BAB II

MATERI DASAR

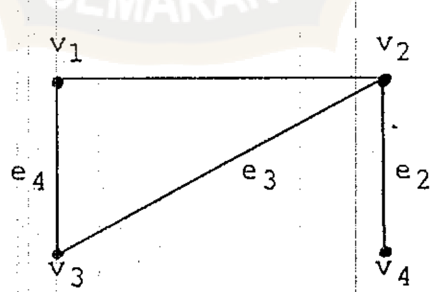
2.1 Beberapa Definisi Dasar dalam Graph

Definisi 2.1.1

Graph $G=(V,E)$ adalah suatu sistem matematika yang terdiri dari himpunan berhingga tidak kosong $V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ yang merupakan himpunan titik dan himpunan $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ yang merupakan himpunan garis, dengan E yang merelasikan V ke V.

Contoh 2.1.1

Gambar 2.1.1 merupakan suatu graph dengan $G=\{V,E\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$



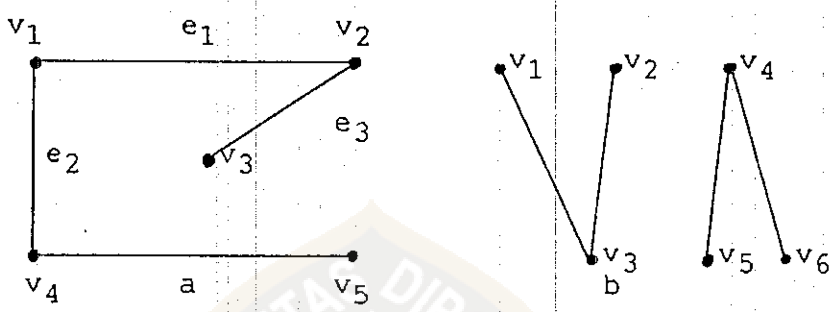
Gambar 2.1.1

Definisi 2.1.2

Graph terhubung adalah graph yang untuk setiap dua titik di dalamnya minimal mempunyai sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Contoh 2.1.2

Gambar 2.1.2 a adalah sebuah graph terhubung dan gambar 2.1.2 b adalah sebuah graph yang tak terhubung.



Gambar 2.1.2

Definisi 2.1.3

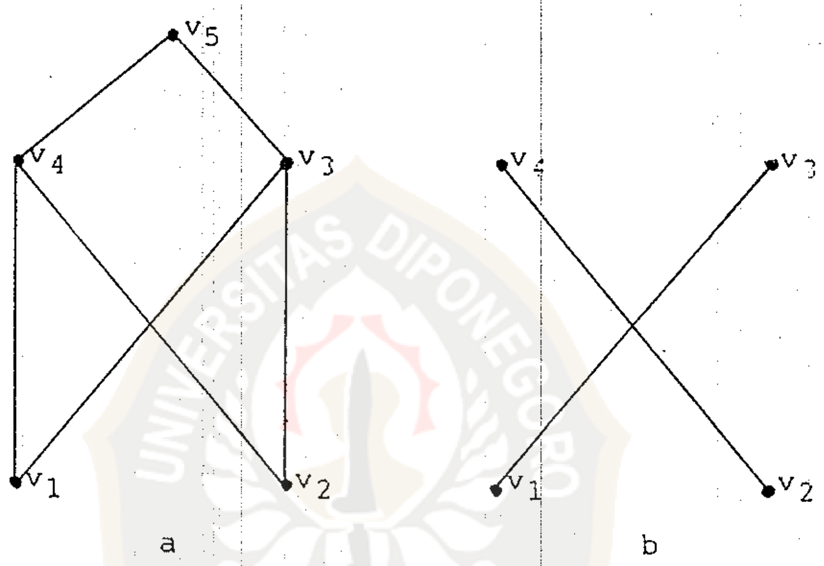
Garis e_k menghubungkan titik V_i dengan titik V_j atau ditulis $e_k=(V_i,V_j)$ maka dikatakan garis e_k insiden terhadap titik V_i dan juga insiden titik V_j atau dikatakan titik V_i dan titik V_j insiden terhadap garis e_k, dan titik V_i dan titik V_j dikatakan sebagai adjacent (terhubung langsung).

