z_1 = a_1 . a_2 z_0$

$n = 3 \Rightarrow z_3 = a_3 z_2 = a_1 . a_2 . a_3 z_0$

$\vdots$

$$n = n \Rightarrow z_n = a_n z_{n-1} = a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n z_0 \qquad (2.2.3)$$

Dengan memasukkan syarat awal $z_0 = d$ ke persamaan (2.2.3) diperoleh : $z_n = a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_n d = \pi_n . d$

Untuk $c_n \neq 0$, dimisalkan $z_n = d_n \pi_n$.

$n = 0 \Longrightarrow z_0 = d_0 \pi_0 = d_0 = d$, kemudian substitusikan ke persamaan semula,

$$d_n \pi_n = d_{n-1} a_n \pi_{n-1} + c_n \qquad , \; a_n \; \pi_{n-1} = \pi_n$$

$$d_n \pi_n = d_{n-1} \pi_n$$

$$d_n = \frac{d_{n-1} \; \pi_n \; + c_n}{\pi_n} = d_{n-1} + \frac{c_n}{\pi_n}$$

untuk $n = 1 \Longrightarrow d_1 = d_0 + \frac{c_1}{\pi_1}$

$$n = 2 \Longrightarrow d_2 = d_1 + \frac{c_2}{\pi_2} = d_0 + \frac{c_1}{\pi_1} + \frac{c_2}{\pi_2}$$

$$n = n \Longrightarrow d_n = d_{n-1} + \frac{c_n}{\pi_n} = d_0 + \frac{c_1}{\pi_1} + \frac{c_2}{\pi_2} + \ldots + \frac{c_n}{\pi_n}$$

Substitusi $d_0 = d$ didapat,

$$d_n = d + \frac{c_1}{\pi_1} + \frac{c_2}{\pi_2} + \ldots + \frac{c_n}{\pi_n}$$

$$z_n = \pi_n \left(d + \frac{c_1}{\pi_1} + \frac{c_2}{\pi_2} + \ldots + \frac{c_n}{\pi_n}\right)$$

Contoh 2.2.1

Tentukan penyelesaian persamaan differensi $z_n - z_{n-1} = n$, $n \in \mathbb{N}$, dengan syarat awal $z_o = 0$.

Jawab :

Persamaan differensi $z_n - z_{n-1} = n$ dapat ditulis menjadi $z_n = z_{n-1} + n$. Jadi $a_n = 1$, $c_n = n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Menurut teorema 2.2.1 penyelesaian umum diberikan oleh

$$z_n = \pi_n \left(d + \frac{c_1}{\pi_1} + \frac{c_2}{\pi_2} + \ldots + \frac{c_n}{\pi_n}\right)$$

Dengan memasukkan syarat awal $z_o = 0$, berarti $d = 0$ dan apabila dimasukkan ke persamaan diatas, didapat:

$$z_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{c_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)$$

$$z_n = 1.1 \ldots 1 \,(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$z_n = \frac{n\,(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2.3 Persamaan differensi linier order N dengan koefisien konstan

Bentuk umum persamaan differensi linier homogen N :

$$z_n + a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \ldots + a_N z_{n-N} = 0 \qquad (2.3.1)$$

$(LZ)_n = 0$, dimana $(LZ)_n = z_n + a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \ldots + a_N z_{n-N}$

$a_1, a_2, \ldots, a_N$ konstanta-konstanta.

2.4. Penyelesaian - penyelesaian khusus persamaan differensi linier homogen order N dengan koefisien konstan

Dimisalkan penyelesaiannya berbentuk $z_n = x^n$, untuk setiap

$n \in \mathbb{N}$. Apabila z_n disubstitusikan ke persamaan (2.3.1) didapat :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_N x^{n-N} = 0$$
$$x^{n-N}\,(x^N + a_1 x^{N-1} + a_2 x^{N-2} + \ldots. + a_N) = 0$$

Ada dua hal yang perlu diamati amati dari persamaan diatas. yaitu:

1. Jika $x^{n-N}=0$ maka $x=0$, sehingga $z_n=0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan penyelesaian ini disebut penyelesaian trivial.
2. $(x^N + a_1 x^{N-1} + a_2 x^{N-2} + \ldots. + a_N) = 0$

Sebut $\rho(x) = x^N + a_1 x^{N-1} + a_2 x^{N-2} + \ldots. + a_N$, sebagai persamaan karakteristik.Polinom $\rho(x)$ mempunyai akar-akar karasktেristik sebanyak N buah, sebut saja $x_1, x_2, \ldots., x_N$. Ada 3 kemungkinan untuk akar-akar karakteristiknya yaitu:

Kasus 1. semua akarnya riil dan berbeda.

Dalam kasus ini penyelesaian khususnya berbentuk $z_n^{(1)} = x_1^n$, $z_n^{(2)} = x_2^n$, ..., $z_n^{(N)} = x_N^n$. Karena (LZ) operator linier maka penyelesaian homogennya berbentuk $z_n = d_1 x_1^n + d_2 x_2^n + \ldots + d_N x_N^n$.

Kasus 2. Beberapa akarnya merupakan bilangan kompleks.

Misalkan $x_1 = \alpha + \beta i$ dan $x_2 = \alpha - \beta i$ akar karakteristik dari persamaan differensi liniernya, maka penyelesaian homogennya berbentuk $z_n = d_1(\alpha+\beta i) + d_2(\alpha-\beta i)$ atau $z_n = r^n(d_1 \cos n\theta + d_2 \sin n\theta)$.

Kasus 3. Beberapa akarnya sama.

Misalkan terdapat dua akar yang sama yaitu $x_1 = x_2$, maka penyelesaian homogennya berbentuk $z_n = d_1 x_1^n + d_2 n x_1^n$. Untuk 3 akar yang sama, $z_n = d_1 x_1^n + d_2 n x_1^n + d_3 n^2 x_1^n$ dan seterusnya dapat dicari untuk N akar yang sama.

