BAB III

DIAGONALISASI ORTHOGONAL BENTUK KUADRAT

Pada bab ini akan dibahas mengenai diagonalisasi suatu matriks, misalnya diberikan suatu matriks A berordo n x n dan matriks P yang mempunyai invers, sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ diagonal. Selanjutnya ditentukan matriks orthogonal P, sehingga $P^{-1}AP = P^{T}AP$ diagonal. Dan apabila A adalah matriks dari bentuk kuadrat maka P disebut mendiagonalisasi bentuk kuadrat secara orthogonal.

3.1. Diagonalisasi Matriks

Definisi 3.1.1

Matriks bujursangkar A disebut dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ diagonal. Matriks P disebut mendiagonalisasi matriks A.

Teorema 3.1.1

Jika A adalah matriks berordo n x n maka pernyataan - pernyataan berikut ekuivalen satu sama lain :

(i) A dapat didiagonalisasi.

(ii) A mempunyai n vektor eigen bebas linier.

Bukti :

(i) $\longrightarrow$ (ii)

Karena A dianggap dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks P yang mempunyai invers, yaitu :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, misalnya $P^{-1}AP = D$, dengan

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Maka $AP = PD$, yakni

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

....(3.1)

Jika dimisalkan p_1, p_2, ..., p_n menyatakan vektor-vektor kolom P, maka dari persamaan (3.1) kolom-kolom AP yang berturutan adalah : $\lambda_1 p_1$, $\lambda_2 p_2$, ..., $\lambda_n p_n$. Akan tetapi kolom-kolom AP yang berturutan adalah Ap_1, Ap_2, ..., Ap_n, sehingga didapatkan :

$Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2,\ \ldots,\ Ap_n = \lambda_n p_n$ ......(3.2)

Karena P mempunyai invers, maka vektor-vektor kolomnya semuanya tak nol.

Jadi sesuai persamaan (3.2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A dan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Karena P mempunyai invers maka didapatkan bahwa $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bebas linier. Jadi, A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Dianggap bahwa A mempunyai n vektor eigen yang bebas linier yaitu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dengan nilai eigen yang bersesuaian adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Kolom-kolom dari hasil perkalian AP adalah :

$$Ap_1,\ Ap_2,\ \ldots,\ Ap_n$$

diketahui

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2,\ \ldots,\ Ap_n = \lambda_n p_n$$

sehingga

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

Dengan D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai-nilai eigen λ_1, λ_2, ..., λ_n pada diagonal utama. Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linier maka P mempunyai invers. Jadi persamaan (3.3) dapat ditulis $P^{-1}AP = D$ dan dengan demikian A dapat didiagonalisasi.

Dari bukti teorema 3.1.1 didapatkan langkah-langkah untuk mendiagonalisasi matriks A berordo nxn yang dapat didiagonalisasi, yaitu :

Langkah 1. Mencari nilai-nilai eigen matriks A

Langkah 2. Mencari n vektor eigen yang bebas linier dari matriks A, p_1, p_2, ..., p_n.

Langkah 3. Membentuk matriks P yang mempunyai p_1, p_2, ..., p_n sebagai vektor-vektor kolomnya.

Langkah 4. Matriks $P^{-1}AP$ akan diagonal dengan λ_1, λ_2, ..., λ_n sebagai elemen-elemen diagonal utama yang berturutan, dengan λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen p_i, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Contoh 3.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Karena

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

maka persamaan karakteristik dari A adalah

$\det(\lambda I-A) = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$

Jadi terdapat dua nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 1$

Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 5$, ambil:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_1 I-A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Dari persamaan $2x_1 + 2x_2 = 0$, dapat dipilih $x_1 = c_1$, sehingga didapatkan : $x_2 = -c_1$ dan $x_3 = c_2$.

Dengan c_1 dan c_2 konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga :

$$x = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dan didapatkan :

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yaitu vektor-vektor yang bebas linier, maka vektor-vektor tersebut membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 5$.

Untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 1$, ambil :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_2 I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ diambil dua persamaan}$$

Misal diambil $-2x_1 + 2x_2 = 0$ dan $-4x_3 = 0$, dapat dipilih $x_1 = c$, sehingga didapatkan $x_2 = c$ dan $x_3 = 0$ Dengan c konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga

$$x = \begin{bmatrix} c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan didapatkan :

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yaitu sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$. Sehingga $\{p_1, p_2, p_3\}$ adalah vektor yang bebas linier dan didapatkan :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

yang akan mendiagonalisasi A. Untuk memeriksanya dapat dibuktikan bahwa :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 3.2

Persamaan karakteristik dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$

Jadi $\lambda = -1$ adalah satu-satunya nilai eigen dari A.

Sekarang dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = -1$, ambil

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dari persamaan $2x_1 - 2x_2 = 0$, dapat dipilih $x_1 = c$ dan sehingga didapatkan $x_2 = c$.

Dengan c konstanta sembarang yang tidak nol, sehigga

$$x = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena merupakan ruang eigen yang berdimensi satu, maka A tidak mempunyai dua vektor eigen yang bebas linier, sehingga A tidak dapat didiagonalisasi.

Dari pembahasan teorema 3.1.1 didapatkan langkah-langkah untuk mendiagonalisasikan matriks A. Sebaliknya yang diperlukan adalah mengetahui apakah matriks A dapat didiagonalisasi, yaitu dengan melibatkan secara langsung nilai eigen tanpa mencari vektor eigen yang bersesuaian. Untuk hal tersebut, selanjutnya akan dibahas teorema berikut

Teorema 3.1.2

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_k$ adalah vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ adalah himpunan vektor yang bebas linier.

Bukti :

Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_k$ adalah vektor-vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Akan diandaikan bahwa $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tak bebas linier sehingga didapatkan suatu kontradiksi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $v_1, v_2, \ldots, v_k$ bebas linier.

Sesuai definisi dari vektor eigen, karena vektor eigen adalah tak nol, maka $(v_1\}$ bebas linier.

Misalkan r adalah bilangan bulat terbesar sehingga $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ bebas linier. Karena diandaikan bahwa $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ tak bebas linier, maka r memenuhi $1 \leq r \leq k$ dan sesuai definisi dari r, maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}\}$ tak bebas linier. Jadi terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ yang tidak semuanya nol, sedemikian sehingga :

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{r+1}v_{r+1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(3.4)$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (3.4) dengan A dan dengan menggunakan :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2,\ \ldots,\ Av_{r+1} = \lambda_{r+1} v_{r+1}$$

maka didapatkan :

$$c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad \ldots\ldots.(3.5)$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan (3.4) dengan λ_{r+1} akan didapatkan :

$$c_1\lambda_{r+1} v_1 + c_2\lambda_{r+1} v_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \ \ldots(3.6)$$

Dengan mengurangkan persamaan (3.5) dengan persamaan (3.6), maka akan dihasilkan :

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})v_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_r = 0$$

Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ bebas linier, maka persamaan ini menyatakan bahwa :

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

dan karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ berbeda satu sama lain, maka didapatkan bahwa :

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7)$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini dalam persamaan (3.4), maka akan menghasilkan :

$$c_{r+1} v_{r+1} = 0$$

Karena vektor eigen v_{r+1} tak nol, maka didapatkan bahwa :

$$c_{r+1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.8)$$

Persamaan-persamaan (3.7) dan (3.8) bertentangan dengan kenyataan bahwa $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ tidak semuanya nol.

Jadi terbukti bahwa pengandaian salah dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ bebas linier.

Contoh 3.3

Dari contoh 3.1 didapatkan matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana vektor-vektor kolomnya adalah vektor eigen. Karena det (P) $\neq$ 0 maka vektor-vektor kolomnya adalah vektor-vektor yang bebas linier.

Teorema 3.1.3

Jika matriks A berordo nxn mempunyai n nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalisasi.

Bukti :

Jika v_1, v_2, ..., v_n adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang berbeda λ_1, λ_2, ..., λ_n, maka sesuai teorema 3.1.2, v_1, v_2, ..., v_n bebas linier. Jadi sesuai dengan teorema 3.1.1 maka A dapat didiagonalisasi.

Contoh 3.4

Apabila diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

maka persamaan karakteristiknya adalah

$$\det(\lambda I-A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda-8 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \text{ , } \lambda_2 = 2 + \sqrt{3} \text{ dan } \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

Karena matriks A mempunyai tiga nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalisasi. Yakni:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menentukan matriks P dapat digunakan sesuai teorema 3.1.1.