Definisi 2.1.4

$G=(V,E)$ disebut subgraph (graph bagian) dari graph $G^*=(V^*,E^*)$ jika V merupakan himpunan bagian dari V^* dengan V tidak kosong dan E merupakan himpunan bagian E^* serta $G=(V,E)$ adalah merupakan suatu graph.

Contoh 2.1.3

graph gambar 2.1.3 b adalah merupakan subgraph dari graph gambar 2.1.3 a



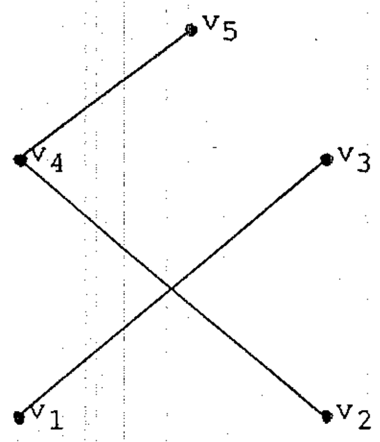
Gambar 2.1.3

Definisi 2.1.5

Subgraph yang memuat semua titik dari graphnya disebut spanning subgraph.

Contoh 2.1.4

Graph gambar 2.1.4 adalah merupakan spanning subgraph dari graph gambar 2.1.3 a.



Gambar 2.1.4

Definisi 2.1.6

Graph sederhana adalah graph yang setiap dua titik dalam graph tersebut maksimum dihubungkan secara langsung oleh sebuah garis dan tidak mempunyai loop (garis yang berawal dan berakhir pada satu titik)

Contoh 2.1.5

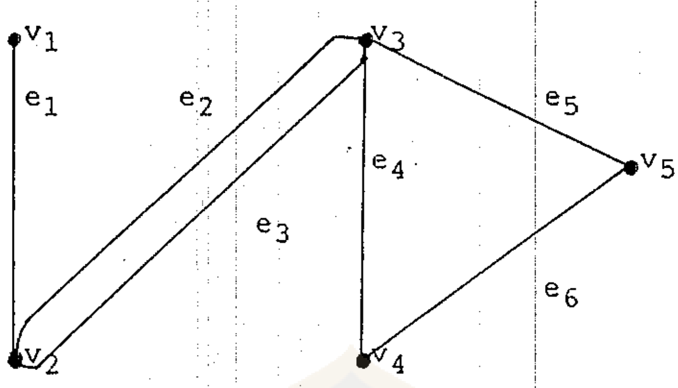
Graph dalam gambar 2.1.3, gambar 2.1.4 adalah merupakan contoh-contoh graph sederhana.

Definisi 2.1.7

Multigraph adalah graph yang tidak mempunyai loop dan terdapat sedikitnya dua titik di dalam graph tersebut yang dihubungkan secara langsung oleh lebih dari sebuah garis.

Contoh 2.1.6

Gambar 2.1.5 adalah merupakan suatu multigraph dengan terdapatnya dua buah titik yang dihubungkan secara langsung oleh lebih dari sebuah garis yaitu titik v_2 dan v_3.



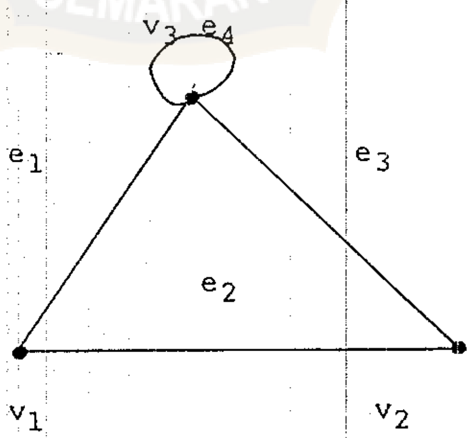
Gambar 2.1.5

Definisi 2.1.8

Graph yang mempunyai garis yang berawal dan berakhir pada satu titik (loop) disebut pseudograph.

Contoh 2.1.7

Gambar 2.1.6 merupakan contoh pseudograph.



Gambar 2.1.6

2.2 Derajat Titik Dalam Graph

Definisi 2.2.1

Banyaknya garis (jumlah garis) yang insiden pada titik v_i disebut dengan derajat (degre) dari v_i dan ditulis $d(v_i)$.