Lemma 2.4.1

Misalkan $\mathbb{M}$ himpunan bilangan bulat berurutan, dan $m, m-1, \ldots, m-N+1 \in \mathbb{M}$ serta barisan $b=\{b_n\}$ terdefinisi pada $\mathbb{M}$, maka persamaan differensi linier order N, mempunyai tepat satu penyelesaian untuk harga $n=m$, $n=m-1$, ..., $n=m-N+1$.

Bukti:

Andaikan $Z^{(1)} \neq Z^{(2)}$ dua buah penyelesaian dari persamaan differensi $(LZ)_n=b_n$, yang mempunyai nilai-nilai sama di $n=m$, $n=m-1, \ldots,$ $n=m-N+1$. Misalkan barisan $D=Z^{(1)}-Z^{(2)}=\{d_n\}$. Barisan D adalah penyelesaian dari persamaan differensi $(LZ)_n=0$, karena :

$$\begin{array}{l} Z^{(1)} \text{penyelesaian maka } (LZ^{(1)})_n = b_n \\ Z^{(2)} \text{penyelesaian maka } (LZ^{(2)})_n = b_n \\ \hline (LZ^{(1)})_n - (LZ^{(2)})_n = 0 \\ (L(Z^{(1)} - Z^{(2)}))_n = 0 \end{array}$$

Barisan $D=\{d_n\}=0$ untuk $n=m$, $n=m-1, \ldots,$ $n=m-N+1$. Karena $Z^{(1)} \neq Z^{(2)}$, maka $d_n \neq 0$ untuk $n>m$ atau untuk $n<m-N+1$.

1. $d_n \neq 0$ untuk $n>m$

Ambil $n=m+1$. Karena barisan $D=\{d_n\}$ penyelesaian persamaan $(LD)_n=0$, maka memenuhi persamaan (2.3.1)

$$d_n+a_1d_{n-1}+a_2d_{n-2}+\ldots+a_Nd_{n-N}= 0 \qquad (2.4.1)$$

Kalau diperhatikan, $d_n \neq 0$, $d_{n-1}=d_{n-2}=\ldots=d_{n-N}=0$. Jadi bertentangan dengan persamaan (2.4.1).

2. $d_n \neq 0$ untuk $n<m-N+1$

Ambil $n=m-N$. Karena barisan $D=\{d_n\}$ penyelesaian persamaan

$(LD)_n=0$, maka memenuhi persamaan (2.3.1).

$$d_n+a_1d_{n-1}+a_2d_{n-2}+\ldots+a_Nd_{n-N}= \quad 0$$

Kalau diperhatikan, $d_n=d_{n-1}=\ldots\ldots=0$, $d_{n-N}\neq 0$. Karena $a_N\neq 0$, jadi bertentangan dengan persamaan (2.4.1).

Dengan demikian, barisan $D=\{d_n\}$ adalah barisan nol. Jadi barisan $Z^{(1)}$ dan barisan $Z^{(2)}$ adalah identik. Pemakaian lemma diatas adalah dalam hal berikut. Jika barisan $Z^{(1)}=z_n^{(1)}$, $Z^{(2)}=z_n^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}=z_n^{(N)}$ adalah N buah penyelesaian dari persamaan $(LZ)_n=0$, untuk $n\in\mathbb{M}$, dan $Z=\{z_n\}$ suatu penyelesaian sembarang dari persamaan $(LZ)_n=0$, maka menurut kasus 1, barisan $d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+\ldots\ldots+d_NZ^{(N)}$ adalah penyelesaian persamaan $(LZ)_n=0$. Jika penyelesaian $d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+\ldots\ldots+d_NZ^{(N)}$ dan barisan $Z=\{z_n\}$ mempunyai nilai yang sama di N buah bilangan bulat berurutan, misalnya di n=m, n=m-1, ..., n=m-N+1, maka menurut lemma 1, barisan $d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+\ldots\ldots+d_NZ^{(N)}$ dan barisan $Z=\{z_n\}$ adalah identik.

Berdasarkan hal diatas, maka dapat ditentukan konstanta-konstanta d_1, d_2, ..., d_N sedemikian sehingga $Z=d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+\ldots\ldots+d_NZ^{(N)}$ dan memenuhi persamaan berikut:

$$\begin{array}{lll}
n & \Longrightarrow & d_1z_n^{(1)}+d_2z_n^{(2)}+\ldots\ldots+d_Nz_n^{(N)} = z_n \\
n-1 & \Longrightarrow & d_1z_{n-1}^{(1)}+d_2z_{n-1}^{(2)}+\ldots\ldots+d_Nz_{n-1}^{(N)} = z_{n-1} \\
\vdots & & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
n-N+1 & \Longrightarrow & d_1z_{n-N+1}^{(1)}+d_2z_{n-N+1}^{(2)}+\ldots\ldots+d_Nz_{n-N+1}^{(N)} = z_{n-N+1}
\end{array}$$

Pandang persamaan diatas sebagai sistem persamaan linier dalam d_1, d_2, ..., d_N. Kalau ditulis dalam bentuk matriks, menjadi:

$$\begin{bmatrix} z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \cdots & z_n^{(N)} \\ z_{n-1}^{(1)} & z_{n-1}^{(2)} & \cdots & z_{n-1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{n-N+1}^{(1)} & z_{n-N+1}^{(2)} & \cdots & z_{n-N+1}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-N+1} \end{bmatrix}.$$

Misalkan,

$$\begin{bmatrix} z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \cdots & z_n^{(N)} \\ z_{n-1}^{(1)} & z_{n-1}^{(2)} & \cdots & z_{n-1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{n-N+1}^{(1)} & z_{n-N+1}^{(2)} & \cdots & z_{n-N+1}^{(N)} \end{bmatrix} = A$$

agar d_1, d_2, ..., d_N dapat ditentukan, haruslah matrik A adalah matrik tak singular, atau

$$\det A = \begin{vmatrix} z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \cdots & z_n^{(N)} \\ z_{n-1}^{(1)} & z_{n-1}^{(2)} & \cdots & z_{n-1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{n-N+1}^{(1)} & z_{n-N+1}^{(2)} & \cdots & z_{n-N+1}^{(N)} \end{vmatrix} = C_n \neq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Determinan C_n disebut determinan Casorati dari barisan - barisan $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}$ dititik n.