3.2. Diagonalisasi Orthogonal

Definisi 3.2.1

Matriks bujur sangkar A dapat didiagonalisasi secara orthogonal jika terdapat matriks P yang orthogonal sehingga $P^{-1}AP = P^TAP$ diagonal. Matrik P disebut mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Teorema 3.2.1

Jika A adalah matriks berordo nxn, maka pernyataan - pernyataan berikut ekuivalen satu sama lain :

(i). A dapat didiagonalisasi secara orthogonal.

(ii). A mempunyai himpunan n vektor eigen yang orthonormal.

Bukti :

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Karena A dapat didiagonalisasi secara orthogonal, maka terdapat matriks P yang orthogonal sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ diagonal. Sesuai pada pembuktian dari teorema 3.1.1, maka n vektor kolom dari P adalah vektor-vektor eigen dari A. Karena P orthogonal, maka vektor-vektor kolomnya adalah orthonormal sehingga A mempunyai n vektor eigen yang orthonormal.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Dianggap bahwa A mempunyai himpunan orthonormal dari n vektor eigen $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Seperti pada pembuktian teorema 3.1.1 maka matriks P dengan vektor-vektor eigen tersebut sebagai kolom-kolomnya akan mendiagonalisasi A. Karena vektor-vektor eigen tersebut adalah orthonormal, maka P orthogonal sehingga akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Teorema 3.2.2

A adalah matriks simetris jika A dapat didiagonalisasi secara orthogonal.

Bukti :

Andaikan A dapat didiagonalisasi secara orthogonal maka terdapat matriks P yang orthogonal sedemikian sehingga :

$$D = P^{-1}AP$$

Jadi,

$$A = PDP^{-1}.$$

atau, karena P orthogonal, maka :

$$A = PDP^{T}$$

sehingga

$$A^{T} = (PDP^{T})^{T} = PD^{T}P^{T} = PDP^{T} = A$$

terbukti bahwa A simetris.

Dalam pembuktian teorema 3.2.1 diperlihatkan bahwa matriks A berordo nxn dapat didiagonalisasi oleh matriks P berordo nxn secara orthogonal, dimana kolom-kolom dari matriks P membentuk himpunan orthonormal dari vektor-vektor eigen dari matriks A. Selanjutnya sebelum membahas masalah untuk mencari matriks orthogonal P yang akan mendiagonalisasi matriks simetris A, akan ditunjukkan pemakaian proses Gram-Schmidt yang sering dipergunakan untuk mendapatkan suatu basis orthonormal.

Misalkan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis pada R^n.

Urutan langkah berikut akan menghasilkan sebuah basis orthonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ pada R^n.

1. $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

   dengan proses normalisasi, vektor v_1 mempunyai norm 1

2. $v_2 = \dfrac{u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1\|}$

3. $v_3 = \dfrac{u_3 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2\|}$

$\vdots$

n. $v_n = \dfrac{u_n - \langle u_n, v_1\rangle v_1 - \langle u_n, v_2\rangle v_2 - \ldots - \langle u_n, v_{n-1}\rangle v_{n-1}}{\|u_n - \langle u_n, v_1\rangle v_1 - \langle u_n, v_2\rangle v_2 - \ldots - \langle u_n, v_{n-1}\rangle v_{n-1}\|}$

Contoh 3.5

Penggunaan proses Gram-Schimidt untuk mendapatkan basis orthonormal dari basis - basis $u_1 = [1,0,1]$, $u_2 = [0,1,1]$ dan $u_3 = [1,0,0]$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{[1,0,1]}{\sqrt{2}} = [\ 1/\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 1/\sqrt{2}\ ]$$

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = [0,1,1] - (\ 1/\sqrt{2}\ )[\ 1/\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 1/\sqrt{2}\ ]$$

$$= [\ -1/2\ ,\ 1\ ,\ 1/2\ ]$$

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\| u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \|} = \frac{[\ -1/2\ ,\ 1\ ,\ 1/2\ ]}{\sqrt{6}/2}$$

$$= [-1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6}\ ,\ 1/\sqrt{6}\ ]$$

$$u_3 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = [1,0,0] - (1/\sqrt{2})[1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2}]$$

$$- (-1/\sqrt{6})[-1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6}]$$

$$= [1/3, 1/3, -1/3]$$

$$v_3 = \frac{u_3 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\| u_3 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 \|} = \frac{[1/3, 1/3, -1/3]}{\sqrt{3}/3}$$

$$= [\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}\ ]$$

Jadi,

$v_1 = [\ 1/\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 1/\sqrt{2}\ ]$

$v_2 = [-1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6}\ ,\ 1/\sqrt{6}\ ]$

$v_3 = [\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}\ ]$

membentuk sebuah basis orthonormal untuk R^3.

