BAB III

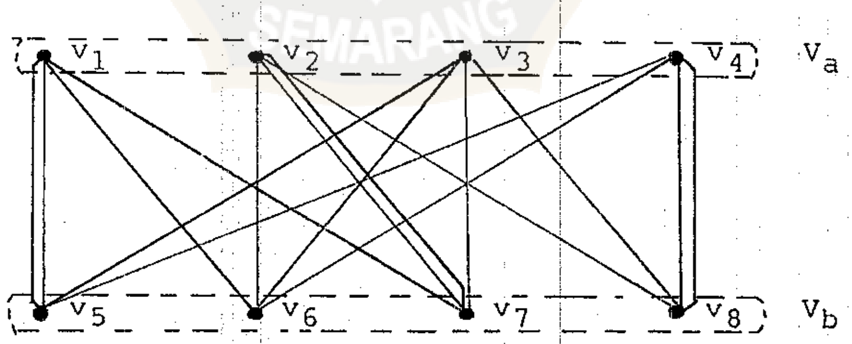
PEWARNAAN GARIS PADA MULTIGRAPH BIPARTITE REGULER

Definisi 3.1

Pewarnaan garis pada multigraph bipartite reguler derajat m adalah penandaan garis-garis pada multigraph bipartite reguler yang derajat tiap titiknya adalah m, dengan warna-warna sedemikian hingga tidak ada dua garis yang insiden pada satu titik mendapat warna sama.

Contoh 3.1

Gambar 3.1 merupakan gambar multigraph bipartite reguler derajat 4 yang telah diwarnai.



Gambar 3.1

Teorema 3.1

Pada setiap multigraph bipartite reguler derajat m dapat diadakan pewarnaan garis dengan m warna.

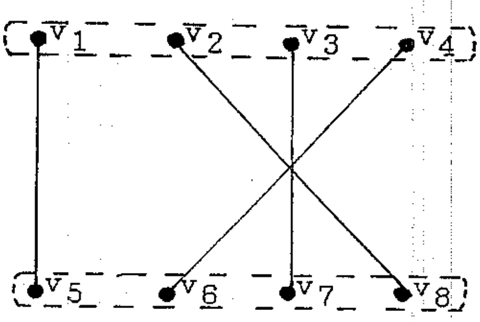
Bukti :

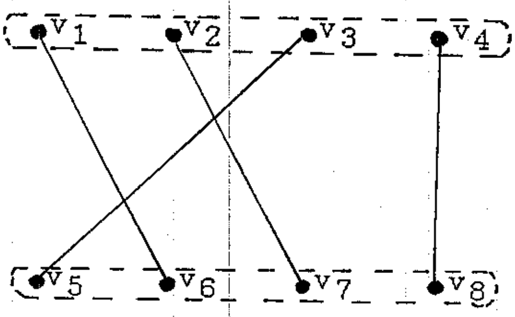
Dari teorema 2.6.1 disebutkan bahwa untuk setiap multigraph bipartite reguler adalah dapat difaktorisasi-1.

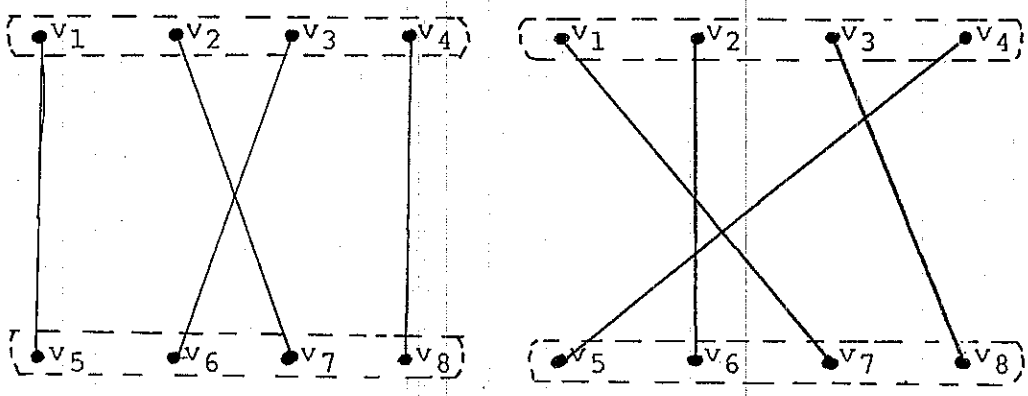
Maka pada multigraph bipartite reguler derajat m terdapat m buah faktor-1 yang himpunan garis masing-masing faktor-1 adalah saling asing dan semua garis garis dalam multigraph tersebut termuat dalam faktor-1 - faktor-1 tersebut. Bila untuk setiap faktor-1 garis-garisnya diwarnai dengan sebuah warna, maka diperlukan m warna untuk mewarnai garis-garis dalam m buah faktor-1. Sehingga semua garis dalam multigraph telah diwarnai dan dari definisi faktorisasi-1 maka tidak ada dua garis yang insiden pada satu titik menerima warna sama.

