BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. PERMUTASI DAN DETERMINAN

Definisi 2.1.1:

Suatu himpunan bilangan bulat 1 sampai n dikatakan dalam ''urutan asli'' jika diberikan dalam urutan : 1,2,3,...,n. *Permutasi* adalah himpunan bilangan-bilangan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ dimana urutannya diberikan sama atau tidak sama dengan urutan asli dengan $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$ dan i,k = 1,2,3,...,n. Sedangkan j_i adalah salah satu bilangan asli (1,2,3,...,n).

Contoh 2.1.1:

Banyaknya permutasi dari 3 buah bilangan asli (1,2,3) adalah 3! = 3.2.1 = 6 . Yaitu : (1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1).

Definisi 2.1.2:

Inversi dari suatu permutasi adalah terdapatnya bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil, atau $j_k > j_i$ untuk $i<k$.

Definisi 2.1.3:

Jika jumlah inversi dari suatu permutasi : genap, maka disebut *permutasi genap* dan bila jumlah inversinya ganjil, maka disebut *permutasi ganjil.*

Contoh 2.1.2:

Pada permutasi (2,1,4,5,3) terdapat 3 inversi yaitu 2 mendahului 1, 4 mendahului 3 dan 5 mendahului 3. Karena jumlah inversinya ganjil maka disebut permutasi ganjil.

Definisi 2.1.4:

Determinan dari matriks bujur sangkar A berukuran nxn adalah jumlah dari n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks tersebut. Atau :

$\det A = |A| = \sum \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$

dengan:

$j_1, j_2, \ldots j_n$: adalah permutasi

$\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_n)$: + , bila permutasi genap

: − , bila permutasi ganjil.

$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$: perkalian elemen-elemen matriks A.

Contoh 2.1.3 :

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka terdapat 3! permutasi

1. Permutasi (1,2,3) banyaknya inversi = 0 (genap)

   maka $\sigma(1,2,3)\, a_{11}\ a_{22}\ a_{33} = +(a_{11} . a_{22} . a_{33})$

2. Permutasi (2,3,1) banyaknya inversi = 2 (genap)

   maka $\sigma(2,3,1) a_{12} a_{23} a_{31} = +(a_{12} . a_{23} . a_{31})$

3. Permutasi (3,1,2) banyaknya inversi = 2 (genap)

maka $\sigma(3,1,2)\ a_{13}\ a_{21}\ a_{32} = +(a_{13}.a_{21}.a_{32})$

4. Permutasi (2,1,3) banyaknya inversi = 1 (ganjil)

maka $\sigma(2,1,3)\ a_{12}\ a_{21}\ a_{33} = -(a_{12}.a_{21}.a_{33})$

5. Permutasi (1,3,2) banyaknya inversi = 1 (ganjil)

maka $\sigma(1,3,2)\ a_{11}\ a_{23}\ a_{32} = -(a_{11}.a_{23}.a_{32})$

6. Permutasi (3,2,1) banyaknya inversi = 3 (ganjil)

maka $\sigma(3,2,1)\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31} = -(a_{13}.a_{22}.a_{31})$

Beberapa sifat determinan :

Sifat 1 : det A = det A^T ; A^T adalah matriks transpose dari matriks A.

Sifat 2 : Tanda determinan akan berubah jika 2 baris /kolom ditukar tempatnya.

Sifat 3 : Jika semua elemen dari satu baris/kolom berharga nol, maka determinannya nol.

Sifat 4 : Harga determinan menjadi λ kali, bila suatu baris/kolom dikalikan λ (skalar).

Definisi 2.1.5:

A = $[a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar berukuran nxn. *Minor* elemen a_{ij} ditulis $|M_{ij}|$ dimana M_{ij} adalah submatriks dari A dengan ukuran (n-1)x(n-1) yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke i dan kolom ke j dari matriks A.

Contoh 2.1.4:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{maka} \quad M_{23}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_{23} berarti baris 2 dan kolom 3 matriksA dihilangkan , maka minor elemen a_{23} adalah :

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (6x4)-(4x0) = 6$$

Definisi 2.1.6:

Kofaktor dari elemen a_{ij} suatu matriks $A=[a_{ij}]$ ditulis Δ_{ij}, dimana $\Delta_{ij}= (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ adalah suatu skalar.