Teorema 3.2.3

Jika A adalah matriks simetris, maka vektor-vektor karakteristik dari ruang eigen yang berbeda akan orthogonal.

Bukti :

Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah dua nilai eigen yang berbeda dari matriks simetris A yang berordo nxn, dan misalkan :

$$v_1 = \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad v_2 = \begin{bmatrix} \upsilon'_1 \\ \upsilon'_2 \\ \vdots \\ \upsilon'_n \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Akan dibuktikan bahwa

$$v_1 . v_2 = \upsilon_1\upsilon'_1 + \upsilon_2\upsilon'_2 + \ldots + \upsilon_n\upsilon'_n = 0$$

Karena $v_1^T v_2$ adalah merupakan matriks berordo 1x1 yang mempunyai $v_1 . v_2$ sebagai satu-satunya elemen, maka dapat dibuktikan bahwa $v_1^T v_2 = 0$.

Karena v_1 dan v_2 merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2, maka :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.9)$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.10)$$

Dari persamaan (3.9), didapatkan :

$$(Av_1)^T = (\lambda_1 v_1)^T$$

atau $v_1^T A^T = \lambda_1 v_1^T$

Karena A adalah simetris, maka

$$v_1^T A = \lambda_1 v_1^T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.11)$$

Dengan mengalikan masing-masing ruas dari persamaan (3.11) pada bagian kanan menggunakan v_2 akan didapatkan

$$v_1^T A v_2 = \lambda_1 v_1^T v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.12)$$

dan dengan mengalikan masing-masing ruas persamaan (3.10) pada bagian kiri menggunakan v_1^T akan didapatkan :

$$v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.13)$$

Jadi, dari persamaan (3.12) dan (3.13) didapatkan :

$$\lambda_1 v_1^T v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$$

atau $(\lambda_1 - \lambda_2) v_1^T v_2 = 0$

Karena λ_1 dan λ_2 adalah dua nilai eigen yang berbeda maka $v_1^T v_2 = 0$

Sebagai konsekwensi dari teorema di atas, maka didapatkan langkah-langkah untuk mendiagonalisasi matriks simetris secara orthogonal.

Langkah 1. Mencari basis untuk masing-masing ruang eigen dari A.

Langkah 2. Menggunakan proses Gram-Schmidt pada setiap basis yang didapatkan pada langkah pertama untuk mendapatkan sebuah basis orthonormal pada setiap ruang eigen.

Langkah 3. Membentuk matriks P yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor basis yang dibangun pada langkah kedua. Matriks ini akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Langkah-langkah tersebut sudah seharusnya jelas. Teorema 3.2.3 menjamin bahwa vektor-vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda akan orthogonal, sedangkan penggunaan proses Gram-Schmidt menjamin bahwa vektor-vektor eigen yang didapatkan dalam ruang eigen yang sama akan orthonormal. Jadi, keseluruhan himpunan vektor eigen yang didapatkan dengan langkah-langkah tersebut akan orthonormal.

Contoh 3.6

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Karena

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

maka persamaan karakteristik dari A adalah :

$\det(\lambda I - A) = (\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 8$

Jadi terdapat dua nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 8$

Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 2$, ambil:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_1 I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Dari persamaan $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$, dipilih $x_3 = c_1$, $x_2 = c_2$ dan $x_1 = -c_1 - c_2$.

Dengan c_1 dan c_2 konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga :

$$x = \begin{bmatrix} -c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dan didapatkan :

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yaitu vektor-vektor yang bebas linier, maka vektor-vektor tersebut akan membentuk basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$.

Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{p_1, p_2\}$ akan dihasilkan :

$$v_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{[-1,0,1]}{\sqrt{2}} = [-1/\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 1/\sqrt{2}\ ]$$

$$p_2 - \langle p_2, v_1 \rangle v_1 = [-1,1,0] - (1/\sqrt{2})[-1/\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 1/\sqrt{2}\ ]$$

$$= [-1/2\ ,\ 1\ ,-1/2\ ]$$

$$v_2 = \frac{p_2 - \langle p_2, v_1 \rangle v_1}{\|p_2 - \langle p_2, v_1 \rangle v_1\|} = \frac{[-1/2\ ,\ 1\ ,-1/2\ ]}{\sqrt{6}/2}$$

$$= [-1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6}\ ,\ 1/\sqrt{6}\ ]$$

Jadi :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

adalah basis yang orthonormal.

Untuk mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 8$, Ambil :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_2 I-A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{array}{r} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$(\lambda_2 I-A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{H_{23}^{(-1)}}{\overset{H_{13}^{(2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{H_{12}^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

cukup diambil 2 persamaan dari (*), didapatkan :

$6x_2 - 6x_3 = 0$

$-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$, diambil $x_3 = c$, $x_2 = c$

dan $x_1 = c$

Dengan c konstanta senbarang yang tidak nol, sehingga

$$x = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan didapatkan :

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yaitu basis yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 8$.

Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{p_3\}$, akan didapatkan :

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

yaitu basis orthonormal dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 8$.

Selanjutnya, dengan menggunakan v_1, v_2 dan v_3 sebagai vektor-vektor kolom akan didapatkan :

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

yang akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Untuk memeriksanya akan dibuktikan bahwa P^TAP adalah matriks diagonal.

$$P^TAP = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & 8/\sqrt{3} \\ 0 & 4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & 8/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

3.3. Diagonalisasi Orthogonal Bentuk Kuadrat

Definisi 3.3.1

Polinom homogen berbentuk :

$$q = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + \ldots + a_{nn}x_nx_n$$

$$q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.14)$$

dengan koefisien-koefisien a_{ij} adalah elemen riil dari suatu field F disebut bentuk kuadrat dalam variabel-variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dalam bentuk matriks dapat ditulis :

$$q = x^TAx$$

Matriks A = $[a_{ij}]$ disebut matriks dari bentuk kuadrat.

Perlu diperhatikan bahwa a_{ij}, a_{ji} dalam persamaan (3.14), kedua-duanya merupakan koefisien dari x_ix_j apabila $i \neq j$ (karen $x_ix_j = x_jx_i$).

Apabila $a_{ij} \neq a_{ji}$ maka dapatkan ditentukan suatu koefisien secara tunggal, yaitu :

$$b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \text{ , untuk semua } i,j \ldots\ldots\ldots(*)$$

Sehingga dengan demikian $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$ dan matriks baru A = $[b_{ij}] = A^T$, dengan A adalah matriks simetris.

Koefisien baru tersebut tidak merubah nilai q untuk setiap x. Jadi dapat dianggap bahwa matriks A yang berhubungan dengan bentuk kuadrat x^TAx selalu merupakan matriks simetris.

Contoh 3.7

Matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang tidak simetris dari bentuk kuadrat

$q = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_1 + 6x_2^2$.

Diketahui $a_{12} = 2$ dan $a_{21} = 4$ maka dengan menggunaka persamaan (*) didapatkan :

$$b_{12} = b_{21} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Sehingga tanpa mengubah nilai dari q, koefisien a_{12} dan a_{21} bisa diubah menjadi $b_{12} = b_{21} = 3$. Sehingga didapatkan matriks simetris :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menghilangkan suku hasil kali silang dari suatu bentuk kuadrat akan dibahas teorema berikut.

Teorema 3.3.1

Misalkan x^TAx adalah bentuk kuadrat dalam variabel - variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan A matriks simetris. Jika P mendiagonalisasi A secara orthogonal dan variabel-variabel baru $y_1, y_2, \ldots, y_n$ didefinisikan oleh persamaan x = Py, maka substitusi x = Py pada x^TAx menghasilkan :

$$x^TAx = y^TDy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari A dan $D = P^TAP$.

Bukti :

Misalkan

$$x^TAx = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

adalah suatu bentuk kuadrat dengan matriks simetris A. Sesuai dengan teorema 3.2.1 maka terdapat matriks P yang orthogonal yang mendiagonalisasi A yaitu :

$$P^TAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A.