Contoh 2.2.1

Pada graph gambar 2.1.6, garis e_2 dan e_1 insiden pada titik v_1 dan tidak ada garis lain yang insiden v_1 maka jumlah garis yang insiden v_1 adalah dua sehingga derajat dari v_1 adalah 2, sedangkan v_2 berderajat 2, v_3 berderajat 4.

Theorema 2.2.1

Jumlah derajat titik-titik dalam suatu graph adalah dua kali jumlah garisnya.

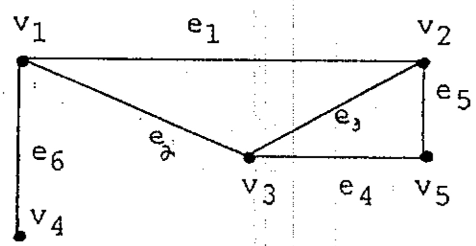
Bukti :

Setiap garis dalam graph terdapat titik awal dan titik akhir, sehingga setiap garis menyumbang dua derajat. Maka jumlah derajat titik-titik dalam setiap graph adalah dua kali jumlah garisnya.

Contoh 2.2.2

Pada graph gambar 2.2.1 adalah merupakan graph dengan 6 garis 5 titik, dengan derajat titik-nya adalah sebagai berikut :

$$\Sigma(d(v_i)) = d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)+d(v_5)$$
$$= 3 + 3 + 3 + 1 + 2$$
$$= 12 = 2 \times 6$$



Gambar 2.2.1

Akibat 2.2.1

Jumlah derajat $(\Sigma\ (d(v_i)))$ dalam setiap graph adalah genap.

Bukti :

Karena setiap bilangan asli dikalikan dua adalah bilangan genap.

Akibat 2.2.2

Jumlah titik yang mempunyai derajat ganjil adalah genap.

Bukti :

Misal

$\Sigma d(v_j)$ = jumlah derajat titik-titik yang mempunyai derajat ganjil

$\Sigma d(v_k)$ = Jumlah derajat titik-titik yang mempunyai derajat genap.

$\Sigma d(v_i)$ = Jumlah derajat semua titik-titik dalam suatu graph.

q = Jumlah garis

$$2 \times q = \Sigma(d(v_i)) = \Sigma(d(v_j)) + \Sigma(d(v_k))$$

2 x q adalah genap maka $\Sigma d(v_i)$ adalah genap. Sedangkan Σ d(vk) adalah genap. Maka haruslah Σd(vj) adalah genap, sehingga jumlah titik-titik yang berderajat ganjil adalah genap.

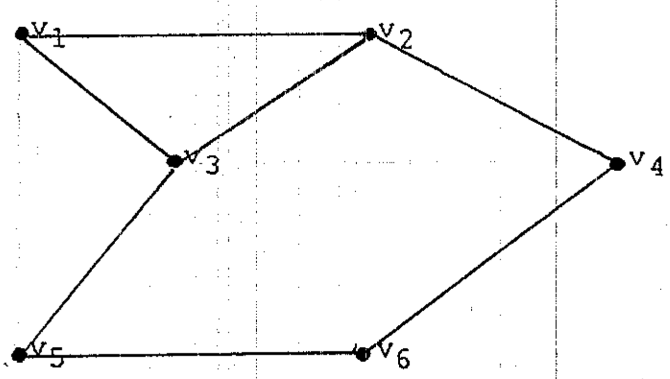
2.3 Pewarnaan Garis Dalam Graph

Definisi 2.3.1

Pewarnaan garis dalam suatu graph adalah penandaan dengan warna pada garis-garis graph tersebut sedemikian hingga tidak ada dua garis yang bertetangga (adjacent)/insiden (pada satu titik) menerima warna yang sama.

Contoh 2.3.1

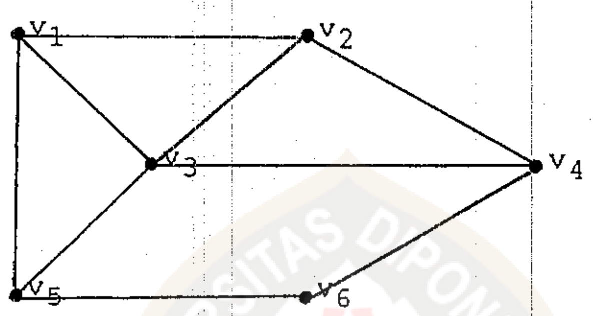
Gambar 2.3.1 menunjukkan sebuah graph yang telah diwarnai.



