BAB III

MATERI PENUNJANG

Sistem adalah susunan komponen-komponen fisik yang dihubungkan atau berhubungan sedemikian rupa sehingga membentuk suatu kesatuan. Sedangkan sistem pengendalian adalah susunan komponen fisik yang dihubungkan sedemikian rupa sehingga memerintah, mengarahkan dan mengatur diri sendiri atau sistem lain.

Didalam sistem ada dua istilah penting, yaitu masukan (input) dan keluaran (output).

Masukan (input) adalah rangsangan yang diterapkan pada sebuah sistem pengendalian dari sumber energi luar, agar menghasilkan tanggapan tertentu dari sistem pengendalian itu. Keluaran (output) adalah tanggapan sebenarnya yang diperoleh dari sebuah sistem pengendalian. Sistem pengendalian digolongkan dalam dua katagori umum, yaitu sistem lup terbuka dan sistem lup tertutup. Pada sistem lup tertutup terdapat umpan balik sistem, sehingga sistem lup tertutp sering dinamakan sistem berumpan balik.

Contoh 3.1

Sebuah pemanas yang terkendali secara termostatis mengatur suhu ruangan tertutup secara otomatis merupakan sistem pengendalian. Masukan sistem tersebut adalah suhu acuannya yang bisa distel secara otomatis oleh termostat. Keluarannya adalah suhu ruangan tertutup yang sebenarnya. Bila termostat mendeteksi keluaran lebih kecil dari masukan, tungku memberikan panas sampai suhu ruangan tertutup menjadi sama dengan masukan acuannya. Kemudian tungku itu mati.

3.1 FUNGSI ALIH DAN DIAGRAM BLOK

3.1.1 Fungsi Alih (Transfer Function)

Definisi 3.1

Fungsi alih P(s) dari sebuah sistem adalah perbandingan antara transformasi Laplace keluaran (output) dan transformasi Laplace masukan (input) dimana semua syarat awal sama dengan nol.

Fungsi Alih ditulis dalam bentuk matematis adalah

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (3\text{-}1)$$

dimana :

Y(s) adalah transformasi Laplace dari keluaran (output)

U(s) adalah transformasi Laplace dari masukan (input)

Untuk sistem yang mempunyai bentuk

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 y + a_o =$$

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 u + b_o \qquad (3\text{-}2)$$

dimana y = y(t) dan u = u(t)

Transformasi laplace sistem (3-2) dengan syarat awal pada transformasi Laplace tersebut diambil nol adalah

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_o Y(s) =$$

$$b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_o U(s)$$

atau

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_o \right) Y(s) =$$

$$\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_o \right) U(s)$$

Sehingga fungsi alih dari sistem diatas adalah

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_o}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_o}$$

$$= \frac{\sum_{i=o}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \qquad (3\text{-}3)$$

Contoh 3.2

Diberikan suatu sistem dengan persamaan differensial berikut :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + u$$

Dengan $y = y(t)$ dan $u = u(t)$

Tentukan fungsi alih dari sistem tersebut.

Transformasi Laplace dari sistem ini dengan menetapkan semua syarat awal nol adalah

$$s^2 Y(s) + 3\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = sX(s) + X(s)$$

$$\{ s^2 + 3s + 2 \}\, Y(s) = \{ s + 1 \}\, X(s)$$

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2}\, U(s)$$

maka fungsi alihnya adalah

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

Sifat - sifat fungsi alih

1. Fungsi alih dari sebuah sistem dapat ditentukan dari persamaan differensial sistem dengan mengambil transformasi Laplace dan mengabaikan semua suku yang berasal dari harga-harga awal.

   Sehingga fungsi alih P(s) diberikan oleh

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

2. Persamaan differensial sistem dapat diperoleh dari fungsi alih dengan mengganti variabel s dengan operator differensial D yang didefinisikan oleh $D = \frac{d}{dt}$.
3. Akar-akar penyebut dari fungsi alih adalah kutub-kutub sistem dan akar-akar pembilangnya adalah nol-nol sistem. Selanjutnya fungsi alih dapat sistem diperinci sampai meliputi sebuah tetapan dengan menetapkan kutub-kutub dan nol-nol dari sistem tersebut.

   Tetapan ini yang ditandai dengan K disebut faktor gain sistem.