Teorema 2.1.1 :

Determinan suatu mtriks dapat diperoleh dengan menjumlahkan perkalian elemen-elemen sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Atau dapat ditulis dengan :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij} = a_{i1}.\Delta_{i1}+a_{i2}.\Delta_{i2}+ \ldots + a_{in}.\Delta_{in}$$

adalah penguraian pada baris ke i dengan i sebarang. Dapat pula ditulis sebagai :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij} = a_{1j}.\Delta_{1j}+a_{2j}.\Delta_{2j}+ \ldots + a_{nj}.\Delta_{nj}$$

adalah penguraian pada kolom ke j dengan j sebarang.

bukti :

Misalkan $|A| = a_{11}.\Delta^*_{11}+ a_{12}.\Delta^*_{12}+ \ldots + a_{1n}.\Delta^*_{1n}$

dimana Δ^*_{11} adalah jumlah hasil kali elemen-elemen, tidak termasuk elemen pada baris ke i. Tinggal dibuktikan $\Delta^*_{ij} = \Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, dimana M_{ij} adalah submatriks dari A dengan menghilangkan baris

ke i kolom ke j dari A .Maka :

$$a_{nn}\Delta^*_{nn} = a_{nn}\underbrace{\sum \sigma(j_1,j_2,\ldots,j_{n-1})a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1\,j_{n-1}}}_{\text{ordo } n-1}$$

$$= a_{nn}\,|M_{nn}|$$

Jadi $\Delta^*_{nn} = |M_{nn}| = (-1)^{n+n}|M_{nn}|$.

Sekarang pandang baris ke i dan kolom ke j sebarang. Kita pertukarkan berturut-turut baris ke i sampai berada pada baris ke n, ada (n-i) kali pertukaran. Juga berturut-turut kita pertukarkan kolom ke j sampai menjadi kolom ke n, jadi ada (n-j) kali pertukaran. Maka dari sifat 2 determinan , tanda dari Δ^*_{ij} akan bertukar (n-1)+(n-j) kali, sedang harga $|M_{ij}|$ tidak berubah dengan adanya pertukaran ini. Jadi $\Delta^*_{ij} = (-1)^{2n-i-j}|M_{ij}|$, terbukti benar bahwa Δ^*_{ij} kofaktor elemen a_{ij} dari matriks A. Jadi :

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \ldots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij}$$

(Bukti untuk expansi kolom analog).

2.2. SISTIM PERSAMAAN LINIER NON HOMOGEN DENGAN ATURAN CRAMER

Tinjau suatu sistim persamaan linier dengan m persamaan dan n variabel :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

a_{ij} dan b_{ij} masing-masing koefisien-koefisien dan konstanta sistim persamaan linier. Apabila $b_i \neq 0$ disebut sistim persamaan linier non homogen . Dan jika digunakan sistim perkalian matriks maka sistim persamaan linier diatas dapat ditulis sebagai :A X = B dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks koefisien dari sistim persamaan linier diatas.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

adalah matriks kolom yang merupakan variabel-variabel dari sistim persamaan linier.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$$

adalah matriks kolom yang merupakan konstanta dari sistim persamaan linier.

Suatu sistim persamaan linier non-homogen apabila memiliki jumlah persamaan linier yang sama dengan banyaknya variabel x misalnya n, disebut sebagai sistim persamaan linier non-homogen ordo n. Untuk mencari solusi dari sistim persamaan linier non-homogen ordo n dimana $|A| \neq 0$ dapat digunakan aturan Cramer yang memiliki bentuk :

$$X_j = \frac{D_j}{|A|} \quad , \quad |A| \neq 0 \qquad \text{dimana}$$

X_j : Solusi dari sistim persamaan linier non-homogen ordo n $(j = 1,2, \ldots,n)$.

$|A|$: detrminan matriks koefisien A.

