BAB II

TEORI DASAR

2.1. Transpose Matriks dan Invers Matriks

Definisi 2.1.1

Apabila didapatkan suatu matriks $A = [a_{ij}]$ berordo mxn, maka transpose dari A adalah matriks A^T berordo nxm yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A, i = 1,2, ..., m, sebagai kolom ke-i dari A^T.

Dengan kata lain $A^T = [a_{ji}]$.

Beberapa sifat matriks transpose :

(i). $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii). $(A^T)^T = A$

(iii). $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$, λ suatu skalar.

(iv). $(AB)^T = B^T A^T$

Definisi 2.1.2

Matriks A dikatakan simetris apabila transposenya sama dengan matriks A atau matriks A simetris bila $A = A^T$.

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A disebut matriks simetris, $A = A^T$

Definisi 2.1.3

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga $AB = BA = I_n$. Matriks B disebut invers matriks A, ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n.

Contoh 2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka :

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Ruang Vektor V Atas Field F

Definisi 2.2.1

Apabila diketahui suatu himpunan V dan suatu field F, maka V disebut ruang vektor atas field F bila memenuhi :

i). $\forall$ u,v $\in$ V, maka u + v $\in$ V

ii). $\forall$ u , v $\in$ V, maka u + v = v + u

iii). $\forall$ u, v, w $\in$ V, maka (u + v) + w = u + (v + w)

iv). $\forall$ u, $\in$ V, terdapat 0 $\in$ V, sedemikian sehingga 0 + u = u + 0 = u

v). $\forall$ u $\in$ V, terdapat -u $\in$ V, sedemikian sehingga (-u) + u = u + (-u) = 0

vi). $\forall$ u, v $\in$ V, dan $\alpha \in$ F, maka α(u + v) = αu + αv vii). $\forall$ u $\in$ V, dan α, $\beta \in$ F, maka $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

viii). $\forall$ u $\in$ V, dan α, $\beta \in$ F, maka $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

ix). $\forall$ u $\in$ V, terdapat $1 \in$ F, sedemikian sehingga $1u = u$.

Contoh 2.3

$R^n = \{ [x_1, x_2, \ldots, x_n], x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n \}$ yaitu himpunan vektor baris berelemen n, dengan operasi :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] + [y_1, y_2, \ldots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n]$$

dan $\alpha[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n]$ adalah ruang vektor terhadap R.

Contoh 2.4

Misal V adalah himpunan semua matriks berordo mxn dengan elemen riil dari suatu field F. Maka V adalah ruang vektor atas F terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar.

2.3. Vektor Bebas Linier dan Basis

Definisi 2.3.1

Himpunan m vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ atas field F disebut tidak bebas linier atau bergantung linier jika terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ elemen F yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$$

Didalam hal lain, himpunan m vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

atas field F disebut bebas linier, jika :

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$

Catatan :

Jika m = 1, artinya himpunan hanya mempunyai satu anggota, yaitu u maka :

i). Jika u = 0 (vektor nol), akan tak bebas linier, karena $\alpha u = 0 \longrightarrow \alpha 0 = 0$ terpenuhi pula $\alpha \neq 0$

ii). Jika $u \neq 0$, akan bebas linier karena $\alpha u = 0$ hanya terpenuhi oleh $\alpha = 0$.

Contoh 2.5

Apabila diketahui vektor-vektor :

$v_1 = [3,\ 1,\ -4]$

$v_2 = [2,\ 2,\ -3]$

Maka vektor-vektor v_1 dan v_2 adalah bebas linier karena persamaan :

$$k_1v_1+k_2v_2 = [3k_1+2k_2,\ k_1+2k_2,\ -4k_1-3k_2] = [0,0,0]$$

sehingga :

$$3k_1 + 2k_2 = 0,\ k_1 + 2k_2 = 0 \text{ dan } -4k_1 - 3k_2 = 0$$

Dari dua persamaan pertama didapatkan $k_1 = 0$ dan maka $k_2 = 0$.

Teorema 2.3.1

Jika himpunan m vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ atas field F terdapat himpunan bagian dari r buah vektor yang tak bebas linier, dimana r lebih kecil dari m, maka vektor-vektor dari keseluruhan m vektor tersebut adalah vektor-vektor yang tak bebas linier.

Bukti :

Misalkan r vektor tak bebas linier, katakanlah u_1, u_2, ..., u_r, maka terdapat skalar - skalar α_1, α_2, ..., α_r elemen F yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, ..., $\alpha_r u_r = 0$.