2.5 Bergantung linier dan bebas linier

Definisi 2.5.1

N buah barisan $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(N)}$ disebut bergantung linier jika terdapat $d_i \neq 0$ $(i=1,2,\ldots,N)$ sehingga persamaan berikut berlaku:

$d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+\ldots+d_NZ^{(N)} = 0$

Sebaliknya N buah barisan $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(N)}$ disebut bebas linier jika persamaan $d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+\ldots+d_NZ^{(N)} = 0$, terpenuhi hanya oleh $d_i=0$ $(i=1,2,\ldots,N)$

Teorema 2.5.1

Misalkan barisan - barisan $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}$ adalah N penyelesaian persamaan $(LZ)_n=0$ dan $C=\{C_n\}$ barisan yang dihasilkan dari perhitungan Casorati,

1. Jika $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}$ bergantung linier, maka barisan C adalah barisan nol.
2. Jika $C_m=0$ untuk beberapa bilangan bulat m, maka barisan - barisan $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}$ adalah penyelesaian yang bergantung linier.

Bukti :

1. Diketahui barisan - barisan $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}$ bergantung linier, maka terdapat konstanta d_1, d_2, ..., d_N tidak sama dengan nol sedemikian sehingga,

$$d_1Z^{(1)}+ d_2Z^{(2)}+ \ldots\ldots+ d_NZ^{(N)}= 0$$

khususnya untuk n=bilangan bulat ($n \in M$), berlaku

$$\begin{array}{l} d_1 z_n^{(1)} + d_2 z_n^{(2)} + \;.....+ d_N z_n^{(N)} = 0 \\ d_1 z_{n-1}^{(1)} + d_2 z_{n-1}^{(2)} + \;.....+ d_N z_{n-1}^{(N)} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_1 z_{n-N+1}^{(1)} + d_2 z_{n-N+1}^{(2)} + \;.....+ d_N z_{n-N+1}^{(N)} = 0 \end{array}$$

Pandang sistem persamaan diatas sebagai sistem persamaan linier homogen dalam d_1, d_2, ..., d_N. Karena terdapat $d_i \neq 0 (i=1,2,....,N)$ maka sistem persamaan tersebut mempunyai penyelesaian non trivial, yang berarti pula :

$$C_n = \begin{vmatrix} z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \cdots & z_n^{(N)} \\ z_{n-1}^{(1)} & z_{n-1}^{(2)} & \cdots & z_{n-1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{n-N+1}^{(1)} & z_{n-N+1}^{(2)} & \cdots & z_{n-N+1}^{(N)} \end{vmatrix} = 0$$

2. Ambil m suatu bilangan bulat sehingga $C_m = 0$.

Pandang sistem persamaan linier homogen :

$$\begin{array}{l} d_1 z_m^{(1)} + d_2 z_m^{(2)} + \;.....+ d_N z_m^{(N)} = 0 \\ d_1 z_{m-1}^{(1)} + d_2 z_{m-1}^{(2)} + \;.....+ d_N z_{m-1}^{(N)} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_1 z_{m-N+1}^{(1)} + d_2 z_{m-N+1}^{(2)} + \;.....+ d_N z_{m-N+1}^{(N)} = 0 \end{array}$$

Karena $C_m = 0$, berarti sistem persamaan linier homogen mempunyai penyelesaian non trivial. Misalkan barisan $Z = d_1 Z^{(1)} + d_2 Z^{(2)} + \;......+\; d_N Z^{(N)} = 0$. Menurut kasus 1, barisan Z adalah penyelesaian dari persamaan $(LZ)_n = 0$. Kalau diperhatikan, barisan Z mempunyai nilai nol di N buah bilangan bulat berurutan. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut :

$$n=m \implies z_m = d_1 z_m^{(1)} + d_2 z_m^{(2)} + \ldots + d_N z_m^{(N)} = 0$$

$$n=m-1 \implies z_{m-1} = d_1 z_{m-1}^{(1)} + d_2 z_{m-1}^{(2)} + \ldots + d_N z_{m-1}^{(N)} = 0$$

$$\vdots$$

$$n=m-N+1 \implies z_{m-N+1} = d_1 z_{m-N+1}^{(1)} + d_2 z_{m-N+1}^{(2)} + \ldots + d_N z_{m-N+1}^{(N)} = 0$$

Pandang barisan nol $\{\ldots, z_m=0, z_{m-1}=0, \ldots, z_{m-N+1}=0, \ldots\}$ adalah penyelesaian dari persamaan $(LZ)_n = 0$. Barisan nol mempunyai nilai nol di N bilangan bulat berurutan misalnya untuk $n=m$, $n=m-1$, ..., $n=m-N+1$. Menurut lemma 2.4.1 barisan Z adalah barisan nol maka :

$$0 = d_1 Z^{(1)} + d_2 Z^{(2)} + \ldots + d_N Z^{(N)}$$

khususnya untuk ,

$$n=m \implies d_1 z_m^{(1)} + d_2 z_m^{(2)} + \ldots + d_N z_m^{(N)} = 0$$

$$n=m-1 \implies d_1 z_{m-1}^{(1)} + d_2 z_{m-1}^{(2)} + \ldots + d_N z_{m-1}^{(N)} = 0$$

$$\vdots$$

$$n=m-N+1 \implies d_1 z_{m-N+1}^{(1)} + d_2 z_{m-N+1}^{(2)} + \ldots + d_N z_{m-N+1}^{(N)} = 0$$

Yang menurut persamaan (2.4.1) mempunyai penyelesaian non trivial atau terdapat $d_i \neq 0$, $i=1,2,\ldots N$ sedemikian sehingga $0=d_1 Z^{(1)} + d_2 Z^{(2)} + \; d_N Z^{(N)}$. atau barisan - barisan $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ..., $Z^{(N)}$ adalah penyelesaian yang bergantung linier.