D_j : determinan matriks koefisien A dengan mengganti kolom ke j dengan matriks kolom B.

teorema 2.1.2:

Sistim persamaan linier non-homogen ordo n yang memiliki matriks koefisien A dan matriks kolom B maka :

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} . \Delta_{ij} \quad , \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

dimana

b_i : harga persamaan baris ke i.

Δ_{ij}: kofaktor elemen baris ke i kolom ke j.

Bukti :

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} & \dots . a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \dots . a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} a_{n2} & \dots . a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Menurut teorema 2.1.1 , determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Akan diuraikan menurut kolom ke j . Karena kolom ke j dari matriks koefisien A telah diganti dengan matriks kolom B, maka :

$$D_j = b_1 . \Delta_{1j} + b_2 . \Delta_{2j} + \dots + b_{nj} . \Delta_{nj}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} . \Delta_{ij}$$

teorema terbukti.

Sehingga aturan Cramer yang berbentuk

$$X_j = \frac{D_j}{|A|} , \quad |A| \neq 0$$

dapat dinyatakan sebagai :

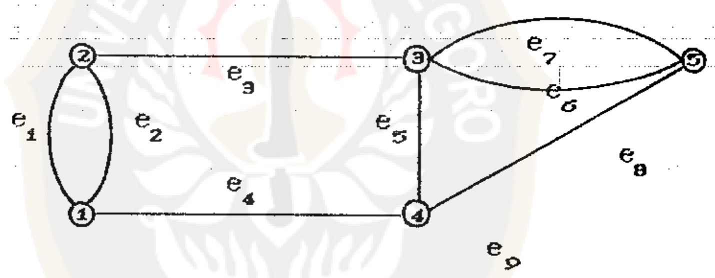
$$X_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ij} . \Delta_{ij}}{|A|} , \quad (i,j = 1,2,\dots,n)$$

2.3. G R A P H

2.3.1. GRAPH TAK BERARAH

Definisi 2.3.1.

Suatu *graph G(V.E)* atau lebih sederhananya graph *G*, terdiri dari himpunan V di mana elemen-elemennya disebut *node* dan himpunan E di mana elemen-elemennya diberikan dalam bentuk pasangan yang tidak berurutan (i,j) atau (j,i) (i dan j elemen V) disebut *edge* dari G, node i dan node j disebut *end point* dari (i,j).



Gambar 2.3.1.

Graph G(V,E) di mana :

$V = \{V_1, V_2, \ldots, V_5\}$

$E = \{(1,2)_1, (1,2)_2, (2\ 3),, 1\ 4), (3,4), (3,5)_1,$
$(3\ 5)_2, (4,5), (4,4)\}$
$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

Definisi 2.3.2 :

Node i dan edge (i,j) dikatakan *insident* satu dengan lainnya jika suatu node i merupakan node akhir (end point) dari suatu edge (i,j).

Contoh 2.3.1. :

Pada gambar 2.3.1. edge (1,4),(3,4),(4,5) insident dengan node 4.

Definisi 2.3.3. :

Dua node(edge) dikatakan *adjacent* jika keduanya incident pada node(edge) yang sama.

Contoh 2.3.2. :

Pada gambar 2.3.1. terlihat : node 3 dan 4 adjacent pada edge (3,4), dan untuk edge (1,4) dan (4,5) adjacent pada node 4.

Definisi 2.3.4. :

Edge paralel adalah edge yang jumlahnya lebih dari satu dan masing-masing menghubungkan sepasang node yang sama, dinotasikan dengan :

$(i,j)_1,(i,j)_2,...,(i.j)_k$; $k \geq 2$

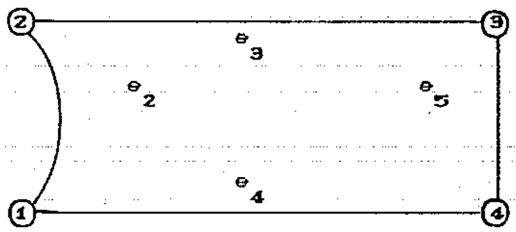
Contoh 2.3.3. :

Node 1 dan 2 mempunyai edge paralel : $(1,2)_1$, $(1,2)_2$ atau e_1 dan e_2.