Diambil $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_m = 0$, maka :

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \alpha_m u_m = 0$,

dimana terdapat $\alpha_i \neq 0$ (α_i antara α_1, α_2, ..., α_r).

Jadi m vektor tersebut tak bebas linier.

Definisi 2.3.2

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ atas suatu field F jika terdapat skalar-skalar α_1, α_2, ..., α_n elemen F sedemikian sehingga :

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Definisi 2.3.3

S himpunan bagian V dikatakan sistem pembentuk V, jika setiap vektor $v \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di S.

Definisi 2.3.4

Misalkan V ruang vektor dan S himpunan bagian V. Maka S dikatakan himpunan basis dari V, jika :

i). S himpunan bebas linier

ii). S sistem pembentuk V

Contoh 2.6

Misalkan S = {[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]} adalah basis dari R^3.

Jelas S bebas linier dan sistem pembentuk R^3 karena :

$$\alpha_1[1,0,0] + \alpha_2[0,1,0] + \alpha_3[0,0,1] = [0,0,0]$$

Berakibat $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Sedangkan $v = \alpha_1[1,0,0] + \alpha_2[0,1,0] + \alpha_3[0,0,1]$, $v \in R^3$.

2.4. Ruang Vektor dengan Inner Product

Definisi 2.4.1

Suatu inner product pada ruang vektor V atas field F adalah fungsi yang mengaitkan setiap pasang vektor $u,v \in V$ ke suatu bilangan riil $\langle u,v\rangle$ sehingga memenuhi :

i). $\langle u,v\rangle$ definit positip, jadi $\langle u,v\rangle > 0$ dan $\langle u,v\rangle = 0$ jika hamya jika u = 0.

ii). $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

iii). $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\rangle = \alpha_1\langle u_1,v\rangle + \alpha_2\langle u_2,v\rangle$

Ruang vektor V riil dimana didefinisikan inner product disebut ruang inner product riil atau ruang Euclidean.

Definisi 2.4.2

Inner product dua vektor riil $u = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ dan $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ pada R^n didefinisikan :

$$\langle u,v\rangle = u_1 v_2 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Panjang atau Norm dari u adalah :

$$\|u\| = \langle u,v\rangle^{1/2}$$

$$= (u_1 v_2 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n)^{1/2}$$

Contoh 2.7

$V = R^3$; $x = [x_1, x_2, x_3]$; $y = [y_1, y_2, y_3]$

$\langle x,y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_3 y_3$ adalah inner product pada R^3.

Contoh 2.8

Apabila didapatkan inner product pada R^n.

$\langle u,v\rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$, dimana : $u = [x_1, x_2]$, $v = [y_1, y_2]$ akan diperlihatkan memenuhi ketiga aksioma dari ruang inner product.

$$\langle u,u\rangle = x_1^{\,2} - 2x_1 x_2 + 3x_2^{\,2} = x_1^{\,2} - 2x_1 x_2 + x_2^{\,2} + 2x_2^{\,2}$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^{\,2} \geq 0$$

Juga $\langle u,u\rangle = 0$ jika hanya jika $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$ sehingga $u = 0$.

Sedemikian sehingga aksioma (i) terpenuhi.

$$\langle u,v\rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 3y_2 x_2$$

$$= \langle v,u\rangle$$

aksioma (ii) terpenuhi.

dan misal $W = [z_1, z_2]$ maka didapatkan :

$$au + bw = a[x_1, x_2] + b[z_1, z_2] = [ax_1 + bz_1, ax_2 + bz_2]$$

maka :

$$\langle au + bw, v\rangle = \langle [ax_1 + bz_1, ax_2 + bz_2], [y_1, y_2]\rangle$$

$$= \langle [ax_1 + bz_1]y_1 - [ax_1 + bz_1]y_2 -$$

$$[ax_2 + bz_2]y_1 + 3[ax_2 + bz_2]y_2\rangle$$
$$= a(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2) +$$
$$b(z_1y_1 - z_1y_2 - z_2y_1 + 3z_2y_2)$$
$$= a\langle u,v\rangle + b\langle w,v\rangle$$

dan aksioma (iii) terpenuhi.

2.5. Basis Orthonormal dan Matriks Orthogonal

2.5.1. Basis Orthonormal

Definisi 2.5.1

Himpunan $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ pada R^n adalah himpunan orthogonal jika $\langle u_i, u_j\rangle = 0$, untuk setiap $i \neq j$.