Gambar 2.3.1

Definisi 2.3.2

Jumlah warna terkecil yang dibutuhkan untuk mengadakan pawarnaan garis pada suatu graph disebut dengan indeks kromatik.



Gambar 2.3.2

Contoh 2.3.2

Indeks kromatik dari graph gambar 2.3.2 adalah 4 yang terlihat sesuai gambar 2.3.2.

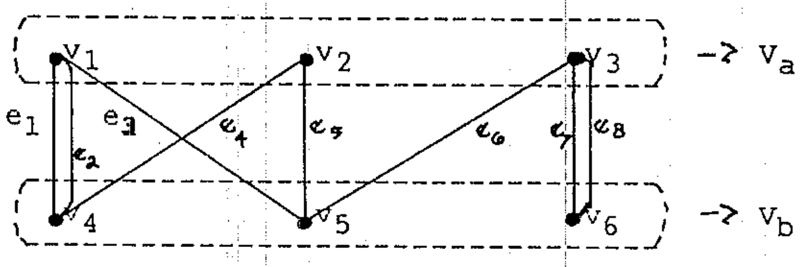
2.4 Multigraph Bipartite Reguler

Definisi 2.4.1

Graph bipartite G=(V,E) adalah graph yang himpunan titik V dapat dipisah menjadi dua himpunan bebas V_a dan V_b sedemikian hingga setiap $e \in E$ menghubungkan titik di V_a dengan titik di V_b.

Contoh 2.4.1

Gambar 2.4.1 adalah graph bipartite dengan $V_a=\{v_1,v_2,v_3\}$ dan $V_b=\{V_4,V_5,V_6\}$.



Gambar 2.4.1

Definisi 2.4.2

Jika dalam graph bipartite $G=(V,E)$ terdapat sedikitnya dua titiknya yang dihubungkan secara langsung oleh lebih dari sebuah garis disebut multigraph bipartite.

Contoh 2.4.2

Gambar 2.4.1 adalah multigraph bipartite dengan v_1 dan v_4 juga v_3 dan v_6 dihubungkan lebih dari sebuah garis.

Teorema 2.4.1

Jika $G=(V,E)$ adalah graph bipartite dengan bipartisi (V_a,V_b) maka $\sum d(V_a) = \sum d(V_b)$.

Bukti :

Setiap garis dalam graph bipartite $G=(V,E)$ dengan bipartisi (V_a,V_b) selalu menghubungkan titik di V_a dengan titik di V_b.

Sehingga setiap garis dalam G menyumbangkan satu derajat pada V_a dan satu derajat pada V_b, maka jumlah derajat titik-titk di V_a $(d(V_a))$ sama dengan jumlah derajat titik-titik di V_b $(d(V_b))$.

Contoh 2.4.3

Pada gambar 2.4.1 diketahui bahwa $V_a=\{v_1,v_2,v_3\}$ dan $V_b=\{v_4,v_5,v_6)$ dengan derajat masing-masing: $d(v_1)=3$, $d(v_2)=2$, $d(v_3)=3$, $d(v_4)=3$, $d(v_5)=3$, $d(v_6)=2$

$\Sigma\, d(V_a) \;=\; d(v_1)+d(v_2)+d(v_3) = 3 + 2 + 3 = 8$

$\Sigma\, d(V_b) \;=\; d(v_4)+d(v_5)+d(v_6) = 3 + 3 + 2 = 8$

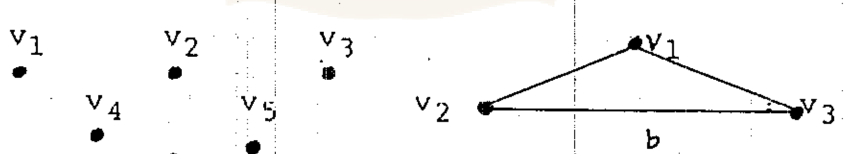
jadi $\Sigma\, d(V_a) = \Sigma\, d(V_b)$

Definisi 2.4.3

Graph reguler adalah graph yang setiap titiknya menpunyai derajat yang sama.