Teorema 2.5.2

Jika barisan $Y=\{y_n\}$ suatu penyelesaian $(LY)_n=b_n$ dan barisan $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(N)}$ penyelesaian yang bebas linier dari persamaan $(LZ)_n=0$, maka setiap penyelesaian dari persamaan $(LZ)_n=b_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$Z = d_1 Z^{(1)} + d_2 Z^{(2)} + \ldots + d_N Z^{(N)} + Y$

untuk d_1, d_2, ..., d_N konstanta-konstanta dan Y suatu penyelesaian partikulair persamaan $(LZ)_n=b_n$.

Bukti

Jika barisan $Y=\{y_n\}$ penyelesaian dari persamaan $(LY)_n=b_n$, maka memenuhi persamaan $(LY)_n = b_n$ (2.5.1)

Ambil barisan $Z=\{z_n\}$ suatu penyelesaian sembarang dari persamaan $(LZ)_n = b_n$, karena barisan $Z = \{z_n\}$ penyelesaian, maka memenuhi persamaan $(LZ)_n = b_n$ (2.5.2)

Dari pernyataan (2.5.1) dan (2.5.2) didapat :

$$\begin{array}{rl} (LZ)_n &= b_n \\ (LY)_n &= b_n \\ \hline (LZ)_n - (LY)_n &= 0 \\ (L(Z-Y))_n &= 0 \end{array} -$$

Ambil barisan $G=Z-Y$, maka persamaan bentuk $(LG)_n=0$ dengan barisan $G=\{g_n\}$ merupakan penyelesaian dari persamaan $(LG)_n=0$. Menurut kasus 1 barisan $G=\{g_n\}$ dapat ditulis dalam bentuk :

$$G = d_1 Z^{(1)} + d_2 Z^{(2)} + \ldots\ldots + d_N Z^{(N)}$$

$$Z - Y = d_1 Z^{(1)} + d_2 Z^{(2)} + \ldots\ldots + d_N Z^{(N)}$$

$$Z = d_1Z^{(1)} + d_2Z^{(2)} + \ldots\ldots + d_NZ^{(N)} + Y$$

Karena barisan $Z=\{z_n\}$ suatu penyelesaian sembarang, maka setiap penyelesaian dari persamaan $(LZ)_n=b_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk $Z=d_1Z^{(1)}+d_2Z^{(2)}+ \ldots\ldots + d_NZ^{(N)}+Y$, untuk d_1, d_2, ..., d_N konstanta-konstanta sembarang.

Untuk menentukan penyelesaian partikulair ini digunakan cara-cara sebagai berikut :

1. **Metode koefisien tak tentu**

Metode ini digunakan untuk mencari penyelesaian khusus persamaan $(LZ)_n=b_n$, secara cepat, akan tetapi hanya untuk barisan b_n tertentu (lihat tabel).

Bentuk barisan b_n	Bentuk peny. khusus yg dicoba
β^n, β konstanta	$A\beta^n$
$Sin(\alpha n)$ atau $Cos(\alpha n)$	$(A\ Cos(\alpha n)+ B\ Sin(\alpha n))$
Polinom (P(n) derajat m	$(A_o+A_1n+A_2n^2+ \ldots + A_mn^m)$
$\beta^nP(n)$	$\beta^n(A_o+A_1n+A_2n^2+ \ldots + A_mn^m)$
$B^nSin(\alpha n)$, $\beta^nCos(\alpha n)$	$\beta^n(ACos(\alpha n)+ B(Sin(\alpha n))$

Contoh 2.5.1

Tentukan penyelesaian khusus persamaan differensi linier non homogen $z_n-4z_{n-1}+4z_{n-2}=3.2^n+5.4^n$

Jawab

Persamaan karakteristiknya : $x^2 - 4x + 4 = 0$

Akar-akar karakteristiknya : $x_{1,2} = 2$

Bentuk penyelesian homogennya $z_n = d_12^n + d_2n.2^n$

Penyelesaian khusus dicoba dalam bentuk $z_n=A_1n^22^n+A_24^n$, kemudian subtitusikan ke persamaan semula

$$A_1n^2 2^n+A_2 4^n-4(A_1(n-1)^2 2^{n-1}+A_2 4^{n-1})+4(A_1(n-2)^2 2^{n-2}+A_2 4^{n-2})$$
$$= 3.2^n + 5.4^n$$

$$A_1n^2 2^n+A_2 4^n-4(A_1(n-1)^2 2^{n-1}+A_2 4^{n-1})+4(A_1(n-2)^2 2^{n-2}+A_2 4^{n-2})$$
$$= 3.2^n + 5.4^n$$

$$A_1n^2 2^n-4A_1(n-1)^2 2^{n-1}+4A_1(n-2)^2 2^{n-2}+A_2 4^n-4A_2 4^{n-1}+A_2 4^{n-2}$$
$$= 3.2^n + 5.4^n$$

$$2A\ n^2+ \tfrac{1}{4}A\ 4^n = 3.2^n + 5.4^n$$

$$2A_1= 3 \implies A_1= \tfrac{3}{2} \quad , \quad \tfrac{1}{4}A_2= 5 \implies A_2= 20$$

Penyelesaian khusus persamaan ; $z_n-4z_{n-1}+4z_{n-2}=3.2^n+ 5.4^n$ adalah $y = \frac{3}{2}\ n^2 2^n+20.4^n$

Jadi penyelesaian umum persamaan differensi liniernya:

$$Z = d_1 2^n + d_2 n.2^n + \tfrac{3}{2}\ n^2 2^n+20.4^n$$

2. Metode Operator E

Pandang persamaan differensi linier order N,

$$z_n+a_1 z_{n-1}+ \ldots\ldots +a_N z_{n-N} = b_n$$

Persamaan diatas dapat ditulis sebagai :

$$E^{-N}(E^N+a_1 E^{N-1}+a_2 E^{N-2}+ \ldots +a_N)\ z_n= b_n \qquad (2.5.3)$$

dengan $Ez_n= z_{n+1}$

$$E^2 z_{n+1}= E.Ez_{n+1}= z_{n+2}$$
$$E^3 z_{n+1}= EE^2 z_{n+1}= Ez_{n+2} = z_{n+3}$$
$$\vdots$$
$$E^N z_n = z_{n+N}$$
$$E = \Delta + 1$$