Definisi 2.5.2

Himpunan $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, dengan $u_1, u_2, \ldots, u_k$ vektor-vektor pada R^n adalah orthonormal jika :

(i). S adalah orthogonal

(ii). Setiap vektor dalam S adalah vektor satuan, yaitu $\|u_i\| = 1$, untuk setiap i.

Contoh 2.9

Himpunan vektor $S = \{u_1,u_2\}$, dengan $u_1 = [0,1,0]$ dan $u_2 = [1,0,1]$ adalah orthogonal, karena :

$\langle u_1,u_2\rangle = 0(1) + 1(0) + 0(1) = 0$

Karena $\|u_1\| = 1$ dan $\|u_2\| = \sqrt{2}$ maka S bukan himpunan orthonormal.

Dengan menormalisasikan masing-masing vektor dari S, diperoleh :

$$u_1' = \frac{u_1}{\|u_1\|} = 1[0,1,0] = [0,1,0]$$

$$u_2' = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ [1,0,1] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\{u_1', u_2'\}$ adalah himpunan yang orthonormal, karena :

(i). $\langle u_1', u_2' \rangle = 0\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 1.0 + 0.\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

(ii). $\|u_1'\| = 1$ dan $\|u_2'\| = 1$

Teorema 2.5.1

Jika $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ adalah himpunan orthogonal dari vektor-vektor tak nol pada R^n, maka S adalah himpunan yang bebas linier.

Bukti :

Dianggap bahwa $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ adalah orthogonal dan $u_j \neq 0$ untuk setiap j, $1 \leq j \leq k$. Kemudian dianggap pula bahwa :

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_k u_k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

Untuk membuktikan bahwa $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ bebas linier, maka akan dibuktikan bahwa :

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$$

Untuk setiap u_j, $1 \leq j \leq k$ dan dari persamaan (2.1) diperoleh :

$$\langle u_j, 0 \rangle = 0$$

$$\langle u_j, c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_j u_j + \ldots + c_k u_k \rangle = 0$$

$$c_1\langle u_j, u_1\rangle + c_2\langle u_j, u_2\rangle + \ldots + c_j\langle u_j, u_j\rangle + \ldots + c_k\langle u_j, u_k\rangle = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

Karena S adalah himpunan vektor orthogonal, $\langle u_j, u_i \rangle = 0$ jika $i \neq j$ sedemikian sehingga persamaan

(2.2) menjadi :

$$c_1.0 + c_2.0 + \dots + c_j\|u_j\|^2 + \dots + c_k.0 = 0$$

$$c_j\|u_j\|^2 = 0$$

Karena vektor u_j tidak sama dengan nol, dan juga $\|u_j\|^2 \neq 0$, maka diperoleh $c_j = 0$, sedemikian sehingga $c_j = 0$ untuk j = 1, 2, ..., k dan S himpunan yang bebas linier.

Teorema 2.5.2

Misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis orthonormal pada R^n, dan misal v sembarang vektor pada R^n, maka memenuhi :

$$v = (v.v_1)v_1 + (v.v_2)v_2 + \dots + (v.v_n)v_n$$

dengan $v.v_1$ adalah koefisien dari v_1.

Bukti :

Misalkan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis orthonormal pada R^n, dan misal v sembarang vektor pada R^n, maka memenuhi :

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah skalar. Karena S adalah orthonormal maka orthogonal sedemikian sehingga $\langle v_i,v_j\rangle = 0$ jika $i \neq j$. Selebihnya, jika S adalah orthonormal, maka setiap vektor v_i pada S adalah vektor satuan, yaitu $\langle v_i,v_i\rangle = \|v_i\|^2 = 1$. Misal i memenuhi $1 \le i \le n$, maka :

$$\begin{aligned}\langle v_i,v\rangle &= \langle v_i, c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_iv_i + \dots + c_nv_n\rangle \\ &= c_1\langle v_i,v_1\rangle + c_2\langle v_i,v_2\rangle + \dots + c_i\langle v_i,v_i\rangle \\ &\quad + \dots + c_n\langle v_i,v_n\rangle\end{aligned}$$

$$= c_1.0 + c_2.0 + \ldots + c_i.1 + \ldots + c_n.0$$
$$= c_i$$

Jadi terbukti koefisien dari v_i adalah

$$c_i = \langle v_i, v\rangle = v_i.v = v.v_i.$$

Conto 2.10

Misalkan

$v_1 = [0,1,0]$, $v_2 = [-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}]$, $v_3 = [\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}]$

Maka $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis orthonormal untuk R^3.