Jika dimisalkan :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Dengan $y_1, y_2, \dots, y_n$ adalah variabel-variabel baru dan jika dilakukan substitusi $x = Py$ pada x^TAx, maka didapatkan :

$$x^TAx = (Py)^TAPy = y^T(P^TAP)y = y^TDy$$

sehingga :

$$y^TDy = [y_1, \; y_2, \; \dots, \; y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

yang merupakan suatu bentuk kuadrat tanpa suku-suku hasil kali silang.

Matriks P dalam teorema 3.3.1 dikatakan mendiagonalisasi bentuk kuadrat secara orthogonal atau mereduksi bentuk kuadrat ke suatu bentuk jumlah kuadrat.

Contoh 3.8

Suatu bentuk kuadrat

$$q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x^T A x$$

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3) = 0$$

sehingga nilai - nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$ dan $\lambda_3 = 3$.

Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$:

ambil

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_1 I - A)u = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan :

$$\left.\begin{aligned} -u_1 + 2u_2 &= 0 \\ u_1 - 2u_3 &= 0 \\ -2u_2 + u_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(\lambda I-A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{21}^{(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H_{23}^{(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Cukup diambil dua persamaan dari (*) didapatkan :

$-u_1 + 2u_2 = 0$

$-2u_2 + u_3 = 0$, dapat dipilih $u_3 = c$, $u_2 = (1/2)c$

dan $u_1 = c$

Dengan c konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga :

$$u = \begin{bmatrix} c \\ (1/2)c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan didapatkan

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yaitu basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$.

Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{v_1\}$

maka didapatkan :

$$p_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

yaitu sebuah basis orthonormal.

Untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = -3$, ambil:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_2 I-A)u = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan :

$$\left.\begin{array}{rcl} -4u_1 + 2u_2 & = & 0 \\ 2u_1 - 3u_2 - 2u_3 & = & 0 \\ - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$(\lambda_2 I-A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{23}^{(-1)}} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H_{12}^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Cukup diambil dua persamaan dari (*), diperoleh :

$$2u_1 - u_2 = 0$$

$$-2u_2 - 2u_3 = 0$$

dapat diambil u_3 = c, u_2 = -c dan $u_1 = -\frac{1}{2}$ c.

Dengan c konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga :

$$u = \begin{bmatrix} (-1/2)c \\ -c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan didapatkan :

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yaitu basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -3$.

Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt terhadap $\{v_2\}$ maka diperoleh :

$$p_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

yaitu sebuah basis orthonormal.

Untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai karakteristik $\lambda_3 = 3$,

ambil:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_3 I - A)u = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 + 2u_2 &= 0 \\ 2u_1 + 3u_2 - 2u_3 &= 0 \\ - 2u_2 + 4u_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

maka

$$(\lambda_3 I - A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H}_{21}^{(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{H}_{32}^{(2)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Dari (*), diperoleh :

$$2u_1 + 2u_2 = 0$$
$$u_2 - 2u_3 = 0$$

diambil $u_3 = c$, $u_2 = 2c$ dan $u_1 = -2c$

Dengan konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga :

$$u = \begin{bmatrix} -2c \\ 2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan didapatkan

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yaitu basis dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_3 = 3$

Dengan menerapkanproses Gram-Schmidt terhadap $\{v_3\}$ maka diperoleh :

$$p_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

yaitu basis orthonormal yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_3 = 3$.

Selanjutnya, dengan menggunakan p_1, p_2 dan p_3 sebagai vektor-vektor kolom, maka diperoleh :

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Jadi,dengan mensubstitusikan $x = Py$ pada $q = x^TAx$ akan menghilangkan suku-suku hasil kali silang dan bentuk kuadrat yang baru adalah :

$$q = [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= -3y_2^2 + 3y_3^2$$

Sebagai pemeriksaan bahwa P mendiagonalisasi A secara orthogonal akan dibuktikan P^TAP matriks diagonal

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3/3 & -6/3 \\ 0 & 6/3 & 6/3 \\ 0 & -6/3 & 3/3 \end{bmatrix}$$

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan terakhir terlihat P^TAP adalah matriks diagonal.