Definisi 2.3.5. :

Gs = (Vs,Es) disebut subgraph dari graph G=(V,E) di mana $Vs \subset V$ dan $Es \subset E$.

Contoh 2.3.4. :



Gambar 2.3.2.

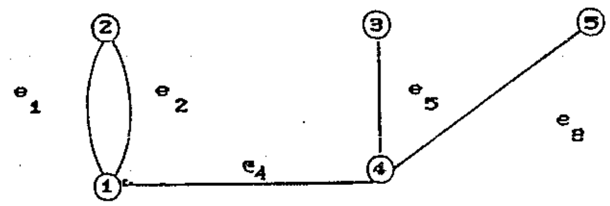
Gs = (Vs,Es) sub graph dari G = (V,E) pada gambar 2.3.1.

Definisi 2.3.6. :

SPANNING SUBGRAPH adalah sub graph yang memuat semua node dari graphnya, sehingga Vs=V dan $Es \subseteq E$.

Contoh 2.3.5. :

Spanning sub graph dari graph G = (V,E) pada gambar 2.3.1.

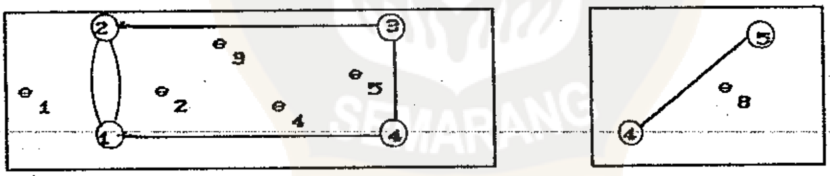


Gambar 2.3.3.

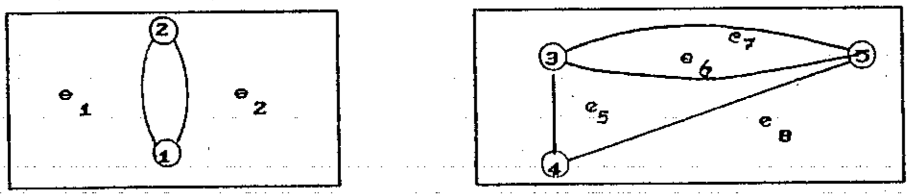
Definisi 2.3.7. :

Dua buah sub graph dikatakan edge - disjoint jika keduanya tidak memiliki edge yang sama dan dikatakan node - disjoint jika keduanya tidak memiliki node yang sama.

Contoh 2.3.6. :



Gambar 2.3.4.



Gambar 2.3.5.

Gambar 2.3.4. dan 2.3.5. adalah 2 buah sub graph dari graph G = (V,E) pada gambar 2.3.1. Gambar 2.3.4. adalah dua buah sub graph yang edge - disjoint dan gambar 2.3.5. adalah dua buah sub graph yang node-disjoint. Jelas bahwa dua sub graph yang node-disjoint juga disebut sebagai edge-disjoint, tetapi dua buah sub graph yang edge - disjoint belum tentu dikatakan sebagai node-disjoint seperti pada gambar 2.3.4.

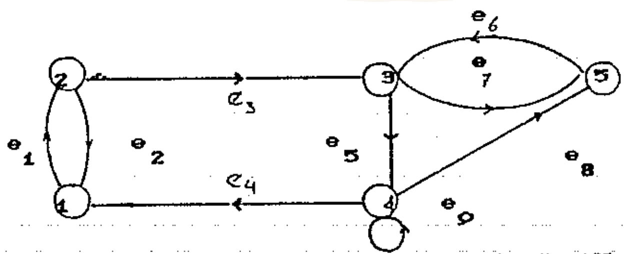
2.3.2. GRAPH BERARAH

Definisi 2.3.8. :

Graph berarah (DIRECTED GRAPH/DIGRAPH) yang dinotasikan dengan $G_d(V,E)$ terdiri dari himpunan V di mana elemen-elemennya disebut node dan himpunan E di mana elemen-elemennya diberikan dalam bentuk pasangan berurutan (i,j); i dan j elemen V, yang disebut sebagai edge berarah dari i ke j dalam G_d. Node i disebut *initial node* dan node j disebut *terminal node*. Dan keduanya disebut end point (i,j).