Akan diperlihatkan bahwa $v = [1,1,1]$ adalah kombinasi linier vektor-vektor V. Sesuai teorema 2.5.2 didapatkan :

$\langle v, v_1\rangle = 1$; $\langle v, v_2\rangle = -\frac{1}{5}$; $\langle v, v_3\rangle = \frac{7}{5}$

dan

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \langle v, v_3\rangle v_3$$
$$[1,1,1] = [0,1,0] + (-\tfrac{1}{5})[-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}] + (\tfrac{7}{5})[\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}]$$
$$= [0,1,0] + [\tfrac{4}{25}, 0, -\tfrac{3}{25}] + [\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25}]$$
$$= [1,1,1]$$

Teorema 2.5.3

(Proses Orthonormalisasi Gram-Schmidt).

Misal $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ adalah himpunan vektor yang bebas linier pada R^n. Maka terdapat himpunan vektor orthonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ pada R^n sedemikian sehingga v_i adalah kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ untuk setiap i, $1 \le i \le k$.

Bukti :

Jika himpunan S adalah bebas linier, maka tak satupun anggota-anggotanya sama dengan nol. Sehingga setiap vektor pada S dapat dinormalisasi.

Misal $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ sebuah himpunan vektor-vektor yang bebas linier pada R^n.

Langkah 1. Misal $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

Dengan proses normalisasi, $\|v_1\| = 1$, atau $v_1 . v_1 = 1$

Langkah 2. Misal $v_2' = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1$

Karena $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\langle u_2, v_1 \rangle v_1$ sama dengan cu_1 untuk sembarang skalar c dan $v_2' = u_2 - cu_1 \neq 0$, sehingga u_1 dan u_2 bebas linier.

Selanjutnya v_2' adalah orthogonal pada v_1 untuk :

$$\begin{aligned} \langle v_2', v_1 \rangle &= \langle u_2 - (u_2 . v_1) v_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - \langle (u_2 . v_1) v_1, v_1 \rangle \\ &= (u_2 . v_1) - (u_2 . v_1) . 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sesuai teorema 2.5.1, v_1 dan v_2' adalah bebas linier.

Langkah 3. Misal $v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$

Jelas $\{v_1, v_2\}$ adalah orthonormal.

Diandaikan bahwa $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, untuk $r < k$, yang dibentuk dari $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ dan bahwa G adalah himpunan orthonormal.

Langkah 4.

Misal $v_{r+1}' = u_{r+1} - \langle u_{r+1}, v_1 \rangle v_1 - \langle u_{r+1}, v_2 \rangle v_2 - \ldots -$

$<u_{r+1},v_r>v_r$

Untuk setiap i, $1 \le i \le r$, diperoleh :

$v'_{r+1}.v_i = u_{r+1}.v_i - <u_{r+1},v_1>(v_1.v_i) -$
$<u_{r+1},v_2>(v_2.v_i) - \dots - <u_{r+1},v_i>(v_i.v_i)$
$- \dots - <u_{r+1},v_r>(v_r.v_i)$

Karena $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah orthonormal, $v_iv_j = 0$ jika $i \ne j$, dan $v_i.v_i = 1$, sehingga diperoleh :

$v'_{r+1}.v_i = u_{r+1}.v_i - <u_{r+1},v_1>.0 - <u_{r+1},v_2>.0 - \dots -$
$<u_{r+1},v_i>.1 - \dots - <u_{r+1},v_r>.0$
$= u_{r+1}.v_i - <u_{r+1},v_i>$

$v'_{r+1}.v_i = u_{r+1}.v_i - u_{r+1}.v_i = 0$

sesuai teorema 2.5.1, $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v'_{r+1}\}$ adalah himpunan yang bebas linier.

Langkah 5. Misal $v_{r+1} = \dfrac{v'_{r+1}}{\|v'_{r+1}\|}$

Maka $\{v_1,v_2,\dots,v_{r+1}\}$ adalah himpunan orthonormal.

Dengan meneruskan hingga $r+1 = k$ akan didapatkan $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ orthonormal.

Seperti yang telah dibahas pada definisi 2.3.4, bahwa himpunan n vektor yang bebas linier pada R^n adalah basis untuk R^n. Dan sesuai dengan teorema 2.5.3 didapatkan teorema berikut sebagai akibat teorema tersebut.

