BAB III

COATES GRAPH

3.1. PENGERTIAN COATES GRAPH

Suatu penggambaran sistem persamaan linier dalam bentuk graph berarah pertama kali diperkenalkan oleh Mason (1953) dari digraph tersebut dikenal sebagai *SIGNAL-FLOW GRAPH*. Alternatif lain dari penggambaran sistim persamaan linier dalam bentuk directed graph disebut sebagai *FLOW GRAPH* yang diuraikan oleh *COATES* (1959). Untuk selanjutnya signal flow graph akan disebut sebagai *MASON GRAPH* dan *FLOW GRAPH* akan disebut sebagai *COATES GRAPH*.

Definisi 3.1.1. :

Diberikan matriks bujur sangkar $A=[a_{ij}]$ dengan ordo n. *Coates graph* yang dinotasikan dengan $G_c(A)$ adalah suatu graph berarah dengan n node, di mana setiap edge berarahnya memiliki bobot dan node-nodenya diberi label bilangan bulat 1 sampai n, sedemikian hingga jika elemen matriks $a_{ji} \neq 0$ maka terdapat edge berarah dari node i ke node j dengan bobot a_{ji}, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Dan jika $a_{ji} = 0$ maka tidak ada edge berarah dari node i ke node j.

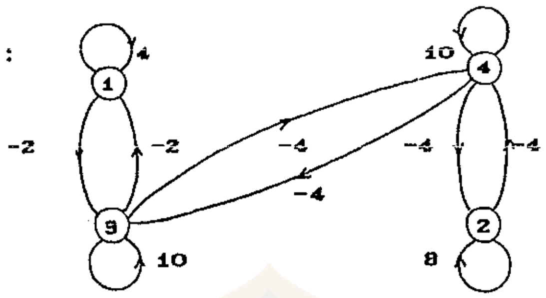
Sehingga proses pengubahan matriks $A=[a_{ij}]$ ke dalam bentuk Coates Graph dengan cara mentranspose matriks tersebut. Dan transpose dari matriks $A=[a_{ij}]$ merupakan matriks bobot dari Coates Graph $G_c(A)$.

Contoh 3.1.1. :

Diberikan suatu matriks $A=[a_{ij}]$ dengan ordo 4 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$G_c(A)$:



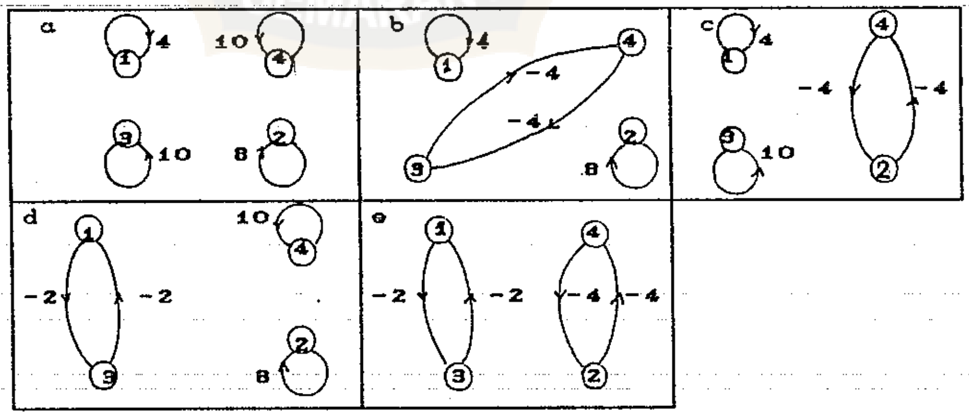
Gambar 3.1.1. Coates Graph $G_c(A)$ yang associated dengan matriks A.

Definisi 3.1.2.

1-Faktor dari suatu graph berarah dinotasikan dengan h merupakan spanning subgraph dari $G_c(A)$ yang merupakan regular digraph dengan derajat 1.

Contoh 3.1.2. :

Coates pada gambar 3.1.1. mempunyai 5 buah h :



Gambar 3.1.2. 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$

Sesuai definisi 2.3.7. jelas bahwa 1-faktor merupakan himpunan node-disjoint directed circuit yang memuat semua node dalam $G_c(A)$.

Jika bobot dari edge berarah (i,j) dalam G_d kita notasikan dengan f(i,j) di mana i sebagai node awal dan j sebagai node akhir (i,j=1,2,... n). Maka $f(G_s)$ adalah perkalian seluruh bobot yang dimiliki oleh G_s, di mana G_s adalah subgraph dari directed graph G_d. Atau ditulis sebagai : $f(G_s) = \prod_{i,j \in V_s} f(i,j)$

Contoh 3.1.3. :

Ambil salah satu 1-faktor pada gambar 3.1.2.e. yang merupakan subgraph dari directed graph $G_c(A)$ pada gambar 3.1.1. Dengan $E_s = \{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$ maka harga $f(G_s) = f(1,3).f(3,1).f(2,4).f(4,2)$

$$f(G_s) = -2.-2.-4.-4 = 64$$

Karena contoh subgraph di atas merupakan 1-faktor (h) dari directed graph $G_c(A)$ maka f(h) pada contoh di atas adalah : $f(h)=a_{13}a_{31}a_{24}a_{42}=64$

Lemma 3.1.1.:

Perkalian elemen-elemen matriks A yang tidak sama dengan nol dan sesuai dengan permutasi $j_1,j_2,...j_n$, berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$ yang associated dengan matriks A.