Contoh 3.2

Gambar 3.2 merupakan multigraph bipartite reguler derajat m=4 yang diwarnai garis dengan 4 warna. Masing-masing merupakan spanning subgraph dari graph gambar 3.1.







Gambar 3.2

Teorema 3.2

Pada setiap multigraph bipartite reguler G dengan derajat tiap titiknya m yang diwarnai garis dengan m warna, maka tiap-tiap warna digunakan untuk mewarnai garis sebanyak $(\Sigma\ d(V_i))/2m$ dengan $\Sigma\ d(V_i)$ adalah jumlah derajat titik-titik dalam multigraph G.

Bukti :

Derajat setiap titik dalam G adalah m dan G diwarnai dengan m warna. Misalkan warna-warna tersebut adalah $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m$. Maka jumlah derajat yang disumbangkan garis dengan warna w_1 sama dengan jumlah derajat yang disumbangkan garis dengan warna w_2 dan sama dengan jumlah derajat yang disumbangkan garis tiap-tiap warna yang lain.Karena tiap-tiap garis menyumbang derajat dua maka masing-masing warna digunakan untuk mewarnai garis sebanyak $(\Sigma\ d(V_i))/2m$ garis.

Contoh 3.3

Pada graph gambar 3.1 diketahui bahwa jumlah derajatnya adalah 4 x 8 = 32. Maka tiap-tiap warna digunakan untuk mewarnai 4 garis.

Lemma 3.1

Untuk suatu graph bipartite reguler $G=(V,E)$ dengan bipartisi (V_a,V_b), $e \in E$ dan suatu himpunan garis E^*, dengan $E^* \subsetneq E - \{e\}$ maka G mempunyai faktor-1 yang himpunan garis-garis dalam faktor-1 tersebut mengandung e dan saling asing dengan E^* jika dan hanya jika didalam G tidak terdapat dua himpunan garis saling asing E_1 dan E_2, sedemikian hingga $e \in E_1$ dan $E_2 \subsetneq E^*$ dengan $|E_1| = |E_2|$ dan $E_1 \cup E_2$ merupakan himpunan potong yang memisahkan G menjadi 2 subgraph bebas G_1 dan G_2 dengan garis-garis E_1 menghubungkan titik di ($V_a \cap V(G_1)$) dengan titik di($V_b \cap V(G_2)$) dan garis-garis E_2 menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_2))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_1))$ atau sebaliknya.

Bukti:

Dari teorema 2.4.3 di ketahui bahwa jumlah titik di V_a ($|V_a|$) sama dengan jumlah titik di V_b ($|V_b|$).

