BAB II

TEORI DASAR

Pada bab ini akan diberikan beberapa hal yang berkaitan dengan isi sebagai dasar dari tulisan ini.

2.1. EIGENVALUE DAN EIGENVEKTOR

Definisi 2.1

Skalar λ disebut eigenvalue dari matriks bujur sangkar A jika terdapat vektor kolom nan zero u sedemikian sehingga

$$Au = \lambda u$$

vektor u disebut eigen vektor kanan dari A yang bersangkutan dengan λ .

Vektor baris yang memenuhi hubungan

$$vA = \lambda v$$

disebut eigenvektor kiri dari A yang bersangkutan dengan λ.

Teorema 2.1.

Eigenvalue dari suatu matriks simetri bujur sangkar A adalah riil.

Bukti :

Misal h + ik adalah eigenvalue dari matriks A.

Pandang $B = \{(h + ik)I - A\}\{(h - ik)I - A\}$

$$= (hI - A)^2 + k^2 I$$

adalah riil dan singular, karena $(h + ik)I - A$ adalah singular. Jika diberikan suatu vektor non zero x sedemikian sehingga $Bx = 0$ dan

$$x'Bx = x'(hI - A)^2x + k^2x'x$$
$$= x'(hI - A)'(hI - A)x + k^2x'x$$
$$= 0$$

maka

$(hI - A)x$ adalah riil karena $\{(hI - A)x\}'\{(hI - A)x>0$ dan $x'x > 0$, $k = 0$. Sehingga tidak ada akar kompleks.

Teorema 2.2.

Eigenvalue dari suatu matriks Hermitian adalah riil.

Bukti :

Misalkan λ_i eigenvalue dari matriks Hermitian H. maka ada vektor non zero x_i sedemikian sehingga $Hx_i=\lambda_i x_i$. Selanjutnya $\bar{x}_i Hx_i = \lambda_i\bar{x}_i' x_i$ adalah riil dan tidak sama dengan nol. dan juga transpose konjugate $\bar{x}_i Hx_i = \bar{\lambda}_i\bar{x}_i' x_i$. maka $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$, sehingga λ_i riil.

Definisi 2.2.

Karakteristik polinomial dari matriks nxn A, dengan notasi $\Delta(\lambda)$ adalah $\det(A-\lambda I)$.

Teorema 2.3.

Jika matriks mempunyai eigenvalue berbeda , maka eigenvektornya bebas linier .

Bukti :

Pandang suatu matriks nxn A dengan eigenvalue berbeda $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ yang berkorespondensi dengan eigenvektor-eigenvektor $u_1,u_2,\ldots,u_n$ yaitu :

$$Au_i = \lambda_i u_i,\ i=1,2,\ldots n$$

diasumsikan eigenvektor - eigenvektornya tidak bebas linier , maka terdapat skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ a)

Misal $u_k = 0$, maka dari a) diperoleh

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\ldots(A-\lambda_{k-1} I)(A-\lambda_k I)\ldots(A-\lambda_n I)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$$

selanjutnya

$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)u_n = 0$$

karena $u_k = 0$ dan $\lambda_k = \lambda_i$ untuk $i=k$, diperoleh $\alpha_k = 0$. Kontradiksi dengan asumsi mula - mula, maka eigenvektor - eigenvektornya bebas linier .

2.2. DIAGONALISASI MATRIKS

Pandang matriks bujursangkar A berordo nxn , jika M sembarang matriks non singular yang memenuhi sifat perkalian dengan A maka matriks A dan $M^{-1}AM$ akan mempunyai eigenvalue yang sama . matriks demikian disebut Similar. Transformasi $M^{-1}AM$ disebut transformasi Similaritas dan M disebut matriks transformasi similaritas.

Teorema 2.4.

Matriks bujur sangkar dapat ditransformasikan ke matriks diagonal similar jika dan hanya jika eigenvektor - eigenvektornya bebas linier .

Bukti :

Pandang matriks bujur sangkar A orde n dengan eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan berkorespondensi dengan eigenvektor eigenvektor bebaslinier $u_1, u_2, \ldots u_n$, maka

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

$$A\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \{\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \ldots, \lambda_n u_n\}$$

$$= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}\Lambda$$

dimana Λ adalah matriks diagonal yang dibentuk oleh eigenvalue, yaitu

$$\Lambda = \text{diag}\ [\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$$

sebut matriks $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah M . Karena eigen vektor-eigenvektornya bebas linier, maka **M** non singular ,berarti $AM = M\Lambda$

$$M^{-1}AM = \Lambda$$

Akan dibuktikan dengan kontradiksi .