Bukti :

Diberikan suatu perkalian elemen-elemen matriks A : $a_{1j1}.a_{2j2},... a_{njn} \neq 0$ (di mana $j_1,j_2,...,j_n$ adalah suatu permutasi) menurut definisi 3.1.1. merupakan bobot-bobot dari edge berarah : $(j_1,j_2),(j_2,2),...,(j_n,n)$ di mana j_i sebagai node awal dan i sebagai node akhir (i=1,2,...n). Dan gambar directed graph dari barisan edge berarah tersebut merupakan spanning subgraph dari $G_c(A)$ karena memuat semua node dalam $G_c(A)$ (di mana $G_c(A)$ adalah Coates Graph yang associated dengan matriks A). Banyaknya edge pada tiap pasang nodenya sama yaitu 1 dan tiap-tiap pasang nodenya berlaku node awal dan node akhir maka banyaknya outdegree dan indegree pada tiap-tiap nodenya sama yaitu 1. Sehingga menurut definisi 2.3.17. barisan edge berarah tersebut merupakan regular digraph dengan derajat 1. Karena merupakan spanning subgraph dari $G_c(A)$ dan merupakan regular digraph derajat 1, maka menurut definisi 3.1.2. barisan edge berarah tersebut adalah 1-faktor dari $G_c(A)$.

Terbukti bahwa perkalian elemen-elemen matriks A yang tidak sama dengan nol dan sesuai dengan permutasi $j_1, j_2, \ldots j_n$, berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$.

Contoh 3.1.4. :

Diberikan suatu matriks $A=[a_{ij}]$ yang associated dengan $G_c(A)$ pada gambar 3.1.1. :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Pandang gambar 3.1.2. yang merupakan 1-faktor (h) dari $G_c(A)$. Maka perkalian elemen-elemen $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{4j_4} \neq 0$ dari matriks A yang berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) adalah :

* $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \neq 0$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor pada gambar 3.1.2.a. dengan f(h) = $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

* $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \neq 0$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor pada gambar 3.1.2.b. dengan f(h) = $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$
* $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \neq 0$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor pada gambar 3.1.2.c. dengan f(h) = $a_{11}a_{33}a_{24}a_{42}$
* $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \neq 0$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor pada gambar 3.1.2.d. dengan f(h) = $a_{13}a_{31}a_{22}a_{44}$
* $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \neq 0$ berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor pada gambar 3.1.2.e.. dengan f(h) = $a_{13}a_{31}a_{24}a_{42}$

Jumlah 1-faktor (h) yang dimiliki oleh $G_c(A)$ dapat dicari dengan permanent matriks $C(G_c)$, tetapi terlebih dahulu akan diberikan pengertian mengenai matriks $C(G_d)$ dan permanent dari suatu matriks.

Definisi 3.1.3. :

Diberikan suatu graph berarah G_d dengan n buah node, maka $C(G_d)=[C_{ij}]$ adalah matriks berukuran nxn yang berhubungan dengan G_d, di mana elemen-elemen dari $C(G_d)$ yaitu :

C_{ij} = K, jika terdapat K buah edge berarah dari node i ke node j dalam G_d.
= 0, jika tidak terdapat edge berarah dari node i ke node j dalam G_d.

Contoh 3.1.5. :

Diberikan Coates Graph (gambar 3.1.1.) yang associated dengan matriks A (contoh 3.1.1.) maka matriks $C(G_c)$ tersebut adalah :

$$C(G_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks $C(G_d)$ dari suatu digraph G_d dapat diperoleh dengan mengganti elemen-elemen non zero dari matriks bobot G_d dengan 1.

Contoh 3.1.6. :

Pandang $G_c(A)$ gambar 3.1.1. yang mempunyai matriks bobot A^T, maka matriks $C(G_c)$ dari matriks bobot tersebut adalah :

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{bmatrix} \qquad C(G_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 3.1.4. :

Permanent dari matriks bujur sangkar A dinotasikan dengan *per A* didefinisikan sama dengan determinan matriks, tetapi semua tandanya positif. Dengan kata lain : per A = $\Sigma_j \, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$, di mana :

$a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$: perkalian elemen-elemen matriks A, dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ suatu permutasi.

Σ_j : penjumlahan dari j buah perkalian elemen-elemen matriks A.