Contoh 3.3

Diberikan sistem dengan persamaan differensial

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + u$$

dengan y = y(t) dan u = u(t).

Tentukan fungsi alihnya .

Transformasi Laplace dari persamaan differensial ini dengan semua syarat awal sama dengan nol adalah :

$$s\,Y(s) + 2\,Y(s) = s\,U(s) + U(s)$$

$$(s + 2)\,Y(s) = (s + 1)\,U(s)$$

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{s + 2}$$

Contoh 3.4

Diberikan $P(s) = \dfrac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$ suatu fungsi alih .

Maka persamaan differensial sistem ini adalah :

$$y = \left[\frac{2D + 1}{D^2 + D + 1}\right] u$$

$$D^2y + D\,y + y = 2D\,u + u$$

atau $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 2\dfrac{du}{dt} + u$

dengan $y = y(t)$ dan $u = u(t)$

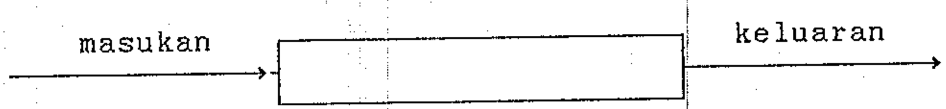
Contoh 3.5

Diberikan fungsi alih $P(s) = \dfrac{K(s + a)}{(s + b)(s + c)}$

Nol-nol dari sistem tersebut adalah di $-a$. Dan kutub-kutub dari dari sistem tersebut adalah $-b$ dan $-c$. Sedangkan K adalah faktor gainnya.

3.1.2 Diagram blok

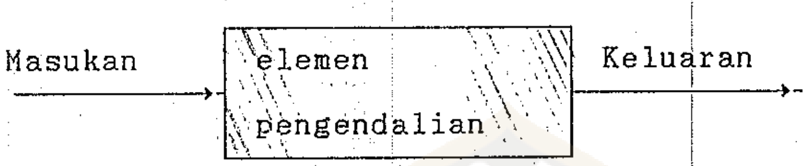
Diagram blok adalah suatu pernyataan gambar yang ringkas dari hubungan sebab akibat antara masukan dan keluaran dari suatu sistem fisis. Diagram ini memberikan cara yang mudah untuk mencirikan hubungan fungsional diantara berbagai komponen sistem disebut juga elemen-elemen sistem.Bentuk paling sederhana dari diagram blok adalah blok tunggal, dengan satu masukan dan satu keluaran.



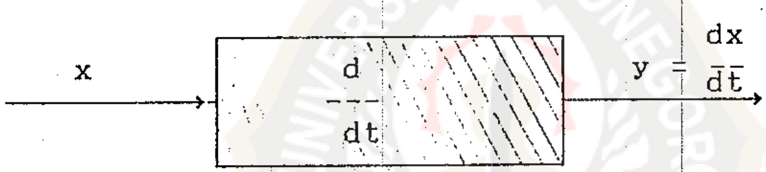
gambar 3.1

Bagian sebelah dalam (segi empat) menyatakan blok, biasanya berisi uraian atau nama elemennya atau simbol matematis yang harus dilakukan pada masukan untuk menghasilkan keluaran. Tanda panah menyatakan arah informasi atau aliran isyarat.