Contoh 2.3.7. :

Diberikan suatu graph berarah dengan n node di mana tiap pasang nodenya dihubungkan oleh edge berarah dari node i ke node j.



Gambar 2.3.6. Directed graph $G_d(V,E)$ di mana :

$V = \{1,2,3,4,5\}$

$E = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4),(4,1),(3,5),(5,3),(4,4),$
$(4,5)\}$

$= \{e_1,e_2,e_3,e_5,e_4,e_7,e_6,e_9,e_8\}$

Definisi 2.3.9. :

DIRECTED EDGE SEQUENCE (Barisan edge berarah) dengan panjang k-1 dalam directed graph G_d adalah suatu barisan edge di mana edge-edgenya memiliki bentuk : $(i_1,i_2),(i_2,_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$; $k \geq 2$. Node dan edge berarah dalam barisan edge berarah tersebut boleh berulang.

Contoh 2.3.6. :

Pada gambar 2.3.6. : (2,3),(3,4),(4,5),(5,3),(3,4),(4,1) adalah barisan edge berarah dengan panjang 6.

Definisi 2.3.10. :

DIRECTED EDGE TRAIN adalah barisan edge berarah dalam directed graph G_d di mana semua edge berarahnya berlainan satu dengan lainnya.

Contoh 2.3.9. :

(2,1),(1,2),(2,3),(3,5),(5,3),(3,4) adalah suatu directed edge train dalam directed graph G_d

Definisi 2.3.11. :

Suatu directed edge train $(i_1,i_2),(i_2,_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$ dikatakan *tertutup* jika $i_1 = i_k$ dan dikatakan *terbuka* jika $i_1 \neq i_k$.

Definisi 2.3.12. :

Directed path dari suatu directed graph G_d adalah suatu directed edge train terbuka di mana node dan edge berarahnya tidak boleh berulang.

Contoh 2.3.10. :

(1,2),(2,3),(3,4),(4,5) adalah directed path dengan panjang 4 dalam directed graph G_d gambar 2.3.6.

Definisi 2.3.13. :

DIRECTED CIRCUIT dari suatu directed graph G_d adalah suatu directed edge train tertutup di mana semua node-nodenya berlainan kecuali node awal dan node akhir.

Contoh 2.3.11. :

(1,2),(2,3),(3,4),(4,1) adalah suatu directed circuit dari G_d gambar 2.3.6. dengan panjang 4.

Definisi 2.3.14. :

SELF-LOOP dari suatu graph berarah adalah suatu circuit berarah dengan panjang 1.

Definisi 2.3.15. :

Derajat masuk *(INDEGREE)* yaitu banyaknya edge dengan node i sebagai terminal node, dinotasikan dengan $d^-(i)$

Definisi 2.3.16. :

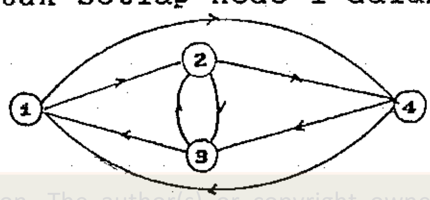
Derajat keluar *(OUTDEGREE)* yaitu banyaknya edge dengan node i sebagai initial node, dinotasikan dengan $d^+(i)$

Contoh 2.3.12. :

Dari gambar 2.3.6. : $d^-(1)=d^-(3)=d^-(4)=d^-(5)=2$,
$d^-(2)=1, d^+(1)=1, d^+(5)=1$,
$d^+(2)=d^+(3)=2, d^+(4)=3$

Definisi 2.3.17. :

REGULAR DIGRAPH : dengan derajat k apabila $d^-(i)= d^+(i)=k$, untuk setiap node i dalam G_d.