Contoh 3.1.7. :

Diberikan suatu matriks A dengan ordo 3 :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka : per A $= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{11}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}$

$= (-3)(-2).3 + (-3)(-1) + 4.(-2).2$

$= 18 + 3 + (-16)$

$= 5$

Teorema 3.1.1. :

Banyaknya 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$ yang associated dengan matriks A sama dengan harga permanent matriks $C(G_c)$.

Bukti :

Diberikan matriks $A=[a_{ij}]$ ordo n yang associated dengan $G_c(A)$, di mana a_{ij} adalah elemen matriks A yang merupakan bobot edge berarah dalam $G_c(A)$. Dari definisi 3.1.4. : per A $= \Sigma_j\ a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ di mana Σ_j adalah penjumlahan dari j buah perkalian elemen-elemen A. Sesuai Lemma 3.1.1. bahwa perkalian elemen-elemen A yang tidak sama dengan nol berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$. Sehingga didapat : $\Sigma_j\ a_{1j_1}a_{2j_2} \ldots\ a_{nj_n} = \Sigma_h\ a_{1j_1}a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} + \Sigma_l a_{1j_1}a_{2j_2} \ldots\ a_{nj_n}$ di mana Σ_h adalah penjumlahan dari h buah 1-faktor dalam $G_c(A)$ dan Σ_l adalah penjumlahan l buah perkalian elemen-elemen matriks yang sama dengan 0. Untuk $a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots\ a_{nj_n} = 0$ Maka $\Sigma_l\ a_{1j_1}, a_{2j_2} \ldots\ a_{nj_n} = 0$.

Jadi $\Sigma_j a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots\ a_{nj_n} = \Sigma_h a_{1j_1}, a_{2j_2} \ldots\ a_{nj_n}$

$C(G_c)$ dapat diperoleh dari matriks bobot directed graph $G_c(A)$ dengan mengganti elemen-elemen non zero dengan 1. Sehingga perkalian dari elemen-elemen matriks $C(G_c)$ dari Coates Graph $G_c(A)$ akan sama dengan 1, atau $a_{1j_1}.a_{2j_2}\ldots\ a_{nj_n} = 1$ untuk $a_{ij_i} \neq 0$ (i sebarang). Sesuai sifat dari determinan matriks bahwa det A = det A^T maka per A = per A^T sehingga : per $C(G_c) = \Sigma_h\ a_{1j_1}.a_{2j_2}\ldots\ a_{nj_n} = \Sigma_h(1)$ atau sama dengan jumlah 1-faktor (h). Teorema terbukti.

Contoh 3.1.8. :

Pandang $G_c(A)$ gambar 3.1.1. yang mempunyai 1-faktor gambar 3.1.2. maka jumlah h dalam $G_c(A)$ = per $C(G_c)$ di mana matriks $C(G_c)$ terdapat dalam contoh 3.1.6.

$$\text{per } C(G_c) = \text{Per} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$$

$$= 1.1.1.1 + 1.1.1.1 + 1.1.1.1 + 1.1.1.1 + 1.1.1.1$$

$$= 5$$

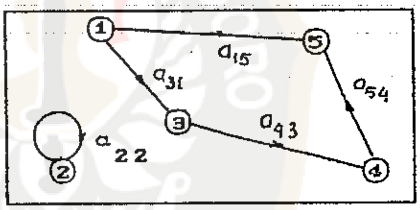
3.2. EVALUASI DETERMINAN DENGAN METODE COATES

Definisi 3.2.1. :

a_{ji} adalah bobot tiap edge berarah dari sirkuit berarah dalam 1-faktor (h) yang panjangnya W, diperlukan W-1 jalan untuk mengubah indeks i sebagai node awal menjadi indeks j sebagai node akhir.

Contoh 3.2.1. :

Diberikan 1-faktor (h) yang merupakan subgraph dari directed graph G_d. Di mana 1-faktor (h) tersebut memiliki 5 node dan 2 sirkuit berarah.



Gambar 3.2.1. 1-faktor dari suatu digraph

Ambil salah satu sirkuit berarah : (1,3),(3,4),(4,5),(5,1) dengan panjang W = 4. Edge-edge berarahnya memiliki bobot :

$a_{31}a_{43}a_{54}a_{15}$ maka akan diperlukan W - 1 = 3 jalan untuk mengubah indeks i, ambil i = 1 sebagai node awal menuju indeks j = 1 sebagai node akhir.