Misal eigenvalue dari matriks **A** adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dan eigenvektor - eigenvektor yang bersangkutan dengan λ_i adalah $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Diandaikan $u_1, u_2, \ldots, u_n$ takbebas linier maka terdapat α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ (yang tidak semua nol) sedemikian sehingga $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$

kedua ruas digandakan dengan A diperoleh

$$\alpha_1 A\ u_1 + \alpha_2 A\ u_2 + \ldots + \alpha_n A\ u_n = 0$$

tetapi $Au_i = \lambda_i u_i$,sehingga

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n u_n = 0$$

dengan mengulang proses diatas akan diperoleh

$$\alpha_1 \lambda_1^2 u_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^2 u_n = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1 \lambda_1^{n-1} u_1 + \alpha_2 \lambda_2^{n-1} u_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^{n-1} u_n = 0$$

$$[\,\alpha_1 u_1 \ \alpha_2 u_2 \ \dots \ \alpha_n u_n\,] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

dimana

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

adalah non singular . Maka $[\alpha_1 u_1 \ \alpha_2 u_2 \ \dots \ \alpha_n u_n] = 0$, yang berarti α_i semuanya nol karena u_i bukan vektor nol sehingga kontradiksi dengan pengandaian bahwa $u_1, u_2, \dots, u_n$ takbebas linier sehingga pengandaian harus diingkar .

Contoh 2.1.

Pandang matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Karakteristik polinomialnya adalah

$\Delta(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

maka eigenvalue dari A adalah $\lambda_1 = -1$dan $\lambda_2 = 3$ dimana eigenvalue yang bersangkutan dengan λ adalah

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

karena eigenvektor - eigenvektornya bebas linier maka matriks dapat didiagonalkan menggunaklan matriks

$M = \{ u_1 u_2 \} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, yaitu

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \Lambda$$

2.3. POLINOMIAL MATRIKS BUJUR SANGKAR

Definisi 2.3

Jika polinomial berhingga f(.) dari suatu skalar x

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$

maka polinomial

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

dimana A matriks bujur sangkar, disebut suatu polinomial dalam A

Teorema 2.3 : (teorema Cayley Hamilton).

Misalkan A suatu matriks bujur sangkar dengan polinomial karakteristik $\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ maka $\Delta(A) = 0$

Bukti

Misalnya matriks A ordo n mempunyai eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ dan polinomial karakteristiknya

$$\Delta(A) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

A dapat didiagonalkan dalam bentuk

$$M^{-1} A M = \Lambda \text{ atau } A = M \Lambda M^{-1}$$

dan

$$A^k = M \Lambda^k M^{-1}, \ k = 0,1,2,\dots,n$$

maka

$$\Delta(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$
$$= M (\alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) M^{-1}$$

Karena Λ = matriks diagonal, berarti

$$\Delta(A) = M \begin{bmatrix} A(\lambda_1) & & 0 \\ & A(\lambda_2) & \\ 0 & & A(\lambda_3) \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$= M \, O \, M^{-1} = O$$

Contoh 2.2.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

maka $\Delta(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$

dan $\Delta(A) = A^2 - 5A + 5I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4. BENTUK KUADRATIK

Misalkan vektor kolom n dimensi $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ dan nxn matriks Q, maka fungsi skalar

$$Q\,[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x, Qx] = x^T Q\, x$$

disebut bentuk kuadratik.

Definisi 2.4

Suatu matriks hermitian Q disebut definit positif ($Q>0$) jika $x^T Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$. Definit negatif ($Q<0$) jika $x^T Ax < 0$ untuk semua $x \neq 0$ dan semidefinit positif ($Q \geq 0$) jika $x^T Ax \geq 0$.

Teorema 2.4 (teorema Silvester)

Misalkan Q matriks hermitian, Q definit positif jhj semua minor utama yang berturutan dari A positif.

Bukti :

$\Longrightarrow$

Misalkan $Q = x^T A\, x$, Minor utama A yang diperoleh denganmenghilangkan baris ke i dan kolom ke i nya adalah matriks A_i dan bentuk kuadratik Q_i yang diperoleh dari Q dengan mengambil $x_i = 0$.