Contoh 3.8



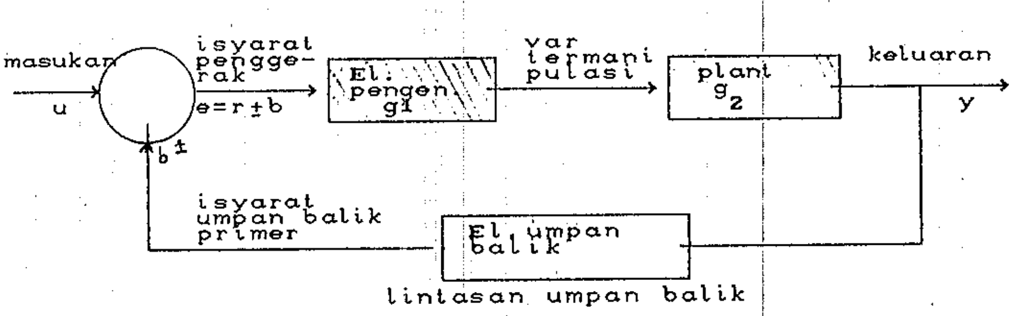
gambar 3-2



gambar 3-3

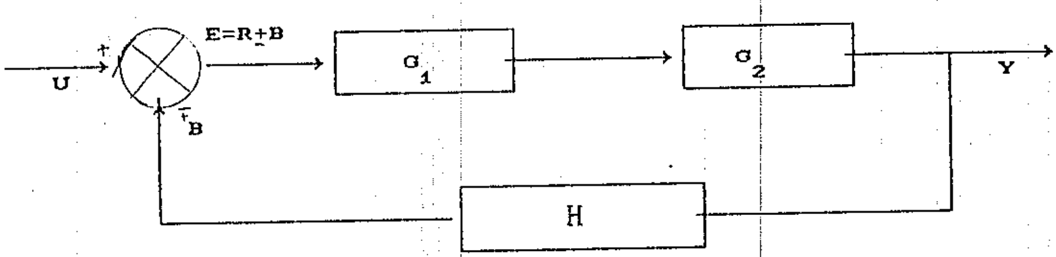
Operasi-operasi penjumlahan dan pengurangan mempunyai pernyataan khusus. Bloknya menjadi lingkaran kecil yang disebut titik penjumlahan, dengan tanda plus dan minus yang tepat sesuai dengan panah - panah yang memasuki lingkaran itu.

Konfigurasi dasar sistem pengendalian loop tertutup (umpn balik) sederhana digambarkan dalam diagram berikut :



gambar 3-4

Elemen-elemen diatas merupakan fungsi dari t. Jika semua besarannya diubah dengan transformasi Laplace dalam fungsi s, konfigurasi diatas dapat digambarkan



lintasan umpan balik

gambar 3-5

Besaran - besaran G_1, G_2 dan H adalah fungsi alih dari komponen - komponen dalam blok tersebut. E = R + B menyatakan umpan balik positif dan E = R - B menyatakan umpan balik negatif.

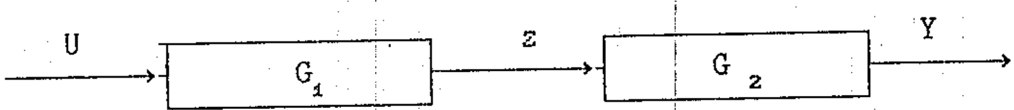
Sifat - sifat Blok

1. Sejumlah berhingga blok - blok yang berhubungan seri secara Aljabar bisa digabungkan oleh perkalian. Yaitu n komponen atau blok dengan fungsi alih G_1, $G_2, \dots, G_n$ yang dihubungkan seri adalah ekivalen denganm sebuah elemen tunggal G dengan hubungan

$$G = G_1 G_2 \dots G_n = \prod_{i=1}^{n} G_i$$

Contoh 3.6

Diberikan blok sederhana berikut :



gambar 3-6

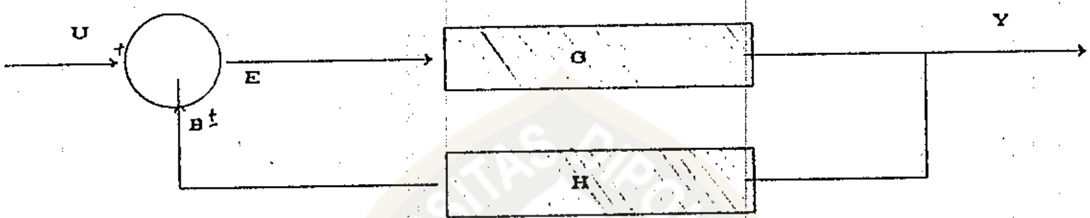
Disini $z = G_1 U$

$$Y = G_2 \; z$$

maka $Y = G_1 \, G_2 \, U$

atau $G = \frac{Y}{U} = G_1 \, G_2$

2.Dua blok dalam lintasan maju sistem umpan balik dapat digabungkan. Konfigurasi yang dihasilkan disebut bentuk kanonik dari sistem pengendalian umpan balik, yaitu :