Teorema 3.2.1. :

Jika diberikan $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \neq 0$ merupakan perkalian elemen-elemen matriks A yang associated dengan directed graph $G_c(A)$, di mana $j_1, j_2, \dots j_n$ permutasi. Maka tanda permutasi :

$$\sigma(j_1, j_2, \dots , j_n) = (-1)^{n-L}$$

Di mana :

n : adalah banyaknya node dalam $G_c(A)$

L : banyaknya sirkuit berarah dalam 1-faktor (h) dari $G_c(A)$

Bukti :

Akan dibuktikan dengan sirkuit-sirkuit berarah dalam 1-faktor (h). Menurut Lemma 3.1.1. perkalian elemen-elemen $a_{1j_1}\ a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \neq 0$ dari matriks A (di mana $j_1, j_2, \ldots, j_n$ suatu permutasi) berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor dalam $G_c(A)$ yang mempunyai edge berarah : $(j_1,1),(j_2,2),\ldots,(j_n,n)$. Karena dalam 1-faktor (h) memuat sirkuit berarah dengan panjang berbeda-beda, maka barisan edge tersebut juga terdiri dari sirkuit-sirkuit berarah dengan panjang yang berbeda-beda. Ambil sirkuit berarah dengan panjang w : (i_1,i_2), $(i_2,i_3),\ldots,(i_w,i_1)$. Menurut definisi 3.2.1. ada W-1 jalan untuk mengubah indeks i node awal menjadi indeks j node akhir atau w-1 jalan untuk mengubah indeks kolom menjadi indeks baris. Karena node akhr dari sirkuit berarah tersebut merupakan permutasi $j_1,j_2,\ldots,j_w$(di mana $w < n$) maka dapat dikatakan bahwa permutasi tersebut mempunyai w-1 inversi. Apabila dalam 1-faktor (h) terdapat L buah node-disjoint directed circuit yang masing-masing panjangnya $w_1,w_2,\ldots,w_L$, maka diperlukan : (w_1-1) + $(w_2-1) + \ldots + (w_L-1)=(w_1+w_2+\ldots+w_L)-L$ jalan untuk mengubah indeks kolom menjadi indeks baris.

Karena banyaknya edge berarah dalam sirkuit berarah sama dengan banyaknya node maka $(w_1+w_2+\ldots+w_L)$ sama dengan jumlah node dalam 1-faktor (h). Dan karena 1-faktor merupakan spanning subgraph maka jumlah nodenya sama dengan jumlah node $G_c(A)$ yaitu n sehingga : $(w_1+w_2+\ldots+w_L)-L = n-L$. Maka :

$$(-1)^{n-L} = \begin{cases} -1, & \text{jika jumlah } n-L \text{ ganjil} \\ 1 & \text{jika jumlah } n-L \text{ genap} \end{cases} \quad \ldots\ldots (1)$$

Begitu pula dalam permutasi $j_1,j_2,\ldots,j_n$ yang merupakan node akhir dari 1-faktor (h) akan mempunyai n-L inversi. Maka sesuai definisi 2.1.3. dan definisi 2.1.2. :

$$\sigma(j_1,j_2,\ldots,j_n) = \begin{cases} -1, & \text{jika jumlah inversi } (n-L) \text{ ganjil} \\ +1, & \text{jika jumlah inversi } (n-L) \text{ genap} \end{cases} \quad (2)$$

dari persamaan (1) dan (2) didapat :

$\sigma(j_1,j_2, \ldots , j_n) = (-1)^{n-L}$

Teorema terbukti.

Contoh 3.2.2. :

Pandang 1-faktor (h) pada gambar 3.1.2.b, menurut Lemma 3.1.1. 1-faktor tersebut mempunyai $f(h) = a_{11} a_{22}a_{34}a_{43}$ dengan permutasi (1,2,4,3). Menurut definisi 2.1.3. dan definisi 2.1.2. permutasi tersebut mempunyai jumlah inversi = 1 sehingga disebut permutasi ganjil jadi $\sigma(j_1,j_2, \ldots , j_n) = \sigma(1,2,4,3) = -1$. Sedang 1-faktor pada gambar 3.1.2.b. mempunyai n = 4, L = 3 sehingga : $\sigma(1,2,4,3) = (-1)^{n-L} = (-1)^{4-3} = -1$.

Teorema 3.2.2. :

Misalkan $G_c(A)$ adalah Coates Graph yang associated dengan matriks A ordo n, maka determinan matriks A:

$$\boxed{\det A = (-1)^n \Sigma_h (-1)^{-L} f(h)}$$

Di mana :

n : jumlah node dalam $G_c(A)$

Σ_h : penjumlahan h buah 1-faktor dalam $G_c(A)$

L : banyaknya sirkuit berarah dalam 1-faktor (h)

f(h) : perkalian bobot-bobot yang dimiliki dalam 1-faktor (h)

Bukti :

Pada definisi 2.1.4. dinyatakan bahwa :

$$\det A = |A| = \Sigma\, \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

Di mana :

Σ : penjumlahan n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A

$\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)$: tanda permutasi $j_1, j_2, \ldots, j_n$

$a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots , a_{nj_n}$: perkalian elemen-elemen matrik A

Pada Coates Graph $G_c(A)$ $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ merupakan bobot-bobot dalam edge berarah yang menghubungkan node-node yang membentuk spanning subgraph dari $G_c(A)$ dan merupakan regular digraph derajat 1 atau 1-faktor dari $G_c(A)$. Sesuai Lemma 3.1.1. diperoleh $f(h) = a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$.