Contoh 2.4.4

Gambar 2.4.2.a adalah graph reguler dengan derajat 0 dan gambar 2.4.2 b adalah graph reguler derajat 2



Gambar 2.4.2

Definisi 2.4.4

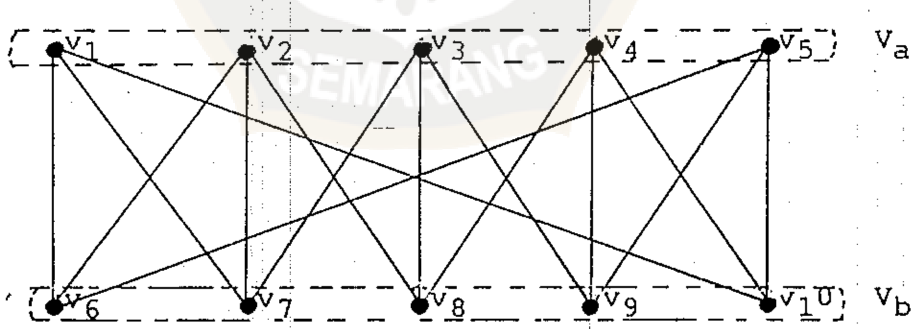
Jika dalam graph reguler $G=(V,E)$ trdapat sedikitnya dua titik yang dihubungkan secara langsung oleh lebih dari sebuah garis maka disebut multigraph reguler.

Definisi 2.4.5

Graph bipartite reguler $G=(V,E)$ adalah suatu graph yang himpunan titik V-nya dapat dipisah menjadi dua himpunan bebas V_a dan V_b, sedemikian hingga untuk setiap garis $e \in E$ maka garis e menghubungkan titik di V_a dengan titik di V_b dan derajat setiap titik di dalam V adalah sama.

Contoh 2.4.5

Gambar 2.4.3 adalah graph bipartite reguler dengan derajat tiap titiknya adalah 3 dengan himpunan titik $V_a=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan $V_b=\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$.



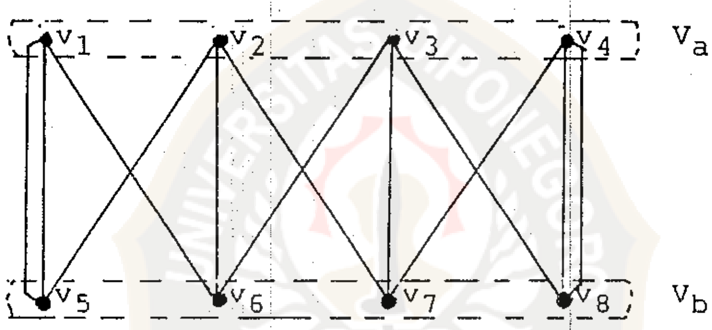
Gambar 2.4.3

Definisi 2.4.6

Jika dalam graph bipartite reguler $G=(V,E)$ terdapat sedikitnya dua titik yang dihubungkan secara langsung oleh lebih dari sebuah garis maka $G=(V,E)$ disebut multigraph bipartite reguler.

Contoh 2.4.6

Gambar 2.4.4 adalah multigraph bipartite reguler derajat 3, dengan titik v_1 dan v_5 serta titik v_4 dan titik v_8 dihubungkan langsung oleh dua garis.



Gambar 2.4.4

Teorema 2.4.2

$G=(V,E)$ adalah multigraph bipartite reguler dengan bipartisi (V_a,V_b) maka jumlah titik di $V_a(|V_a|)$ sama dengan jumlah titik di $V_b(|V_b|)$.

Bukti :

Dari teorema 2.4.1 diketahui bahwa untuk setiap graph bipartite dengan bipartisi (V_a,V_b) maka $\sum d(V_a) = \sum d(V_b)$. Karena derajat setiap titik dalam multigraph bipartite reguler derajat m dengan $m \geq 2$, maka jumlah titik di $V_a(|V_a|) = (\sum (d(V_a)))/m =$

$(\Sigma\ (d(V_b)))/m$ = jumlah titik di $V_b(|V_b|)$.