Jadi persamaan (2.5.3) dapat ditulis dengan ;

$$\phi(E)\ z_n = b_n$$

Kemudian tentukan $\frac{1}{\phi(E)}$ sebagai invers dari $\phi(E)$, sehingga

$$\frac{1}{\phi(E)}\phi(E)\ z_n = \frac{1}{\phi(E)}b_n$$

$$1.\ z_n = \frac{1}{\phi(E)} b_n$$

Untuk mencari penyelesaian dari z_n digunakan rumus-rumus sebagai berikut:

1.	$\frac{1}{\phi(E)}\beta^n = \frac{\beta^n}{\phi(\beta)}$, $\phi(\beta)\neq 0$ dan β konstanta
2.	$\frac{1}{\phi(E)}\sin(\alpha n)$ atau $\frac{1}{\phi(E)}\cos(\alpha n)$, α konstanta tulis $\cos(\alpha n) = \frac{e^{ik}+e^{-ik}}{2}$, $\sin(\alpha n) = \frac{e^{i\alpha k}+e^{-i\alpha k}}{2}$ dan gunakan rumus 1.
3.	$\frac{1}{\phi(E)}\ P(n) = \frac{1}{\phi(\Delta+1)}\ P(n)$ $= (k_o+k_1\Delta+\ \ldots\ +k_m\Delta^m+\ldots)P(n)$
4.	$\frac{1}{\phi(E)}\ \beta^n\ P(n) = \beta^n\ \frac{1}{\phi(\beta)}\ P(n)$,kemudian gunakan rumus 3

<u>Contoh 2.5.2</u> Cari harga dari $\frac{1}{E^2-6E+8}(3n^2+n)$

Jawab : Gunakan rumus 3 dan dengan mengambil $E = 1+\Delta$

$$\frac{1}{E^2-6E+8}(3n^2+n) = \frac{1}{(\Delta+1)^2-6(\Delta+1)+8}(3n^2+n)$$

$$= \frac{1}{E^2-6E+8}(3n^2+n)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{4}{3}\Delta-\frac{1}{3}\Delta^2)}(3n^2+n)$$

$$= n^2+\frac{25}{3}n+10$$

<u>**4. Metode reduksi order**</u>

<u>**Teorema 2.5.3**</u>

Jika persamaan differensi $(1+a_1E+a_2E^2+\ldots+a_NE^N)z_n=b_n$ dapat ditulis dengan $(E-r_1)(E-r_2)\ldots.(E-r_N)z_n=b_n$ dan dengan mengambil $Y_n=(E-r_2)\ldots.(E-r_N)z_n$ maka

$$Y_n=r_1^n\Delta^{-1}\left(\frac{b_n}{r_1^{n+1}}\right) = r_1^p\sum_{p=1}^{n-1}\frac{b_p}{r_1^{p+1}} + c_1r_1^n$$

Bukti :

$$(E-r_1)Y_n = b_n \Longrightarrow Y_{n+1} - r_1 Y_n = b_n$$

kalikan dengan $\dfrac{1}{r_1^{n+1}}$.

$$\frac{Y_{n+1}}{r_1^{n+1}} - \frac{Y_n}{r_1^n} = \frac{b_n}{r_1^{n+1}} \quad \text{atau} \quad \Delta\left(\frac{Y_n}{r_1^n}\right) = \frac{b_n}{r_1^{n+1}}$$

$$\frac{Y_n}{r_1^n} = \Delta^{-1}\left(\frac{b_n}{r_1^{n+1}}\right)$$

$$Y_n = r_1^n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{b_p}{r_1^{p+1}} + c_1 r_1^n$$

<u>Contoh 2.5.3</u> Cari penyelesaian dari $z_{n+2} - 5z_{n+1} + 6z_n = n^2$

Jawab;

Persamaan dapat ditulis dengan ,

$$(E^2-5E+6)\, z_n = n^2$$

$(E-2)(E-3)z_n = n^2$, dengan mengambil $(E-2)z_n = Y_n$, persamaan menjadi $(E-3)Y_n = n^2$. Dengan menggunakan teorema 2.6 penyelesaian persamaan $(E-3)Y_n = n^2$ adalah ;

$$Y_n = 3^n \Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{3^{n+1}}\right) + c_1 3^n$$

$$= c_1 3^n + \frac{3^n}{3}\,\frac{1}{\Delta}\left(\frac{n^2}{3^n}\right) = c_1 3^n + \frac{3^n}{3}\,\frac{1}{E-1}\left(\frac{n^2}{3^n}\right)$$

$$= c_1 3^n + \frac{3^{n-1}}{3^n}\,\frac{1}{\frac{1}{3}E-1}\, n^2 = c_1 3^n + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{3}(1+\Delta)-1\right)}\, n^2$$

$$= c_1 3^n + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\Delta - \frac{2}{3}\right)}\, n^2 = c_1 3^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\Delta - \frac{3}{8}\Delta^2 + \ldots\right) n^2$$

$$= c_1 3^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 + \ldots\right)\left(n^{(2)} + n^{(1)}\right)$$

$$= c_1 3^n + \left(-\frac{1}{2}(n(n-1)) - \frac{1}{4}(2n+1) - \frac{1}{8}.2\right)$$

$$= c_1 3^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

$$Y_n = c_1 3^n - \frac{1}{2}\left(n^2 - n - 1\right)$$

Sehingga, $(E-2)z_n = c_1 3^n - \frac{1}{2}(n^2 - n - 1)$

$$z_n = 2^n \Delta^{-1}\left[\frac{c_1 3^n - \frac{1}{2}(n^2 - n - 1)}{2^n}\right] + c_2 2^n$$

$$Z_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + \frac{5}{2} + c_2 2^2 + c_3 3^2$$

2.6. Determinan dan minor suatu matrik

Pandang matriks bujursangkar berordo n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.6.1)$$

Definisi 2.6.1

Determinan dari matriks A_{nxn}, yang biasa dilambangkan dengan $|A|$ adalah.

$$\sum_{\rho} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \qquad (2.6.2)$$

Dimana penjumlahan dilakukan sampai $\rho = n!$ permutasi $j_1 j_2 \ldots j_n$ dari indeks kolom $1, 2, \ldots, n$ dan $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = 1$ atau -1 tergantung dari permutasinya ganjil atau genap.