Sedangkan menurut teorema 3.2.1. $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)$

dapat ditentukan oleh sirkuit-sirkuit berarah dalam 1-faktor yaitu : $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (-1)^{n-L}$. Menurut teorema 3.1.1. : perkalian elemen-elemen matriks A : $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \neq 0$, ($j_1, j_2, \ldots, j_n$ permutasi), berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) dalam $G_c(A)$ yang associated dengan matriks A. Sehingga banyaknya perkalian elemen-elemen matriks A sama dengan banyaknya 1-faktor dalam $G_c(A)$ ditambah banyaknya perkalian elemen-elemen matriks A yang sama dengan nol. Jadi determinan matriks A sama dengan :

$$\Sigma\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} =$$

$$\Sigma_h \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} +$$

$$\Sigma_l \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

Di mana :

Σ_h : penjumlahan h buah 1-faktor dalam $G_c(A)$

Σ_l : penjumlahan l buah perkalian elemen-elemen matriks A yang sama dengan nol

Untuk $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} = 0$ maka

$$\Sigma\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} = 0.$$

Sehingga : $\Sigma\sigma\ (j_1, j_2, \ldots, j_n)\ a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} =$

$$\Sigma_h\ (j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

$$\det A = \Sigma_h (-1)^{n-L} f(h)$$

$$\det A = (-1)^n\ \Sigma_h (-1)^{-L}\ f(h)$$

Teorema terbukti.

Contoh 3.2.3. :

Pandang matriks $A=[a_{ij}]$ pada contoh 3.1.1. yang associated dengan $G_c(A)$ gambar 3.1.1. yang memiliki 1-faktor gambar 3.1.2.

h	node-node dalam sirkuit ( )	L	f(h)
a	(1),(2),(3 , 4)	4	4.8.10.10 = 3200
b	(1),(2),(3 , 4)	3	4.8.-4.-4 = 512
c	(1),(3),(2),(4)	3	4.10.-4.-4 = 640
d	(1,3),(2),(4)	3	-2.-2.8.10 = 320
e	(1,3),(2,4)	2	-2.-2.-4.-4 = 64

$$|A| = (-1)^n \Sigma_h (-1)^{-L} f(h)$$

$$= (-1)^4 \{(-1)^4 3200 + (-1)^3 512 + (-1)^3 640 + (-1)^3 320 + (-1)^2 64\}$$

$$|A| = 1792$$

3.3. EVALUASI KOFAKTOR DENGAN METODE COATES

Untuk mencari nilai kofaktor dengan metode Coates Graph terlebih dahulu akan diberikan pengertian mengenai 1-faktorial Connection H_{ij} dalam $G_c(A)$.

Definisi 3.3.1. :

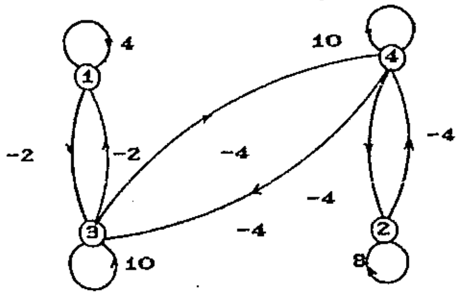
1-Factorial Connection dari node i ke node j $(i \neq j)$ dalam G_d yang dinotasikan dengan H_{ij} adalah suatu spanning subgraph yang mengandung :

1. Path berarah dari node i ke node j.
2. Himpunan sirkuit berarah yang node disjoint (jika ada) yang memuat semua node dalam $G_c(A)$ kecuali node-node yang termasuk dalam path ber-

arah dari node i ke node j.

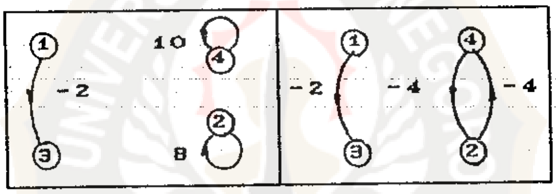
Contoh 3.3.1. :

Pandang Coates Graph $G_c(A)$:

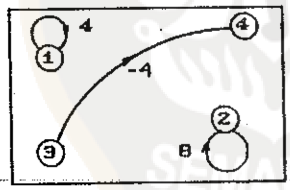


1-faktorial connection dari node i ke node j dari Coates Graph $G_c(A)$:

H_{13} :



H_{34}



Gambar 3.3.1. 1-faktorial connection dalam $G_c(A)$

Definisi 3.3.2. :

Δ_{ij} adalah kofaktor elemen a_{ij} dari matriks A ordon, maka A_α adalah matriks yang diperoleh dari matriks bujur sangkar A ordo n dengan menggantikan kolom ke j dengan kolom nol kecuali pada elemen baris ke i kolom ke j diganti dengan 1.