=>

Andaikan bahwa G mempunyai dua himpunan garis yang saling asing E_1 dan E_2 dengan $e \in E_1$, $E_2 \subseteq E^*$, $|E_1| = |E_2|$ dan $E_1 \cup E_2$ merupakan himpunan potong yang memisahkan $G = (V,E)$ menjadi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 dengan setiap garis dalam E_1 menghubungkan titik di $V_a \cap V(G_1)$ dengan titik di $V_b \cap V(G_2)$ dan setiap garis E_2 menghubungkan titik di $V_b \cap V(G_1)$dengan titik di $V_a \cap V(G_2)$.G adalah multigraph bipartite reguler sehingga menurut teorema 2.4.1 jumlah derajat titik-titik di V_a sama dengan jumlah derajat titik-titik di Vb dan $E_1 \cup E_2$ adalah himpunan potong pada G. Karena $|E_1| = |E_2|$ maka jumlah derajat titik-titik di $V_a \cap V(G_1)$ sama dengan jumlah derajat titik-titik di $V_b \cap V(G_1)$, sehingga jumlah titik di $(V_a \cap V(G_1))$ sama dengan jumlah titik di $(V_b \cap V(G_1))$. Karena $|V_a| = |V_b|$ maka jumlah titik di $V_a \cap V(G_2)$ sama dengan jumlah titik di Vb $\cap V(G_2)$.Dibuat faktor-1 dari $G = (V,E)$ yang mengandung e. Karena $e \in E$ maka terdapat sedikitnya sebuah titik di $(V_a \cap V(G_1))$ yang dalam faktor-1 tersebut dihubungkan dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$. Misalkan hanya ada sebuah titik yaitu titik yang dihubungkan garis e tersebut. Karena jumlah titik di $(V_a \cap V(G_1))$ sama dengan jumlah titik di $(V_b \cap V(G_1))$ maka terdapat sebuah titik di $V_b \cap V(G_1)$ yang tidak mempunyai pasangan dengan titik di $(V_a \cap V(G_1))$. Begitu juga di $(V_a \cap V(G_2))$, terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai pasangan di $(V_b \cap V(G_2))$. Sehingga dalam faktor-1 tersebut terdapat titik di $(V_b \cap V(G_1))$ yang dihubungkan dengan titik di $(V_a \cap V(G_2))$ dan garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah garis E_2. Sehingga G tidak mempunyai faktor-1 yang himpunan garisnya mengandung e dan saling asing dengan himpunan garis E^*. Bertentangan dengan yang diketahui, sehingga pengandaian harus diingkar.

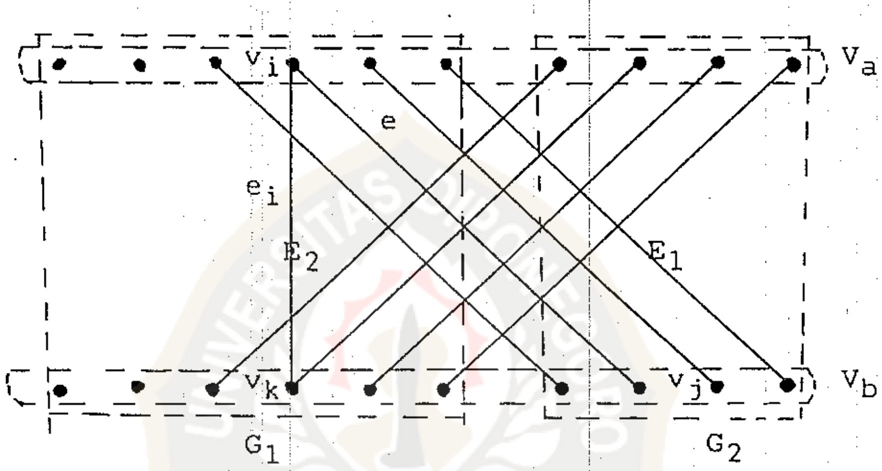
<=

Andaikan G tidak mempunyai faktor-1 yang himpunan garisnya mengandung garis e dan saling asing dengan himpunan garis E^*, dengan E^* (E-{e}). Dari teorima 2.6.1 diketahui bahwa G dapat di faktorisasikan-1 sehingga terdapat faktor-1 dari G yang himpunan garisnya mengandung garis e dan untuk tiap faktor-1 yang mengandung garis e, himpunan garisnya tidak saling asing dengan himpunan garis E^*. Misalkan garis e menghubungkan titik v_i dengan titik v_j. Karena derajat tiap titik dalam G adalah m, maka selain garis e terdapat m-1 garis lain yang insiden titik v_i misalkan e_i