Definisi 2.6.2

Minor ordo k dari suatu matriks A berordo n adalah determinan dari sub-matrik ordo k dari suatu matriks A (k<n).

Misalnya determinan dari suatu sub-matrik berorodo k dari suatu matrik berordo n (k<n), dilambangkan dengan, $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k \end{pmatrix}$ dimana $i_1, i_2, \ldots, i_k$ menyatakan indeks baris dan $j_1, j_2, \ldots, j_k$ menyatakan indeks kolom dari sub-

matriks tersebut. Misalkan $i_1, i_2, \ldots, i_m$ dengan $1 \le m \le n$ disusun naik dari indeks baris $1,2,\ldots,n$ dan misalkan $j_1, j_2, \ldots, j_m$ disusun naik dari indeks kolom $1,2,\ldots,n$. Kemudian sisa indeks baris dan indeks kolom juga disusun naik yaitu $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ dan $j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$. Dengan demikian suatu pemisahan indeks baris dan indeks kolom menghasilkan dua sub-matriks dari A yaitu,

$$\begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_m} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{i_m j_1} & a_{i_m j_2} & \cdots & a_{i_m j_m} \end{bmatrix}$$

dan
$$\begin{bmatrix} a_{i_{m+1} j_{m+1}} & a_{i_{m+1} j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+1} j_n} \\ a_{i_{m+1} j_{m+1}} & a_{i_{m+1} j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+1} j_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{i_n j_{m+1}} & a_{i_n j_{m+2}} & \cdots & a_{i_n j_n} \end{bmatrix}$$

Determinan dari kedua sub-matriks diatas masing-masing disebut minor ordo m dari A dan minor ordo n-m dari A dan dilambangkan dengan, $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m \end{pmatrix}$ dan $A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n \end{pmatrix}$.

Kedua minor ini disebut minor yang saling melengkapi (Complementary minor) dari matriks A.

Misalkan $p = i_1 + i_2 + \ldots + i_m + j_1 + j_2 + \ldots + j_m$ dan $q = i_{m+1} + i_{m+2} + \ldots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \ldots + j_n$. Minor bertanda $(-1)^p$ $A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n \end{pmatrix}$ disebut sebagai pelengkap aljabar (Algebraic complement) dari sub-matriks A $\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_m \\ j_1 j_2 \dots j_m \end{pmatrix}$ dan sebaliknya minor bertanda $(-1)^q A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_m \\ j_1 j_2 \dots j_m \end{pmatrix}$ disebut pelengkap aljabar dari sub-matriks $A \begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \dots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \dots j_n \end{pmatrix}$.

2.3. Rumus Binet-Cauchy.

Misalkan C_{mxm} yang merupakan perkalian dua matriks

A_{mxn} dan B_{nxm}, dan C = A x B.

Elemen - elemen dari C dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$c_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j} \qquad (i,j = 1,2, \dots ,m)$$

Berdasarkan hal diatas determinan C dapat ditentukan,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \dots & \sum_{\alpha_m=1}^{n} a_{1\alpha_m} b_{\alpha_m m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{m\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \dots & \sum_{\alpha_m=1}^{n} a_{m\alpha_m} b_{\alpha_m m} \end{vmatrix}$$

$$|C| = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & a_{1\alpha_2} b_{\alpha_2 2} & \dots & a_{1\alpha_m} b_{\alpha_m m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & a_{m\alpha_2} b_{\alpha_2 2} & \dots & a_{m\alpha_m} b_{\alpha_m m} \end{vmatrix}.$$

$$|C| = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \dots & a_{1\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m\alpha_1} & a_{m\alpha_2} & \dots & a_{m\alpha_m} \end{vmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \dots b_{\alpha_m m}$$

$$|C| = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=1}^{n} A \begin{pmatrix} 1 \; 2 \dots m \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \end{pmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \dots b_{\alpha_m m}$$

Jika m>n, maka diantara bilangan-bilangan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ selalu terdapat sekurang-kurangnya dua yang sama, sehingga setiap suku jumlah pada ruas kanan sama dengan nol. Karena itu dalam kasus ini $|C| = 0$.

Jika $m \leq n$, maka beberapa suku jumlah pada ruas kanan akan menjadi nol jika sekurang-kurangnya dua dari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ adalah sama. Semua suku jumlah sisa yang tidak sama dengan nol ($\alpha_1\neq\alpha_2\neq\ldots\neq\alpha_m$) terdapat m !kelompok. Suku - suku jumlah itu bedanya satu dengan yang lainnya hanya pada urutan dari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, sehingga dalam kelompok itu urutan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ hanya ada satu.

Misalkan $k_1<k_2<\ldots<k_m$ adalah urutan biasa dari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ dan $\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}$ sama dengan $(-1)^N$, dengan N adalah jumlah perubahan dari indeks-indeks yang dibutuhkan untuk menguraikaan permutasi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ menjadi urutan biasa. Penjumlahan dilakukan sampai $\lambda=m!$ permutasi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ itu dalam satu kelompok. Maka sekarang dalam setiap kelompok itu menjadi:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} A\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ldots\ m \\ k_1 k_2 \ldots\ k_m \end{pmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_m m}$$

$$= A\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ldots\ m \\ k_1 k_2 \ldots\ k_m \end{pmatrix} \sum_{\lambda} \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_m m}$$

$$= A\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ldots\ m \\ k_1 k_2 \ldots\ k_m \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} k_1 k_2 \ldots\ k_m \\ 1\ 2\ \ldots\ m \end{pmatrix}$$

Karena itu persamaan menjadi:

$$C\begin{pmatrix} 12\ldots m \\ 12\ldots m \end{pmatrix} = \sum_{\rho} A\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ldots m \\ k_1 k_2 \ldots k_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 k_2 \ldots k_m \\ 1\ 2\ \ldots m \end{pmatrix}$$

dimana penjumlahan dilakukan sampai $\binom{n}{m}$ pemilihan $k_1,k_2,\ldots,k_m$ dari indeks 1, 2, ..., n yang dipilih m tiap kali. Persamaan inilah yang disebut persamaan Binet-Cauchy.