Contoh 3.3.2. :

Diberikan matriks A ordo 4 dan kofaktor elemen a_{13} :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}|$ di mana

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Maka matriks A_α :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.3.1. :

Δ_{ij} adalah kofaktor elemen a_{ij} dari matriks bujur sangkar A, yang merupakan determinan dari matriks A_α.

Bukti :

Sesuai teorema 2.1.1. maka determinan dari matriks A_α :

$$|A_\alpha| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ \Delta_{ij}$$
$$= a_{1j}\ \Delta_{1j} + \ldots + a_{ij}\ \Delta_{ij} + \ldots + a_{nj}\ \Delta_{nj}$$

(merupakan penguraian kolom ke j, dengan j sebarang). Sesuai definisi 3.3.2. maka :

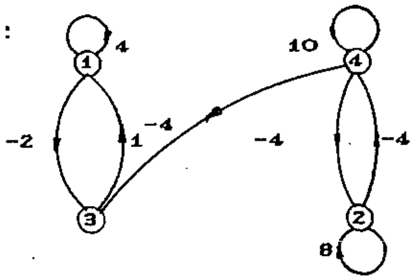
$$|A_\alpha| = 0.\Delta_{1j} + \ldots + 0.A_{i-1\,j} + 1.\Delta_{ij} + 0.A_{i+1\ j} + \ldots + 0.A_{nj}$$

$|A_\alpha| = \Delta_{ij}$. Terbukti

Kita dapat membuat Coates Graph dari matriks A_α dengan terlebih dahulu membuat transposenya :

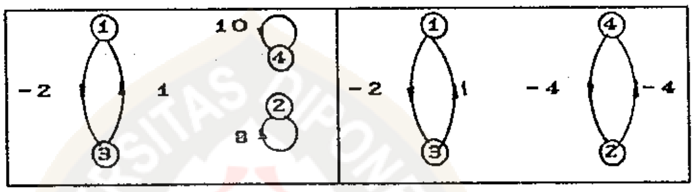
$$A_\alpha^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$G_c(A_\alpha)$:



Gambar 3.3.2. Coates Graph $G_c(A_\alpha)$

1-faktor (h_α) dari $G_c(A_\alpha)$ adalah :



Gambar 3.3.3. h_α dari $G_c(A_\alpha)$

$G_c(A_\alpha)$ dapat langsung diperoleh dari $G_c(A)$ dengan menghilangkan edge berarah yang memiliki node j sebagai initial node (termasuk self-loop pada node j, jika ada) dan menambahkan sebuah edge berarah dari node-j ke node-i dengan bobot 1.

Teorema 3.3.2. :

$G_c(A)$ adalah Coates graph yang associated dengan matriks A ordo n, maka :

$$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \Sigma_{H_{ij}} (-1)^{-L_H} f(H_{ij})} \quad , i \neq j$$

Di mana :

$\Sigma_{H_{ij}}$: penjumlahan sebanyak 1-factorial connection dalam $G_c(A)$

Δ_{ij} : kofaktor elemen a_{ij} dari matriks A

H_{ij} : 1-factorial connection dari node-i ke node-j dalam $G_c(A)$

n : banyaknya node dalam $G_c(A)$

L_H : banyaknya sircuit berarah dalam H_{ij}

$f(H_{ij})$: perkalian bobot-bobot dalam H_{ij}

Bukti :

Pandang suatu 1-factorial connection H_{ij} dari node i ke node j dalam $G_c(A)$. Jika pada H_{ij} ditambahkan sebuah edge berarah yang menghubungkan node-j ke node-i dengan bobot 1 maka sirkuit berarahnya bertambah 1. Sehingga H_{ij} tersebut menjadi h_α yang merupakan 1-faktor dari $G_c(A_\alpha)$ yang associated dengan matriks A_α.

Sesuai teorema 3.2.2. determinan matriks A_α adalah:

$$|A_\alpha| = (-1)^n \Sigma_{h_\alpha} (-1)^{-L_\alpha} f(h_\alpha)$$

Dengan menghilangkan sebuah edge berarah tambahan yang menghubungkan node j ke nodei dengan bobot 1, maka jumlah sirkuit dalam h_α berkurang satu, dengan kata lain :

$L_H = L_{h_\alpha} - 1 \longrightarrow L_{h_\alpha} = L_H + 1$. Karena bobot edge berarah yang dihilangkan = 1, maka : $f(h_\alpha) = f(H_{ij})$ sehingga :

$$|A_\alpha| = (-1)^n \Sigma_{H_{ij}} (-1)^{-(L_H+1)} f(H_{ij})$$

Dalam teorema 3.3.1. disebutkan bahwa $\Delta_{ij} = |A_\alpha|$ sehingga : $\Delta_{ij} = (-1)^n \Sigma_{H_{ij}} (-1)^{-L_H-1} f(H_{ij})$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \Sigma_{H_{ij}} (-1)^{-L_H} f(H_{ij})$$

Teorema terbukti.