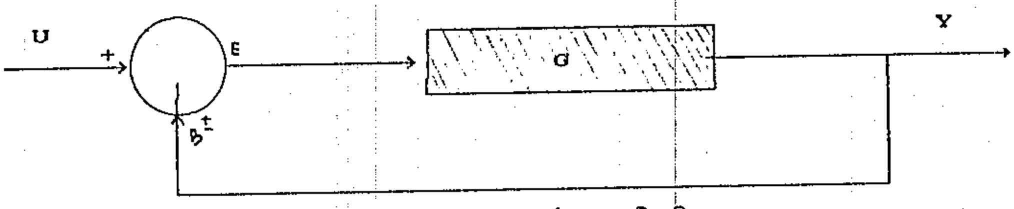


gambar 3-7

Fungsi alih tertutup dapat ditentukan dari hubungan

$$\frac{Y}{U} = \frac{G}{1 + GH}$$

dengan G adalah fungsi alih maju dan GH adalah loop terbuka. Jika pada konfigurasi sistem umpan balik diambil $H = 1$, maka sistemnya disebut umpan balik satuan. Konfigurasi dasar sistem umpan balik satuan adalah sebagai berikut.



gambar 3-8

3.2 BESARAN STATE SISTEM PENGENDALIAN

Pada sistem pengendalian modern, diman sering kali dijumpai adanya beberapa masukan dan keluaran yang terjadi pada sistem ini, memerlukan peninjauan kembali perumusan persamaan yang menggambarkan suatu sistem. Konsep yang digunakan dalam hal ini adalah konsep state .

Definisi 3.9

State suatu sistem adalah sejumlah variabel sedemikian sehingga dengan mengetahui variabel-variabel ini bersama-sama dengan fungsi masukan dan dengan menggunakan persamaan yang melukiskan sistem tersebut dapat diketahui keadaan selanjutnya bagi masukan dan keluaran untuk sistem ini.

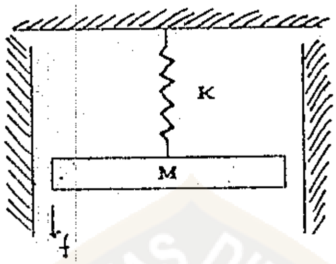
State sistem dilukiskan dan dinyatakan dengan variabel state $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Variabel-variabel state ini adalah variabel yang menentukan masa depan dan tingkah laku sistem bila keadaan sekarang dan sinyal masukannya diketahui. Tinjau sistem gambar 3.11 dimana $c_1(t)$ dan $c_2(t)$ adalah sinyal keluaran dan $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ sinyal - sinyal masukan. Seperangkat variabel state $x_1, x_2, \ldots, x_n$ untuk sistem gambar 3.11 ini adalah seperangkat bilangan sedemikian sehingga dengan mengetahui harga awal dari variabel-variabel state $x_1(t_o), x_2(t_o), \ldots .x_n(t_o)$ pada waktu awal t_o, sinyal masukan $u_2(t)$ dapat ditentukan harga-harga masa depan untuk keluaran dan variabel state .

Contoh 3.10

Keadaan suatu sekaklar on-off, untuk sekaklar lampu. Sekaklar dapat berada dalam keadaan nyala (on) atau pada (off), dan karenanya keadaan sekaklar dapat mempunyai salah satu diantara kedua posisi. Jadi bila diketahui kedudukan sekarang dari saklar pada t_o, maka bila suatu masukan diterapkan akan mampu menentukan masa depan harga keadaan sistem.

Contoh 3.11

Diberikan suatu sistem pegas - massa peredam , gambar 3-9 dibawah ini.



Gambar 3-9

Persamaan differensial yang melukiskan tingkah laku sistem adalah

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + K\,y = u(t)$$

Bilangan yang menyatakan variabel state yang dipilih haruslah sesedikit mungkin untuk menghindari variabel state yang berlebihan. Seperangkat variabel itu adalah kedududkan dan kecepatan massa. Karena itu dapat didefinisikan seperangkat variabel state sebagai x_1, x_2 dimana

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{d\,y(t)}{dt}$$

sehingga persamaan diatas menjadi

$$M\frac{dx_2}{dt} + f\,x_2 + K\,x_1 = u(t)$$

Karena itu persamaan differensial ini dalam bentuk seperangkat (2 buah) persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-f}{M} x_2 - \frac{K}{M} x_1 + \frac{1}{M} u$$

Perangkat persamaan differensial ini melukiskan tingkah laku keadaan sistem dinyatakan dengan laju perubahan setiap variabel state.