Rumus Binet-Cauchy memungkinkan untuk menyatakan minor dari hasil perkalian dua matriks bujursangkar berkenaan dengan minor dari faktor -faktornya.

Misalnya $A=(a_{ik})$; $B=(b_{kj})$; $C=(c_{ij})$ dan $C = A.B$

$(i= 1,2,\ldots,m;\ k = 1,2,\ldots,n\ ;\ j = 1,2,\ldots,q)$

Pandang suatu minor sembarang dari C.

$$C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ j_1 j_2 \ldots j_p \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le m, & p\le m \\ 1\le j_1 < j_2 < \ldots < j_p \le q & p\le q \end{matrix}$$

Bentuk hasil perkalian sub-matrik tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & \ldots & c_{i_1 j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i_p j_1} & \ldots & c_{i_p j_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & \ldots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_p 1} & \ldots & a_{i_p n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1 j_1} & \ldots & b_{n j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n j_1} & \ldots & b_{n j_p} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan rumus Binet-Cauchy, diperoleh

$$C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ j_1 j_2 \ldots j_p \end{pmatrix} = \sum_{\rho} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 k_2 \ldots k_p \\ j_1 j_2 \ldots j_p \end{pmatrix} \qquad (2.23)$$

dimana penjumlahan dilakukan sampai $\binom{n}{m}$ pemilihan $k_1,k_2,\ldots,k_p$ (urutan naik) dari indeks 1, 2, ..., n yang dipilih p tiap kali.

2.4. Ekspansi Laplace untuk determinan

Perhatikan minor dari matriks A yaitu $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m \end{pmatrix}$ yang indeks baris dan indeks kolomnya disusun naik.

Sekarang pada matriks A dilakukan pertukaran baris dan pertukaran kolom. Dengan i_1-1 pertukaran baris-baris yang berdekatan dari matriks A, baris bernomor i_1 dapat dibawa ke baris pertama. Dengan i_2-2 pertukaran baris-baris yang berdekatan dari matriks A baris bernomor i_2 dapat dibawa ke baris kedua. Demikian seterusnya dilakukan i_m-m pertukaran baris-baris yang berdekatan dari matriks A baris bernomor i_m dapat dibawa ke baris yang ke m. Berarti sesudah melakukan $(i_1-1)+(i_2-2)+ \ldots + (i_m-m) = i_1+ i_2+ i_2+ \ldots +i_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ pertukaran baris-baris yang berdekatan menempati posisi m baris yang pertama. Demikian pula dengan cara yang sama dilakukan pertukaran kolom-kolom yang berdekatan dari matriks A. Berarti sesudah melakukan $(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_m-m)=j_1+j_2+j_2+\ldots+j_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ pertukaran kolom-kolom yang berdekatan menempati posisi m kolom yang pertama. Sebagai akibat pertukaran baris dan kolom ini, minor yang diperhatikan diatas menempati ujung kiri atas dan minor pelengkapnya menempati ujung kanan bawah dari matriks A yang baru, sebut saja matriks A′. Berikut ini diberikan matriks A′, dimana minor yang tadi menempati ujung kiri atas, biasanya disebut leading position.

$$A' = \left[\begin{array}{cccc:cccc}
a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_m} & a_{i_1 j_{m+1}} & a_{i_1 j_{m+2}} & \ldots & a_{i_1 j_n} \\
a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_m} & a_{i_2 j_{m+1}} & a_{i_2 j_{m+2}} & \ldots & a_{i_2 j_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{i_m j_1} & a_{i_m j_2} & \ldots & a_{i_m j_m} & a_{i_m j_{m+1}} & a_{i_m j_{m+2}} & \ldots & a_{i_m j_n} \\
\hdashline
a_{i_{m+1} j_1} & a_{i_{m+1} j_2} & \ldots & a_{i_{m+1} j_m} & a_{i_{m+1} j_{m+1}} & a_{i_{m+1} j_{m+2}} & \ldots & a_{i_{m+1} j_n} \\
a_{i_{m+1} j_1} & a_{i_{m+1} j_2} & \ldots & a_{i_{m+1} j_m} & a_{i_{m+1} j_{m+1}} & a_{i_{m+1} j_{m+2}} & \ldots & a_{i_{m+1} j_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i_n j_1} & a_{i_n j_2} & \ldots & a_{i_n j_m} & a_{i_n j_{m+1}} & a_{i_n j_{m+2}} & \ldots & a_{i_n j_n}
\end{array}\right]$$

.... (2.8.1)

Selain itu $|A|$ sudah berubah tanda sejumlah $\rho= i_1+ i_2+ i_2+ \ldots +i_m +j_1 +j_2 +j_2 + \ldots +j_m- m(m+1)$ kali yang sama dengan $\sigma =i_1+i_2+i_2+ \ldots +i_m+j_1+j_2+j_2+\ldots+j_m$ perubahan karena $m(m+1)$ selalu genap. Dengan demikian

$$|A'| = (-1)^{\sigma} |A| \qquad (2.8.2)$$

Kalau minor tadi dikalikan dengan pelengkapnya akan diperoleh :