Teorema 2.5.4

Misal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ adalah basis pada R^n, maka terdapat basis orthonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pada R^n sedemikian sehingga v_i adalah kombinasi linier dari

$\{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ untuk setiap i, $1 \le i \le n$.

Bukti :

Karena $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis pada R^n, maka $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah himpunan vektor yang bebas linier. Sesuai teorema 2.5.3, maka terdapat himpunan vektor yang orthonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ pada R^n sedemikian sehingga v_i adalah kombinasi linier dari $\{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$ untuk setiap i, $1 \le i \le n$.

Sesuai teorema 2.5.1, karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan vektor orthonormal pada R^n, maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah himpunan yang bebas linier.

Sesuai definisi 2.3.4, maka $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah sebuah basis orthonormal pada R^n.

Contoh 2.11

Terdapat basis $u_1 = [1,0,1]$, $u_2 = [0,1,1]$ dan $u_3 = [1,0,0]$ pada R^3.

Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt pada $\{u_1,u_2,u_3\}$ akan diperoleh :

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$v_2' = u_2 - (u_2.v_1)v_1 = [0,1,1] - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)[1,0,1]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]$$

Dari $\|v_2'\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, diperoleh :

$$v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left[-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)[-1,2,1]$$

$$v_3' = u_3 - (u_3.v_1)v_1 - (u_3.v_2)v_2$$

$$= [1,0,0] - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] -$$

$$\left(-\frac{\;}{\sqrt{6}}\right)\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

$$v_3' = [1,0,0] - \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{1}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)[1,1,-1]$$

Karena $\|v_3'\| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, sehingga diperoleh :

$$v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)[1,1,-1]$$

Sehingga sesuai teorema 2.5.4 maka $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis orthonormal pada R^n.

2.5.2. Matriks Orthogonal

Definisi 2.5.3

Matriks A berordo nxn adalah orthogonal jika kolom-kolom dari A adalah himpunan vektor kolom yang orthonormal.

Teorema 2.5.5

Pernyataan berikut adalah saling ekuivalen :

(i). A adalah orthogonal

(ii). $A^{-1} = A^T$

(iii). A^T adalah orthogonal

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dan (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Misal $A = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, maka :

$(A^TA)_{ij}$ = (baris ke-i dari A^T).v_j = $v_i.v_j$, ini memperlihatkan bahwa A adalah orthogonal jika dan hanya jika $A^TA = I_n$ atau $A^{-1} = A^T$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

A adalah orthogonal jika hanya jika $A^TA = I_n$, maka :

$$(A^TA)^T = (I_n)^T$$
$$A^T(A^T)^T = I_n$$

Jadi A adalah orthogonal jika hanya jika A^T adalah orthogonal.

Teorema 2.5.6

Jika A adalah orthogonal, maka det (A) = ± 1

Bukti :

A orthogonal jika hanya jika A^TA = I, sedemikian sehingga :

$$\det(A^TA) = \det(I)$$
$$\det(A^T).\det(A) = 1$$
$$\{\det(A)\}^2 = 1$$
$$\det(A) = \pm 1$$

Contoh 2.12

Vektor-vektor u = [1,0,0], v = $\left[0,\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ dan w = $\left[0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ adalah vektor-vektor orthonormal. Sedemikian sehingga matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

adalah orthogonal, maka didapatkan :

$$A^{-1} = A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$A^{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6. Ekuivalensi Bentuk Kuadrat

Sebelumnya akan didefinisikan suatu transformasi atau operasi elementer untuk matriks.

Definisi 2.6.1

Transformasi/operasi elementer pada matriks A adalah

I. Penukaran tempat antara dua baris atau dua kolom, yakni baris ke-i dengan baris ke-j atau kolom ke-i dengan kolom ke-j, ditulis $H_{ij}(A)$ atau $K_{ij}(A)$.

II. Memperkalikan baris ke-i atau kolom ke-i dengan skalar α, ditulis $H_i^{(\alpha)}(A)$ atau $K_i^{(\alpha)}(A)$.

III. Menambah baris ke-i dengan α kali baris ke-j atau menambah kolom ke-i dengan α kali kolom ke-j, ditulis $H_{ij}^{(\alpha)}(A)$ atau $K_{ij}^{(\alpha)}(A)$.

Definisi 2.6.2

Dua matriks A dan B yang berordo sama dikatakan ekuivalen bila salah satu matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks yang lain dengan menggunakan transformasi elementer.