Maka setiap nilai Q_i untuk himpunan nontrivial nilai variabel-variabelnya adalah juga nilai dari Q.

Dari sini Q_i positif, selanjutnya A_i definit positif.

Argumen ini dapat diulang untuk minor utama A_{ij}, A_{ijk}, yang diperoleh dari A dengan menghilangkan 2,3,...,n baris dan kolom yang sama dari A.

$\Longleftarrow$

Misalakan minor utama yang berurutan positif, berarti

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Untuk $a_{11} > 0$, maka $Q = x_1 a_{11} x_1 = a_{11} x_1^2$ definit positif

Untuk det $(Q_2) > 0$, maka

$$Q = x^T A\, x = [\; x_1 \quad x_2 \;] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} x_1^2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + a_{22}\, x_2^2$$

$$= (p\; x_1 + q\; x_2)^2$$

$$> 0 \text{ definit positif}$$

Langkah ini diulang sampai det A > 0

$||x|| = (\, x^T A\; x\,)^{1/2}$ A definit positif.

2.5 TRANSFORMASI LAPLACE

Definisi 2.5

Misalkan f(t) adalah suatu fungsi berharga riil dari variabel t untuk t> 0, maka

$$\int_0^{\infty} f(t)\; e^{-st} dt$$

disebut transformasi Laplace dari f(t) dengan s suatu variabel kompleks dan variabel t menyatakan waktu.

Notasi transformasi Laplace f(t) adalah $\mathfrak{L}$ {f(t)} atau F(s), jadi

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

Contoh 2.3.

Transformasi Laplace dari e^{-t} adalah

$$\mathfrak{L}\{e^{-t}\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{(s+1)} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+1}$$

2.5.1. Invers Transformasi Laplace

Transformasi Laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s), yaitu jika $\mathfrak{L}$ {f(t)} = F(s) maka f(t) disebut suatu invers transformasi laplace dari F(s) dan secara simbolis ditulis dalam bentuk

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Contoh 2.4.

Dari contoh 2.4, maka $\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = e^{-t}$

Sifat-sifat

sifat 1 :Jika $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ masing-masing merupakan transformasi Laplace dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$, maka $a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$ adalah tranformasi laplace dari $a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ dengan a_1 dan a_2 merupakan konstanta sembarang.

Bukti :

Jika $\mathfrak{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) = \int_0^\infty f_1(t)\, e^{-st} dt$ dan

$\mathfrak{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)\, e^{-st} dt$, maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{a_1f_1(t) + a_2 f_2(t)\} &= \mathfrak{L}\{a_1f_1(t)\} + \mathfrak{L}\{a_2f_2(t)\} \\ &= a_1\mathfrak{L}\{f_1(t)\} + a_2\mathfrak{L}\{f_2(t)\} \\ &= a_1F_1(s) + a_2F_2(s) \end{aligned}$$

Sifat 2 : Jika $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ masing-masing adalah invers transformasi laplace dari $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka $b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t)$ adalah invers transformasi Laplace dari $b_1F_1(t) + b_2F_2(t)$ dengan b_1 dan b_2 konstanta sembarang.

Bukti : Jika $\mathfrak{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t)$ dan

$\mathfrak{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)$, maka

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\{b_1F_1(s) + b_2F_2(s)\} &= \mathfrak{L}^{-1}\{b_1F_1(s)\} + \mathfrak{L}^{-1}\{b_2F_2(s)\} \\ &= b_1\mathfrak{L}^{-1}\{F_1(s)\} + b_2\mathfrak{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ &= b_2f_2(t) + b_2f_2(t)\end{aligned}$$

2.5.2 Derivatif dari Transformasi Laplace

Jika $f(t)$ kontinyu dan mempunyai derivatif yang kontinyu sepotong-sepotong disetiap interval berhingga $0<t<T$, maka $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s\,\mathfrak{L}\{f(t)\} - f(0)$.

Jika $f(t), f'(t), \ldots, f^{n-1}(t)$ kontinyu sepotong-sepotong dalam interval berhingga $0<t<T$, maka

$$\mathfrak{L}\{f^n(t)\} = s^n\,\mathfrak{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0).$$