adalah garis-garis yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_k, dengan $v_k \neq v_j$.K adalah himpunan potong dalam G dengan garis-garisnya adalah garis-garis yang insiden titik v_i selain garis e_i dan garis-garis yang insiden v_k selain garis e_i. Sehingga garis $e \in K$. Dan untuk setiap faktor -1 yang mengandung garis e selalu mengandung sebuah garis yang insiden titik v_k dan bukan garis e_i. Sehingga jika K memisahkan multigraph G = (V,E) menjadi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 maka salah satu dari subgraph tersebut titik-titiknya hanya terdiri dari v_i dan v_k. Jika E_i adalah himpunan garis-garis K yang insiden v_i dan E_2 adalah himpunan garis-garis K yang insiden v_k maka $|E_1| = |E_2|$ dan $E_1 \cup E_2$ merupakan himpunan potong dalam G dengan garis $e \in E_1$. Dan jika E^* adalah himpunan garis yang memuat E_2 maka G mengandung dua himpunan garis saling asing E_1 dan E_2 sedemikian sehingga $e \in E_1$ dan $E_2 \subseteq E^*$ dengan $|E_1| = |E_2|$ dan $E_1 \cup E_2$ merupakan himpunan potong dalam G sesuai ketentuan. Bertentangan dengan yang diketahui sehingga pengandaian harus diingkar. Jadi G mempunyai faktor-1 yang himpunan garisnya mengandung e dan saling asing dengan himpunan garis E^*, dengan $e \in E$ dan $E^* \subseteq (E - \{e\})$.

Contoh 3.4.

Gambar 3.3 adalah merupakan multigraph yang tidak memenuhi lemma 3.1 dengan garis-garis yang tidak diperlukan untuk penjelasan tidak digambar.



Gambar 3.3

Akibat 3.1

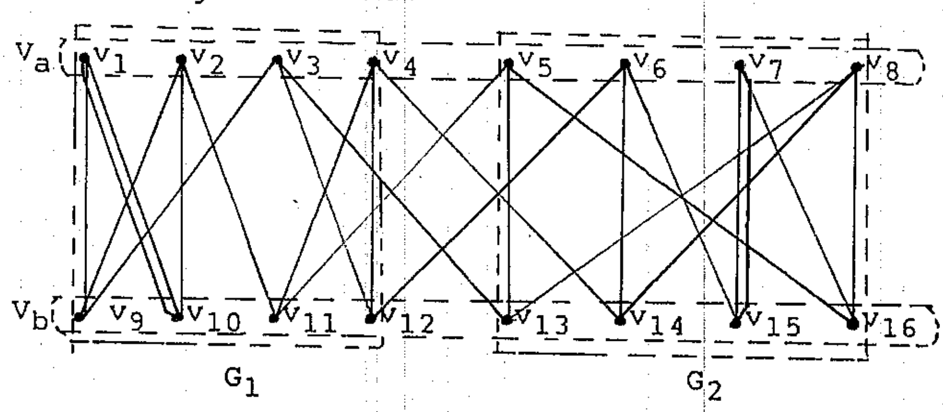
Jika dalam suatu multigraph bipartite reguler $G = (V,E)$ dengan derajat tiap titiknya m, terdapat himpunan potong $E_1 \cup E_2$ dengan $|E_1| = |E_2|$ yang memisahkan G menjadi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 sedemikian hingga untuk suatu bipartisi (V_a,V_b) dalam G maka garis-garis E_1 menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$ dan garis-garis E_2 menghubungkan titik di $(V_b \cap V(G_1))$ dengan titik di$(V_a \cap V(G_2))$ atau sebaliknya, maka dalam setiap pewarnaan garis dengan m warna terhadap G warna-warna yang diterima garis-garis E_1 selalu sama dengan warna-warna yang diterima garis-garis E_2.

Bukti :

Dari pembuktian lemma 3.1 diketahui bahwa setiap faktor-1 yang mengandung sebuah garis E_1 selalu mengandung sebuah garis E_2. Sehingga garis-garis dalam E_1 dan garis-garis E_2 berada dalam faktor-1 yang sama untuk setiap faktorisasi dari G. Untuk pewarnaan garis dengan m warna terhadap G maka setiap faktor-1 dari G adalah mewakili sebuah warna. Sehingga warna-warna yang diterima garis-garis E_1 sama dengan warna-warna yang diterima garis-garis E_2.

Contoh 3.5 :

Gambar 3.4 merupakan contoh multigraph bipartite reguler derajat m dengan m = 3 yang mempunyai himpunan potong $E_1 \cup E_2$ dengan $|E_1| = |E_2|$ sesuai akibat 3.1 yang diwarnai garis dengan 3 warna.