Pengertian lain yang ekuivalen dengan definisi 2.6.2 di atas diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.6.3

Dua matriks A dan B yang berordo sama disebut ekuivalen jika $B = PAQ$ untuk suatu matriks P dan Q yang non singular atau matriks elementer.

Untuk relasi ekuivalensi ini diberikan simbol : $\sim$. $A \sim B$ mempunyai arti A ekuivalen dengan B. Mudah dilihat $\sim$ adalah relasi ekuivalen, yaitu :

(i). $A \sim A$ untuk setiap matriks A

(ii). $A \sim B$ maka $B \sim A$

(iii). $A \sim B$ dan $B \sim C$ maka $A \sim C$

Contoh 2.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{31}^{(-3)}}{\overset{H_{21}^{(-2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \underset{H_{3}^{(-1/4)}}{\overset{H_{2}^{(-1/3)}}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{H_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

ditulis $A \sim B$ atau $B = PAQ$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6.4

Dua matriks A dan B yang berordo sama disebut kongruen jika $P^TAP = B$ untuk suatu matriks P yang non singular.

Jelas kongruensi adalah suatu kasus khusus dari ekuivalensi. Bilamana P dinyatakan sebagai hasil kali matriks elementer kolom, maka P^T adalah hasil kali matriks elementer baris yang sama dalam urutan terbalik, sehingga

A dan B kongruen dengan syarat A dapat direduksi menjadi B dengan memakai sebarisan pasangan-pasangan transformasi elementer, tiap pasang terdiri atas suatu transformasi elementer baris yang diikuti oleh transformasi elementer kolom yang sama.

Contoh 2.14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

maka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \underset{H_{31}^{(-4)},K_{31}^{(-4)}}{\overset{H_{21}^{(2)},K_{21}^{(2)}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\overset{H_{32}^{(4)},K_{32}^{(4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = B$$

atau $B = P^TAP$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6.5

Bentuk kuadrat dalam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ pada notasi matriks dapat ditulis

$$x^TAx = [x_1\ x_2 \ldots\ x_n]\ A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dengan A matriks simetris berordo nxn.

Definisi 2.6.6

Dua bentuk kuadrat x^TAx dan y^TBy disebut ekuivalen jika dan hanya jika terdapat matriks tak singular P yang memenuhi $x = Py$ dan $B = P^TAP$

Dari definisi 2.6.6 di atas dapat diperlihatkan bahwa dua bentuk kuadrat disebut ekuivalen jika matriks - matriksnya kongruen, yaitu

$$x^TAx = (Py)^TA(Py) = y^TP^TAPy = y^T(P^TAP)y = y^TBy$$

Contoh 2.15

$$x^TAx = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$y^TBy = [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

maka x^TAx dan y^TBy adalah ekuivalen karena sesuai contoh 2.11, matriks A dan B kongruen.

2.7. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.7.1

Jika A adalah suatu matriks bujursngkar berordo n dan λ adalah skalar yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$, untuk suatu vektor kolom $x \neq 0$, maka λ adalah suatu nilai eigen dari A dan vektor kolom x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Dari persamaan $Ax = \lambda x$ pada definisi di atas didapatkan :

$$\lambda x - Ax = (\lambda I - A)x = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Sistem persamaan homogen di atas mempunyai solusi tak trivial jika dan hanya jika det $(\lambda I - A) = 0$. Penguraian determinan ini menghasilkan suatu polinom $\phi(\lambda)$ berderajad n dalam λ yang disebut sebagai polinom karakteristik matriks A. Persamaan $\phi(\lambda) = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks A.

Contoh 2.16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

maka persamaan karakteristik matriks A adalah

$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -1$

Jadi ada dua nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -1$

Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 4$.

Ambil:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_1 I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{cukup diambil satu persamaan}$$

Misal diambil $3x_1 - 2x_2 = 0$, maka dapat dipilih $x_2 = 3c$.

Dengan c konstanta sembarang yang tidak nol, sehingga :

$$x = \begin{bmatrix} 2c \\ 3c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jika diambil c = 1, maka :

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$.

Ambil:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

yang memenuhi $(\lambda_2 I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan terakhir terakhir didapatkan :

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -3x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{cukup diambil satu persamaan}$$

Misal diambil $-2x_1 - 2x_2 = 0$, maka dapat dipilih $x_2 = c$ sehingga $x_1 = -c$

Dengan c konstanta senbarang yang tidak nol, sehingga :

$$x = \begin{bmatrix} -c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika diambil c = 1, maka :

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$