Contoh 2.4.7

Pada graph gambar 2.4.4 $(|V_a|) = (|V_b|)$.

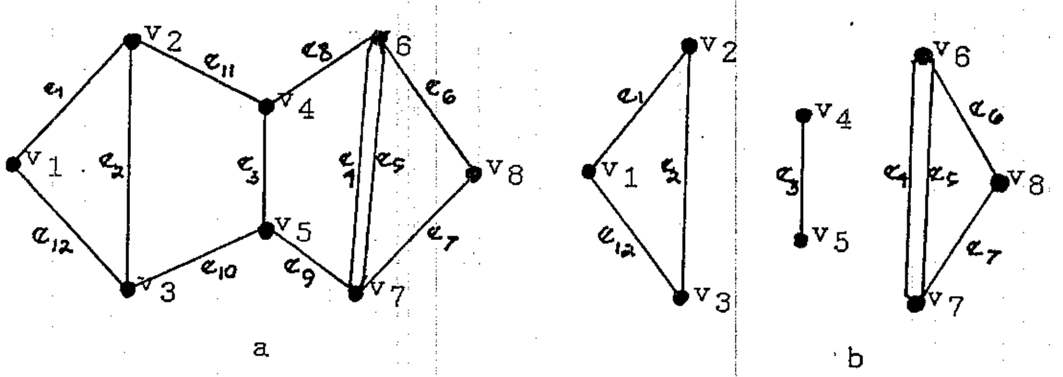
2.5 Himpunan Potong

Definisi 2.5.1

Himpunan potong K adalah himpunan garis-garis yang menghubungkan titik-titik di W dengan titik-titik di W′ di dalam suatu graph G=(V,E) dengan $V = W \cup W'$, $W \cap W' = \emptyset$, $W \neq \emptyset$, $W' \neq \emptyset$.

Contoh 2.5.1

Pada gambar 2.5.1 bila $W = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8\}$ dan $W' = \{v_4, v_5\}$ maka himpunan garis $K = \{e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$ adalah merupakan himpunan potong. Gambar 2.5.1 a sesuai gambar 2.5.1 b dengan himpunan potongnya.



Gambar 2.5.1

2.6. Faktor Dalam Graph

Definisi 2.6.1

F adalah faktor dari graph G jika F adalah spanning subgraph dari graph G dengan $E(F) \neq \emptyset$

Definisi 2.6.2

Faktorisasi dari graph G adalah faktor-faktor dari G dengan himpunan garis masing-masing faktor satu dengan yang lain adalah saling asing sedemikian hingga semua garis dalam G termuat dalam gabungan semua himpunan garis faktor-faktor tersebut.

Definisi 2.6.3

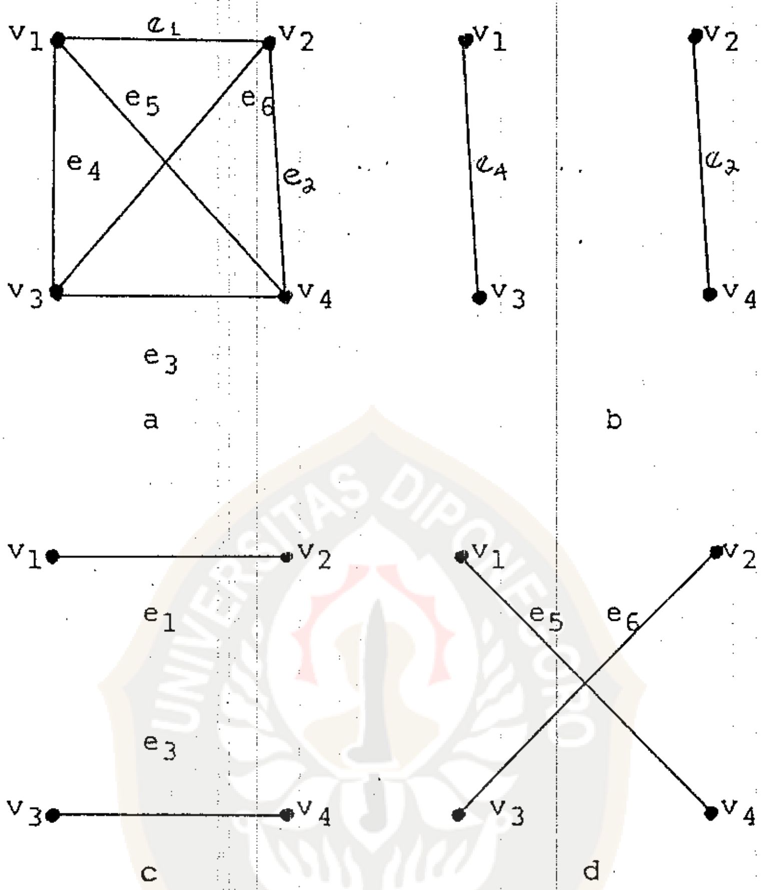
Faktor-n adalah faktor dari sebuah graph G dengan setiap titik dalam faktor-faktor tersebut berderajat n.