Gambar 3.4

Teorema 3.3

Suatu multigraph bipartite reguler $G = (V,E)$ dengan derajat tiap titiknya m dan bipartisi (V_a,V_b), dan e_1,e_2 adalah dua garis dalam G maka pewarnaan garis pada G dengan m warna dengan garis e_1 dan e_2 mendapat warna sama jika dan hanya jika G tidak mempunyai himpunan potong K dengan $e_1,e_2 \in K$ dan $|K| = m$ yang memisahkan G menjadi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 sedemikian hingga garis-garis K menghubungkan titik-titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik-titik di $(V_b \cap V(G_2))$ atau garis-garis K menghubungkan titik-titik di $(V_b \cap V(G_1))$ dengan titik-titik di $(V_a \cap V(G_2))$.

Bukti :

=>

Jika G dapat diwarnai garis dengan m warna dengan garis e_1 dan e_2 mendapat warna sama, maka G tidak mengandung himpunan potong K dengan $e_1,e_2 \in K$ dan $|K| = m$ yang memisahkan G menjadi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 sedemikian sehingga semua garis K menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik-titik di $(V_b \cap V(G_2))$ atau sebaliknya. Misalkan setiap garis K menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$. Karena K himpunan potong dan tidak insiden dengan titik di $(V_a \cap V(G_2))$ maka setiap titik di $(V_a \cap V(G_2))$ di hubungkan oleh m garis dengan titik-titik di $(V_b \cap V(G_2))$. Sehingga Σ d $(V_a \cap V(G_2))$ (jumlah derajat titik-titik di $(V_a \cap V(G_2))$) = Σ d $(V_b \cap V(G_2))$ - K. Dan jumlah derajat titik-titik di G_2 (Σ d $V(G_2)$) = Σ d $(V_a \cap V(G_2))$ + Σ d $(V_b \cap V(G_2))$ = 2 x Σ d ($V_a \cap V(G_2)$) + m. Garis e adalah garis dalam G_2 jika menghubungkan titik-titik di G_2. Jadi garis dalam G_2 adalah garis-garis yang menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_2))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$. Dari definisi pewarnaan garis maka titik di $(V_a \cap V(G_2))$ insiden dengan m garis yang diwarnai dengan m warna. Sehingga di G_2 setiap warna di gunakan untuk mewarnai garis yang sama banyaknya dengan jumlah titik di $(V_a \cap V(G_2))$ = (Σ d $(V_a \cap V(G_2))$) / m = (Σ d $(V(G_2))$ - m) / 2m = (Σ d $(V(G_2))$ / 2m) - 1/2. Karena K himpunan potong yang menghubungkan titik-titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik di

$(V_b \cap V(G_2))$, maka garis yang insiden titik di $(V_b \cap V(G_1))$ adalah garis-garis dalam G_1. Sehingga Σ d $(V_b \cap V(G_1))$ = Σ d $(V_a \cap V(G_1))$- K. Dan jumlah derajat titik-titik di G_1 (Σ d $V(G_1)$)) = Σ d $(V_a \cap V(G_1))$ + Σ d $(V_b \cap$

$V(G_1)) = 2 \times (\Sigma\ d\ (V_b \cap V(G_1))) + m$. Dari definisi pewarnaan garis maka tiap titik di $(V_b \cap V(G_1))$ insiden dengan m garis yang di warnai dengan m warna. Sehingga di dalam sub graph G_1 setiap warna di gunakan untuk mewarnai garis yang sama banyaknya dengan jumlah titik di $(V_b \cap V(G_1)) = \Sigma\ d\ (V_b \cap V(G_1))\ /\ m = (\Sigma\ d\ (V(G_1)) - m)\ /\ 2m = (\ \Sigma\ d(VG_1)\ /\ 2m\ ) - 1/2$. Garis-garis dalam graph G adalah garis-garis dalam subgraph G_1 ditambah garis-garis di dalam subgraph G_2 ditambah garis-garis K. Jumlah derajat titik-titik dalam graph G $(\Sigma\ d\ (V(G)) = d\ (V(G_1)) + \Sigma\ d\ (V(G_2))$. Sehingga setiap warna digunakan untuk mewarnai garis di $(G_1 \cup G_2)$ sebanyak $(\Sigma\ d\ (V(G_1))/2m) - 1/2 + (\Sigma\ d\ (V(G_2))/2m\ ) - 1/2$ garis $= (\Sigma\ d\ (V(G))/2m) - 1$. Dari teorema 3.2 diketahui bahwa pada multigraph bipartite reguler derajat m yang diwarnai garis dengan m warna maka tiap warna digunakan untuk mewarnai garis sebanyak $\Sigma\ d\ (V(G))/2m$. Sehingga m garis K haruslah diwarnai garis dengan m warna. Maka bila e_1 dan e_2 dalam pewarnaan garis terhadap G tersebut mendapat warna sama, sedikitnya satu dari garis e_1 dan e_2 tidak berada dalam K. Jadi G tidak mempu-nyai himpunan potong K dengan $e_1, e_2 \in K$.