Gambar 2.3.7. diagraph G_d

Contoh 2.3.13. :

Digraph G_d pada gambar 2.3.7. merupakan regular digraph dengan derajat 2, di mana :

$d^+(1)=d^+(2)= d^+(3)= d^+(4)=2$

$d^-(1)=d^-(2)= d^-(3)= d^-(4)=2$

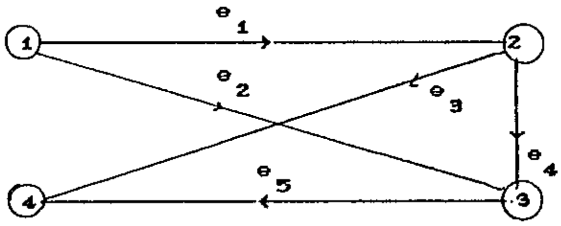
2.3.3. MATRIKS-MATRIKS YANG MENGGAMBARKAN DIRECTED GRAPH

Definisi 2.3.18. :

INCIDENCE MATRIKS dari digraph $G_d(V,E)$ dengan n node dan tanpa self-loop adalah matriks A = $[a_{ij}]$, i,j = 1,2,...,n, di mana masing-masing kolom bersesuaian dengan edge berarah dalam G_d dan masing-masing baris bersesuaian dengan node-node dalam G_d. Elemen-elemen matriks A adalah :

a_{ij}
- = +1, jika terdapat edge (i,j) dengan i sebagai initial node .
- = -1, jika terdapat edge (i,j) dengan i sebagai terminal node .
- = 0, jika tidak ada edge yang incident dengan node i.

Contoh 2.3.14. :



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_4 & e_3 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.3.8.

Matriks A adalah matriks incidence dari digraph G_d gb 2.3.8.

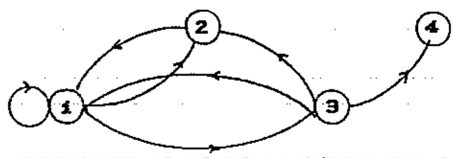
Definisi 2.3.19. :

$G_d(V,E)$ adalah directed graph tanpa edge paralel dan tidak mempunyai self-loop lebih dari satu dalam tiap nodenya. *ADJACENCY MATRIKS* dari G_d adalah suatu matriks $A = [a_{ij}]$ dengan ordo n di mana masing-masing baris dan kolom matriks A ber-sesuaian dengan node $i_1, i_2, \ldots, in$ dalam G_d, dan elemen-elemen matriks tersebut :

$a_{ij} = 1$, jika terdapat edge berarah dari node i ke node j.

$a_{ij} = 0$, jika tidak ada edge berarah dari node i ke node j.

Contoh 2.3.15.:



Gambar 2.3.9. directed graph $G_d(V,E)$

Adjacent matriks dari digraph G_d gambar 2.3.9. :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

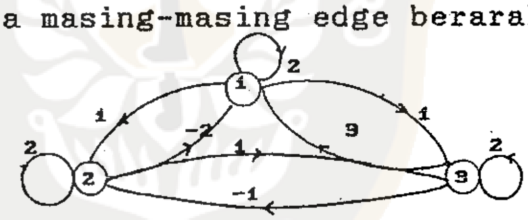
Definisi 2.3.10.:

MATRIKS BOBOT dari suatu directed graph G_d dengan n node dan tidak mengandung edge paralel adalah matriks A = $[a_{ij}]$ berordo n di mana tiap-tiap baris dan kolom matriks A bersesuaian dengan node $i_1, i_2, \ldots, in$ dalam G_d, dan elemen-elemen matriks A adalah

$$a_{ij} \begin{cases} = w_{ij}, & \text{jika terdapat edge berarah dari node i ke node j dengan bobot } w_{ij} \\ = 0, & \text{jika tidak ada edge berarah dari node i ke node j} \end{cases}$$

Contoh 2.3.16.:

Diberikan digraph G_d dengan 3 node yang memiliki bobot pada masing-masing edge berarahnya.



Gambar 2.3.10. directed graph $G_d(V,E)$

Matriks bobot dari digraph G_d gambar 2.3.10. adalah :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} w_{11} & W_{12} & W_{13} \\ w_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$