3.3 PERSAMAAN DIFFERENSIAL VEKTOR STATE

Keadaan suatu sistem dapat dilukiskan oleh seperangkat persamaan differensial tingkat pertama, yang ditulis dan dinyatakan dengan variabel state $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Persamaan differensial tingkat pertama ini dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11} u_1 + \ldots + b_{1m}u_m$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21} u_1 + \ldots + b_{2m}u_m$$
$$\ldots$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1} u_1 + \ldots + b_{nm}u_m$$

dimana $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Jadi perangkat persamaan differensial serentak ini dapat dibentuk suatu matriks sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}4)$$

Matriks kolom ini terdiri dari variabel-variabel state (keadaan) yang dinamakan vektor state dan ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}5)$$

dimana huruf yang dicetak tebal menunjukkan matriks. Matriks sinyal masukan didefinisikan dengan lambang **u**. Maka sistem (3-4) dapat dilukiskan dengan notasi yang dinamakan persamaan differensdial vektor sistem sebagai berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \qquad (3\text{-}6)$$

Matriks **A** berordo n x n, dan **B** n x m. Persamaan differensial mmatriks vektor ini menggambarkan laju perubahan keadaan sistem dalam hubungannya dengan state sistem.

Persamaan differensial vektor state secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \qquad (3\text{-}7)$$

dimana **f** adalah fungsi linier maupun nonlinier dalam vektor state dan vektor masukan **u**. Vektor kolom **f** adalah matriks kolom yang merupakan fungsi **x** dan **u**.Jika sistemnya tak berubah waktu, yaitu koefisien persamaan differensialnya suatu konstanta maka persamaan (3-7) menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \qquad (3\text{-}8)$$

Contoh 3.12.

Diberikan persamaan berikut :

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

dimana y adalah keluaran dan u adalah masukan sistem.

Tentukan penyajian ruang state sistem ini.

Penyelesaian :

Misalkan variabel state diambil

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

Maka akan diperoleh

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

Dengan menggiunakan notasi matriks vektor tiga persamaan differensial order pertama diatas dapat ditulis menjadi :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} [u]$$

atau $\qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$

dimana

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

dan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

3.4. FUNGSI SKALAR

Fungsi skalar adalah suatu fungsi dari suatu perubah (variabel) yang merupakan suatu nilai konstan. dalam tulisan ini fungsi skalar dinotasikan sebagai $V(x)$ dimana nilai dari $V(x)$ merupakan suatu konstanta sedangkan x adalah vektor state berdimensi n.

Pengertian tenteng kedefinitan dan ketidakdefinitan fungsi skalar sangat penting dalam pembahasan kestabilan. Daerah kedefinitan disajikan dalam daerah lingkaran yang mengitari titik asal. Daerah ini dapat diamati dalam $\| x \| \le k$ (suatu konstanta positif) dimana $\| x \|$ adalah Norma Euclidean.

Definisi 4.4

Fungsi skalar $V(x)$ disebut definit positif (negatif) dalam $\| x \| \le k$, jika $V(x)$ positif (negatif) pada setiap titik dalam $\| x \| \le k$ kecuali pada titik asal dimana $V(x) = 0$.

Definisi 4.5

Fungsi skalar $V(x)$ disebut semidefinit positif (negatif) dalam $\| x \| \le k$, jika $V(x)$ positif (negatif) pada setiap titik termasuk titik asal dimana $V(x) = 0$.

Definisi 4.6

Fungsi skalar $V(x)$ disebut indefinit dalam $\| x \| \le k$, jika $V(x)$ mempunyai nilai positif maupun negatif dalam $\| x \| \le k$, betapapun kecilnya.

Contoh 3.13

Pada contoh ini, menunjukkan fungsi skalar dan klasifikasinya sesuai dengan definisi diatas.

Dimisalkan x adalah vektor 2 dimensi.

1. $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$

   adalah definit positif, karena V(x) bernilao nol hanya pada x = 0 dan V(x) selalu positif.

2. $V(x) = (x_1 + x_2)^2$

   adalah semidefinit positif, karena kecuali di x = 0 ada nilai x lain sehingga V(x) = 0 yaitu $x_1 = -x_2$

3. $V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$

   Definit negatif, karena bernilai nol pada x = 0 dan V(x) selalu negatif.

4. $V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$

   Indifinit, karena V(x) dapat bernilai positif maupun negatif.