<=

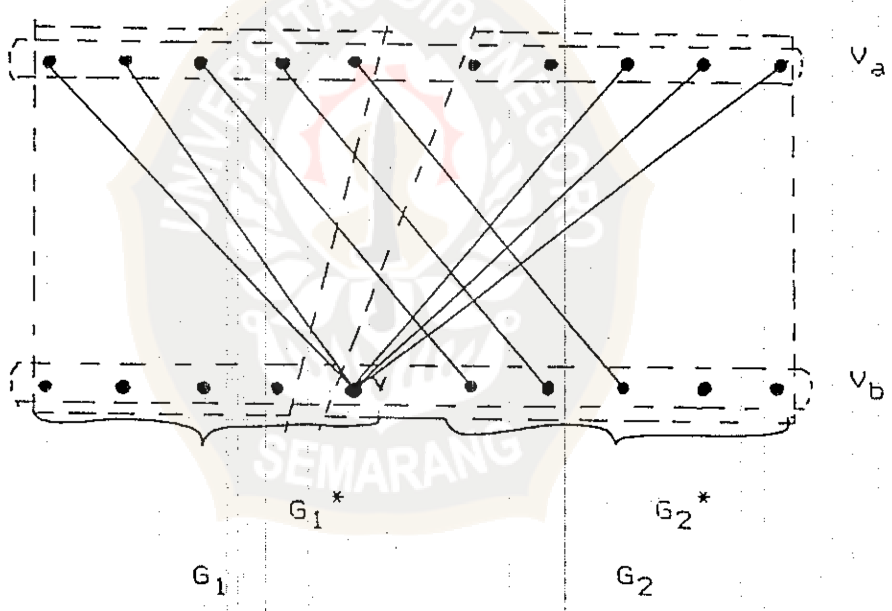
Anggap bahwa G tidak mempunyai himpunan potong K dengan e_1, $e_2 \in K$ yang membagi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 sedemikian hingga setiap garis K menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$ atau setiap garis K menghubungkan titik di $(V_b \cap V(G_1))$ dengan titik di$(V_a \cap V(G_2))$, dengan (V_a, V_b) adalah suatu bipartisi dalam G.Misalkan e_2 adalah suatu garis yang insiden titik v, dengan v adalah sebuah titik di $(V_b \cap V(G))$ dan E^* adalah himpunan garis dengan anggota garis-garis yang insiden titik v selain e_2. Andaikan $e_1 \in E^*$. Karena semua garis dalam $\{e_2\} \cup E^*$ adalah insiden terhadap titik v maka $\{e_2\} \cup E^*$ adalah himpunan potong dengan garis e_1, e_2 anggota himpunan potong tersebut yang memisahkan G menjadi dua subgraph bebas, misalnya G_1 dan G_2 dengan salah satu G_1 atau G_2 merupakan graph dengan satu titik yaitu v. Bertentangan dengan yang diketahui, sehingga haruslah $e_1 \notin E^*$. $e_1 \notin E^*$ maka :

1. Jika terdapat faktor-1 dengan himpunan garis F adalah G yang mengandung garis e_1 dan saling asing dengan E^* (maka $e_2 \in F$), maka G-F adalah graph bipartite reguler dengan derajat tiap titiknya m-1. Dari

teorema 3.1 diketahui bahwa G-F dapat diwarnai garis dengan (m-1) warna maka garis-garis dalam F dapat diwarnai dengan satu warna. Sehingga e_1 dan e_2 dapat menerima warna sama dalam pewarnaan garis dengan m warna terhadap G.