Contoh 3.3.3. :

Akan dihitung Δ_{ij} dari Coates Graph gambar 3.3.1. :

H_{13}	Node-node dalam H_{13}	L_H	$f(H_{13})$
1	1,3,(2),(4)	2	-2 . 8 . 10 = -160
2	1,3,(2,4)	1	-2 . -4 . -4 = -32

$\Delta \quad = (-1)^{4-1} \{(-1)^2 \cdot (-160) + (-1)^1 (-32)\} = 128$

H_{34}	Node-node dalam H_{34}	L_H	$f(H_{34})$
	(1),(2),3,4	2	4 . -4 . 8 = -128

$\Delta_{34} = (-1)^{4-1} \{(-1)^2 \cdot -128\} = 128$

Teorema 3.3.3. :

M_{ii} adalah matriks berukuran (n-1)x(n-1) yang diperoleh dari matriks A ordo n dengan menghilangkan baris ke i dan kolom ke i, dan $G_c(M_{ii})$ adalah Coates Graph yang associated dengan matriks M_{ii}.

Maka :

$$\boxed{\Delta_{ii} = (-1)^{n-1} \Sigma_{h'} (-1)^{-L_{h'}} f(h')}$$

Di mana :

Δ_{ii} : kofaktor elemen a_{ii} dari matriks A

(n-1) : jumlah node dalam $G_c(M_{ii})$

h' : 1-faktor dalam $G_c(M_{ii})$

$L_{h'}$: jumlah circuit berarah dalam $G_c(M_{ii})$

$\Sigma_{h'}$: penjumlahan sebanyak 1-faktor dalam $G_c(M_{ii})$

$f(h')$: perkalian bobot-bobot dalam h'

Bukti :

Δ_{ii} adalah kofaktor elemen a_{ii} dari matriks A, sesuai definisi 2.1.6. maka :

$$\Delta_{ii} = (-1)^{i+i} |M_{ii}|$$
$$= 1 \cdot |M_{ii}|$$
$$\Delta_{ii} = |M_{ii}|$$

Dan dari teorema 3.2.2. bahwa :

$$\det A = (-1)^n \Sigma_h (-1)^{-L} f(h), \text{di mana :}$$

A : matriks yang associated dengan $G_c(A)$

n : jumlah node dalam $G_c(A)$

h : 1-faktor dalam $G_c(A)$

L : jumlah circuit berarah dalam $G_c(A)$

M_{ii} adalah matriks berukuran (n-1)x(n-1) yang diperoleh dari matriks A ordo n dengan menghilangkan baris ke i kolom ke i. Maka determinan matriks M_{ii} yang associated dengan $G_c(M_{ii})$ adalah :

$$\det M_{ii} = |M_{ii}| = (-1)^{n-1} \Sigma_{h'} (-1)^{-L_{h'}} f(h)$$

di mana :

n-1 : jumlah node dalam $G_c(M_{ii})$

h′ : 1-faktor dalam $G_c(M_{ii})$

$L_{h'}$: jumlah circuit ke arah dalam $G_c(M_{ii})$

f(h′) : perkalian bobot-bobot dalam h′

Karena $|M_{ii}| = \Delta_{ii}$ maka :

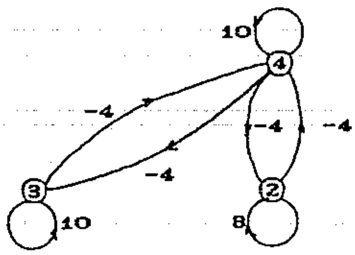
$$\Delta_{ii} = (-1)^{n-1} \Sigma_{h'} (-1)^{-L_{h'}} f(h')$$

Teorema terbukti.

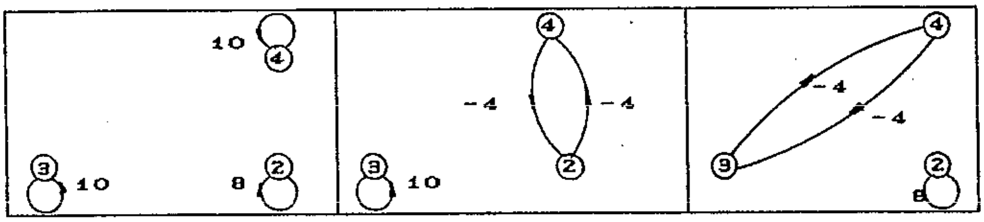
Contoh 3.3.4. :

Diberikan matriks A dan sub matriks M_{11}:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 10 \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & -4 \\ -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$