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n \end{pmatrix}$$

$$= \left[\sum_{\rho_1} \varepsilon_{j_1 \ldots j_m} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m} \right] \left[\sum_{\rho_2} \varepsilon_{j_{m+1} \ldots j_n} a_{i_{m+1} j_{m+1}} \ldots a_{i_n j_n} \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.8.3)$$

dimana penjumlahan dilakukan sampai $\rho_1 = m!$ permutasi $j_1 j_2 \ldots j_m$ dari m indeks kolom yang dipilih dan $\rho_2 = (n-m)$ permutasi $j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n$ dari sisa indeks kolom yang dipilih (n-m indeks kolom). Karena $j_1, j_2, \ldots, j_m, j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$ saling berbeda dan berasal dari indeks kolom 1, 2,...,n ., maka ruas kanan persamaan menjadi

$$\sum_{\rho_3} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n j_{m+1} \ldots j_n} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m} a_{i_{m+1} j_{m+1}} \ldots a_{i_n j_n} \qquad (2.8.4)$$

dengan $\rho_3 = \rho_1 \rho_2$. Misalkan $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ditentukan. Dari baris-baris ini sebanyak $\rho = \binom{n}{m}$ minor yang berbeda dapat dibentuk, yaitu dengan pemilihan $j_1, j_2, \ldots, j_m$ yang berbeda dari indeks kolom 1,2,...,n yang diambil m tiap kali. Kemudian bila minor yang terbentuk ini dikalikan dengan pelengkapnya lalu dijumlahkan seluruhnya, maka sesuai dengan persamaan (2.8.3) dan persamaan (2.8.4) diperoleh

$$\sum_{\rho} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\rho} \left[\sum_{\rho_3} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n j_{m+1} \ldots j_n} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m} a_{i_{m+1} j_{m+1}} \ldots a_{i_n j_n} \right]$$

$$= \sum_{\rho_4} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n j_{m+1} \ldots j_n} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m} a_{i_{m+1} j_{m+1}} \ldots a_{i_n j_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.8.5)$$

Dimana penjumlahan dilakukan sampai, $\rho_4=\rho_3\rho=\binom{n}{m}m!(n-m)!$ atau $\rho_4=\frac{n!}{m!(n-m)!}m!(n-m)!=n!$ permutasi $j_1j_2\cdots j_mj_{m+1}\cdots j_n$ dari indeks kolom 1,2,...,n. Jadi persamaan (2.8.5) tidak lain adalah $|A'|$. Hal ini berarti bahwa

$$\sum_{\rho} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n\end{pmatrix} = |A'| \qquad (2.8.6)$$

Kemudian bila persamaan (2.8.2) disubstitusikan ke persamaan (2.8.6) diperoleh :

$$(-1)^{\sigma}\sum_{\rho} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n\end{pmatrix} = |A|$$

$$\sum_{\rho}(-1)^{\sigma} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_m \\ j_1 j_2 \ldots j_m\end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{m+1} i_{m+2} \ldots i_n \\ j_{m+1} j_{m+2} \ldots j_n\end{pmatrix} = |A| \qquad (2.8.7)$$

dimana $\sigma=i_1+i_2+i_2+\ldots+i_m+j_1+j_2+j_2+\ldots+j_m$ dan penjumlahan dilakukan sampai $\rho=\binom{n}{m}$ pemilihan $j_1,j_2,\ldots,j_m$ yang berbeda dari indeks kolom 1,2,...,n yang diambil m tiap kali. Persamaan inilah yang dinamakan sebagai ekspansi Laplace untuk determinan.

Contoh 2.4.1

Gunakan ekspansi Laplace pada baris ke-2 dan ke-4 untuk menghitung $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Jawab:

Hitung dahuhu $B\begin{pmatrix} i_1 i_2 \\ j_1 j_2\end{pmatrix}=(-1)^{\sigma}A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \\ j_1 j_2\end{pmatrix}$, (i=2,4;j=1.2.3.4)

dengan $\sigma = i_1+i_2+j_1+j_2$

$B\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2\end{pmatrix}=(-1)^{2+4+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3$; $B\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3\end{pmatrix}=(-1)^{2+4+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$

$$B\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{2+4+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6;\; B\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{2+4+2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$B\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{2+4+2+4}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15;\; B\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{2+4+3+4}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Hitung juga, $A\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}$, $(i=1,3 \; ; \; j=1.2.3.4)$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;; A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \;; A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \;; A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \;; A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Untuk mencari determinannya dilakukan penjumlahan atas perkalian pasangan-pasangan $A\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}$ dan $B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}$ dan yang perlu diperhatikan bahwa j_1, j_2 dan j_3, j_4 harus berbeda. Jadi determinannya adalah:

$(-3)8+(-2)2+3(-2)+6.4+(-15)(-4)+(-4)0= 50$

2.5. Matriks Compound

Misalnya A adalah matriks bujursangkar berordo n. Dibentuk sebuah matriks yang elemen-elemennya adalah minor-minor ordo k yang berasal dari k buah baris dan k buah kolom dari A yang disusun naik. Misalkan semua minor yang berasal dari k buah baris (k kolom) yang sama dari A ditempatkan pada baris (kolom) yang sama pula pada matriks yang akan dibentuk. Misalnya prioritas elemen-elemen dalam baris atau kolom disusun sebagai mana dalam penyusunan kamus (lexical order). Sebagai contoh, minor-minor yang berasal dari baris 1,2,4 dari A, akan muncul pada baris yang lebih dahulu daripada minor-minor yang berasal dari baris 1,3,4 atau 1,5,2. Demikian halnya untuk kolom. Matriks yang dibentuk dengan cara demikian disebut compound ke k dari A dan dinotasikan dengan $A^{(k)}$.Dengan cara yang sama kita dapat membentuk matriks compound ke k dari adj A yang dinotasikan dengan $(\text{adj } A)^{(k)}$. Ordo dari matriks tersebut adalah $\binom{n}{k}$.

Definisi 2.9

$\text{adj}^{(k)}A$ adalah tranpose dari matriks yang elemen elemennya adalah $A^{(k)}$, yang diganti dengan masing - masing pelengkap aljabarnya dalam A, sehingga akan sama dengan matriks yang elemen - elemennya adalah elemen - elemen compound ke k dari matriks berordo n, yang diganti oleh pelengkap aljabarnya dalam A^t.

Contoh 2.5.1

Berikut ini diberikan contoh untuk mencari compound ke 2 dari matriks berordo 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{adj } A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & 10 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & A\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & A\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ A\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & A\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & A\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ A\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & A\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & A\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -2 & -6 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama dapat dibentuk compound ke k dari adj A dan sekaligus ditentukan $\text{adj}^{(2)}A$ sebagai berikut

$$(\mathrm{adj}\ A)^{(2)} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 4 & -15 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -20 & 40 \\ -20 & 10 & -20 \\ 20 & -30 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \implies \mathrm{adj}^{(2)} A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$