2. Jika tidak terdapat faktor-1 dengan himpunan garis F yang mengandung e_1 dan saling asing E^* maka menurut lemma 3.1 terdapat himpunan garis saling asing E_1 dan E_2 dengan $|E_1| = |E_2|$ dan $e_1 \in E_1$, $E_2 \subsetneq E^*$ sehingga $E_1 \cup E_2$ merupakan himpunan potong yang memisahkan G menjadi dua subgraph bebas G_1^* dan G_2^* sedemikian hingga untuk suatu bipartisi (V_a, V_b) garis-garis E1 menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1^*))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2^*))$ dan garis garis E_2 menghubungkan titik di $(V_b \cap V(G_1^*))$ dengan titik di $(V_a \cap V(G_2^*))$. E_3 adalah himpunan garis-garis dengan anggota garis $((E^* \cup \{e_2\}) - E_2)$ sehingga $E_3 \cup E_2$ adalah himpunan garis-garis yang inseden titik v (lihat gambar 3.5). Ambil $G_1 = G_1^* - \{v\}$ dan $G_2 = G_2^* \cup \{v\}$dengan garis-garis E_2 anggota himpunan garis G_2. Maka garis-garis $E_1 \cup E_2$ adalah himpunan potong K dengan $|K| = |E_1| + |E^* \cup \{e_2\}| - |E_2| = |E_1| + (m - |E_2|) =$

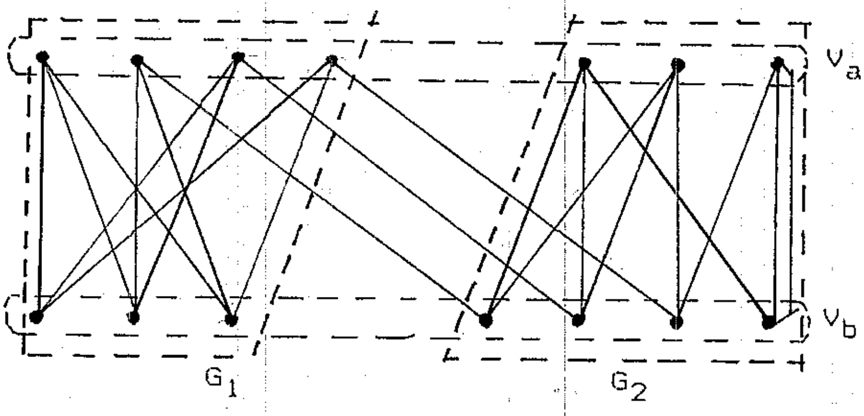
m, dan semua garis K menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$ dan $e_1, e_2 \in K$. Bertentangan dengan yang diketahui, sehingga haruslah terdapat faktor-1 yang mengandung e_1 dan saling asing E^*. Sehingga e_1 dan e_2 dapat menerima warna sama untuk suatu pewarnaan garis dengan m warna terhadap G.



Gambar 3.5

Contoh 3.6

Gambar 3.6 merupakan contoh multigraph yang tidak memenuhi theorema 3.3 yang derajat titiknya m = 3 yang telah diwarnai dengan 3 warna.



Gambar 3.6

Akibat 3.2

Setiap multigraph bipartite reguler $G = (V,E)$ dengan derajat tiap titiknya m mempunyai himpunan potong K yang memisahkan G menjadi dua subgraph bebas G_1 dan G_2 sedemikian hingga untuk suatu bipartisi (V_a,V_b) dari G semua garis K menghubungkan titik di $(V_a \cap V(G_1))$ dengan titik di $(V_b \cap V(G_2))$ atau sebaliknya, maka jumlah garis K ($|K|$) adalah kelipatan m dan untuk setiap pewarnaan garis terhadap G dengan m warna maka setiap warna digunakan untuk mewarnai garis-garis K yang sama banyak.

Bukti

Dari pembuktian teorema 3.3 diketahui bahwa pada multigraph bipartite reguler derajat m yang diwarnai garis dengan m warna maka tiap warna digunakan untuk mewarnai garis sebanyak $\Sigma\ d\ (V(G))/2m$ sehingga m garis K haruslah diwarnai dengan m warna. Sehingga untuk setiap pewarnaan garis terhadap G dengan m warna maka setiap warna digunakan untuk mewarnai garis-garis K yang sama banyak.