Gambar 3.3.4. Coates Graph $G_c(M_{11})$



Gambar 3.3.5. Himpunan 1-faktor (h′) dalam $G_c(M_{11})$

Maka kofaktor Δ_{11} dari matriks A adalah :

$$\Delta_{11} = (-1)^{n-1}\ \Sigma_h(-1)^{-L_{h'}}\ f(h')$$

$$= (-1)^3\ \{(-1)^3(10.10.8)+(-1)^2\ (10.-4.-4)+(-1)^2+$$

$$(-1)^2\ (-4.-4.8)\}$$

$$= (-1)^3\ \{-800 + 160 + 128\}$$

$$\Delta_{11} = 512$$

Teorema 3.2.2. :

Banyaknya 1-faktorial connection (H_{ij}) dari node i ke node j dalam $G_c(A)$ sama dengan harga permanent dari matriks $C(G_c)_{ji}$ yang diperoleh dari matriks $C(G_c)$dengan menghilangkan baris ke j dan kolom ke i

Bukti :

Pembuktian teorema 3.3.4. akan diberikan dalam 2 langkah. Langkah pertama akan dibuktikannya bahwa : $C(G_c)_{ji}$ dapat diperoleh dari matriks $C(G_c)$ dengan menghilangkan baris ke j kolom ke i.

M_{ij} adalah sub matriks berukuran (n-1)x(n-1) yang diperoleh dari matriks A ordo n dengan menghilangkan baris ke i kolom ke j. Sehingga bila diberikan matriks transpose dari A yaitu $A^T = [a_{ji}]$ maka untuk memperoleh M_{ij}^T adalah dengan menghilangkan baris ke j dan kolom ke i dari A^T. Diberikan Coates

Graph $G_c(A)$ yang associated dengan matriks A, dengan matriks bobot A^T. Dan $G_c(M_{ij})$ adalah Coates Graph yang associated dengan matriks M_{ij}, dengan matriks bobot M_{ij}^T. Sesuai definisi 3.1.3. $C(G_c)$ dapat diperoleh dari matriks bobotnya (yaitu A^T) dengan mengganti elemen non zero dengan 1. Demikian juga $C(G_c(M_{ij}))$ dapat diperoleh dari matriks bobot $G_c(M_{ij})$ yaitu M_{ij}^T dengan mengganti elemen non zero dengan 1. Sehingga $C(G_c(M_{ij}))$ dapat diperoleh dari $C(G_c)$ dengan menghilangkan baris ke j dan kolom ke i, atau dapat dinotasikan dengan $C(G_c)_{ji}$. Langkah pertama terbukti. Langkah kedua akan dibuktikan bahwa : banyaknya H_{ij} dalam $G_c(A)$ sama dengan harga per $C(G_c)_{ji}$.

Dari definisi 2.1.6 . didapat : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ dan dari teorema 3.3.2. didapat : $\Delta_{ij} =$ det A_α = $(-1)^{n-1} \Sigma_{H_{ij}} (-1)^{-L_H} f(H_{ij})$. Maka det A_α = $(-1)^{i+j} |M_{ij}| = (-1)^{n-1} \Sigma_{H_{ij}} (-1)^{-L_H} f(H_{ij})$.

Sesuai definisi 3.1.4. : permanent dari suatu matriks didefinisikan sama dengan determinan matriks, tetapi semua tandanya positif. Sehingga : per A_α = per $M_{ij} = \Sigma_{H_{ij}} f(H_{ij})$.

Sesuai Lemma 3.1.1. maka perkalian elemen-elemen A_α berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h_α), akibatnya $f(h_\alpha) = a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ di mana $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ merupakan perkalian elemen-elemen matriks A_α. Dari pembuktian teorema 3.2.2.

diperoleh $f(h_\alpha) = f(H_{ij}) = a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots . a_{nj_n}$

$C(G_c(A_\alpha))$ dapat diperoleh dari matriks bobot $G_c(A_\alpha)$ dengan mengganti elemen-elemen non zero dengan 1. Sehingga perkalian elemen-elemen matriks $C(G_c(A_\alpha))$ akan sama dengan 1, atau $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} = 1$ untuk $a_{ij_i} \neq 0$ (i sebarang). Sesuai sifat determinan matriks bahwa det A = det A^T maka per A_α = per A_α^T sehingga : per $C(G_c(A_\alpha))$ = per $C(G_c(M_{ij})) = \Sigma_{H_{ij}} .1$

per $C(G_c(M_{ij}))$ = per $C(G_c)_{ji} = \Sigma_{H_{ij}} .1$

atau sama dengan jumlah H_{ij}. Terbukti bahwa banyaknya 1-faktorial connection H_{ij} dalam Coates Graph $G_c(A)$ = per $C(G_c)_{ji}$.

Contoh 3.3.5. :

Diberikan matriks $C(G_c)$ yang diperolleh dari Coates Graph C(A). Gambar 3.1.1. : $C(G_c)$ $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Maka jumlah/banyaknya 1-faktorial connection H_{13} dari node 1 ke node 3 dalam $G_c(A)$ gambar 3.1.1. sama dengan harga :

$$\text{per } C(G_c)_{31} = \text{per} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= 1.1.1 + 1.1.1 = 2$$