Definisi 2.6.4

Faktorisasi-n dari suatu graph G adalah faktorisasi dari G dengan semua faktor tersebut adalah faktor-n.

Contoh 2.6.1

Graph gambar 2.6.1 adalah graph dengan faktor-1-faktor-1 nya.



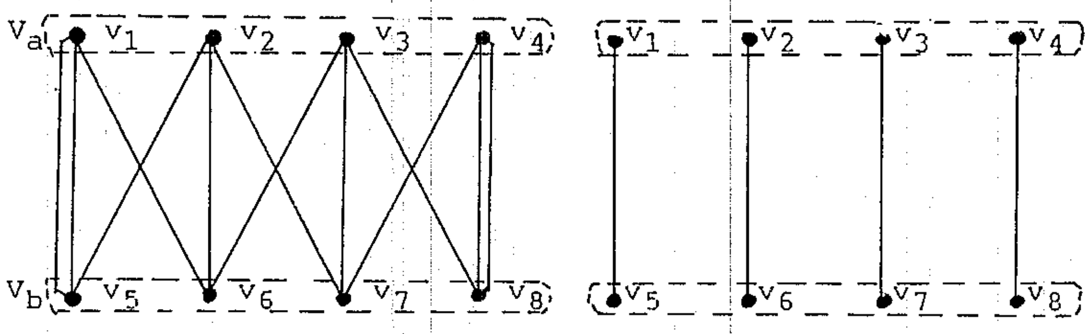
Gambar 2.6.1

Definisi 2.6.5

Setiap multigraph bipartite reguler mempunyai faktor -1

Contoh 2.6.2

Gambar 2.6.2 merupakan contoh multigraph bipartite reguler dengan faktor -1 nya.



Gambar 2.6.2

Teorema 2.6.1

Setiap multigraph bipartite reguler dapat difaktorisasikan -1.

Bukti :

Dari definisi 2.6.5 diketahui bahwa setiap multigraph bipartite reguler mempunyai faktor -1. Misalnya multigraph bipartite reguler G=(V,E) derajat tiap titiknya m. E adalah himpunan garis di dalam faktor -1 dari G. Maka $G-E_1$ adalah graph bipartite reguler dengan derajat m-1, sehingga dari definisi 2.6.5 diketahui bahwa graph $G-E_1$ mempunyai faktor -1. Misalnya E_2 adalah himpunan garis-garis dalam faktor -1 dari graph $G-E_1$. Maka graph $G-(E_1 \cup E_2)$ adalah graph bipartite reguler derajat m-2 yang juga mempunyai faktor -1. Jika proses tersebut diulang sampai diperoleh graph bipartite reguler derajat 1 yang juga merupakan faktor -1 dari G. Misalkan himpunan garis dari graph bipartite reguler derajat 1 tersebut E_m. Maka diperoleh himpunan garis $E_1, E_2, E_3, \ldots$.Em yang merupakan himpunan garis dari faktor-1 - faktor-1 dari G dan himpunan garis tersebut adalah saling asing serta $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \ldots \cup E_m = E$ (garis-garis dalam multigraph bipartite reguler G). Sehingga faktor-1 - faktor-1 tersebut merupakan faktorisasi -1 dari graph G. G dapat difaktorisasi -1.