BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. PENGERTIAN DALAM ASURANSI JIWA

Dalam sub bab ini akan dijelaskan beberapa istilah yang sering digunakan dalam asuransi jiwa, juga akan dijelaskan bagaimana definisi dari anuitas dan asuransi jiwa itu sendiri.

2.1.1. Istilah-istilah Yang Sering Digunakan

Nilai tunai (*present value*) yaitu nilai seluruh pembayaran jika dibayar sekaligus pada waktu tertentu. Sedangkan nilai akhir (jumlah akhir) yaitu jumlah seluruh pembayaran dengan bunganya jika seluruhnya dinilai pada waktu tertentu dikemudian hari. Dalam asuransi jiwa dikenal beberapa istilah : polis, tertanggung, yang ditunjuk (ahli waris), uang pertanggungan, jaminan, santunan, premi, premi bersih dan premi tunggal. Secara rinci pengertian dari masing-masing adalah sebagai berikut:

<u>Polis</u> yaitu surat perjanjian asuransi jiwa antara pemegang polis dengan perusahaan asuransi jiwa.

<u>Tertanggung</u> ialah seseorang yang atas jiwanya berkaitan dengan pembayaran jaminan atau santunan.

<u>Uang pertanggungan</u> yaitu sejumlah uang yang tercantum dalam polis yang pembayarannya dikaitkan dengan hidup matinya tertanggung.

<u>Jaminan</u> yaitu uang pertanggungan yang akan dibayarkan jika tertanggung masih hidup pada saat masa asuransinya

berakhir (habis kontrak).

Santunan yaitu uang pertanggungan yang akan dibayarkan jika tertanggung meninggal dunia sebelum masa asuransinya berakhir (habis kontrak).

Premi yaitu sejumlah uang yang harus dibayarkan oleh pemegang polis kepada suatu perusahaan asuransi jiwa atas jasa atau manfaat dari suatu polis.

Premi bersih yaitu premi yang dihitung tanpa memperhatikan faktor biaya (biaya pegawai untuk mengeluarkan polis, biaya administrasi polis membayar santunan, pajak, komisi, dan sebagainya).

Premi tunggal yaitu premi yang dibayarkan sekaligus.

2.1.2. Definisi Anuitas dan Asuransi Jiwa

Ronald Gulezian dan Henry Tingey (1983) menyatakan : "anuitas adalah suatu rangkaian pembayaran yang dilakukan pada interval waktu yang sama."

Menurut Paul M. Hummel dan Charles L.Seebeck (1971) : "Anuitas ialah suatu rangkain dari pembayaran periodik (berkala), biasanya sama, dilaksanakaan dalam interval waktu yang sama", dan menurut Frank Ayres,J.R (1963) :

"Anuitas adalah suatu rangkaian dari pembayaran yang sama dan dilakukan dalam interval waktu yang sama."

Asuransi berasal dari istilah asing "*insurance/assurance*"(Bahasa Inggris) atau dalam bahasa Belanda "*verzekering*" yang sudah diterjemahkan dalam bahasa Indonesia yang berarti "pertanggungan". Namun istilah yang lazim digunakan sampai sekarang adalah "*asuransi*". Perkembangannya dalam bahasa Inggris lebih dikenal dengan istilah "*insurance*".

Menurut Wirjono Projodikoro (1984) : "Perjanjian Asuransi jiwa ialah perjanjian tentang pembayaran uang dengan manfaat dari premi dan yang berhubungan dengan hidup atau matinya seseoraang, termasuk juga perjanjian asuransi kembali (ulang) dengan pengertian bahwa yang dimaksud tidak termasuk asuransi kecelakaan".

Selanjutnya Hangel, D.S (1984) mendefinisikan asuransi jiwa sebagai berikut: "Asuransi jiwa dapat diartikan sebagai suatu rencana sosial yang bertujuan memberikan santunan untuk suatu akibat musibah yang pembayarannya dari iuran-iuran yang dikumpulkan dari semua pihak yang ikut serta dalam rencana tersebut".

2.2. NOTASI DALAM TABEL MORTALITAS

Perhitungan yang digunakan dalam asuransi jiwa didasarkan atas tabel kematian (tabel mortalitas). Tabel yang akan digunakan dalam perhitungan nanti berasal dari Amerika Serikat, yaitu tabel CSO (Comisioners Standard Ordinary) Mortality Table 1941. Tabel ini dibuat berdasarkan pengalaman asuransi jiwa di Amerika Serikat selama jangka waktu 1930 sampai dengan 1940. Perusahaan asuransi di Indonesia masih banyak yang menggunakan tabel CSO 1941 karena belum memiliki tabel yang berasal dari pengalaman sendiri sehingga harus menggunakan tabel dari luar negeri. Ketidak-adaan tabel itu bukan berarti tidak mampu membuatnya dari segi matematika, melainkan datanya tidak cukup tersedia dalam keadaan yang baik.

Dalam tabel ini terdapat simbol-simbol yang berhubungan dengan hidup dan matinya seseorang pada usia tertentu. Secara umum simbol-simbol tersebut adalah sebagai berikut :

l_x = jumlah orang yang tepat berusia x tahun.

d_x = jumlah orang yang meninggal dari l_x orang sebelum mencapai usia (x+1) tahun.

l_{x+1} = jumlah orang yang tepat berusia (x+1) tahun ($l_{x+1} = l_x - d_x$)

p_x = peluang seseorang yang berusia x tahun akan hidup dalam masa satu tahun mendatang.

l_{x+n} = jumlah orang yang tepat berusia (x+n) tahun.

${}_n p_x$ = peluang seseorang yang berusia x tahun akan hidup dalam masa n tahun mendatang.

$$\left\{ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \right\}$$

Jika n = 1 maka :

$${}_1 p_x = p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Bila ${}_{n}q_{x}$ = peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal dalam n tahun atau sebelum mencapai usia (x+n) tahun,

maka :

$$ {}_{n}q_{x} = 1 - {}_{n}p_{x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_{n}d_{x}}{l_x} $$

Dimana :

${}_{n}d_{x}$ = jumlah orang yang meninggal antara usia x dan (x+n) tahun.

Jika n = 1 maka : $q_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \dfrac{d_x}{l_x}$

dimana :

q_x = peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia (x+1) tahun.

Selanjutnya :

${}_{m/n}q_{x}$ = peluang seseorang yang berusia x tahun akan hidup m tahun,tetapi meninggal dalam n tahun kemudian yaitu meninggal antara usia (x+m) dan (x+m+n) tahun.

$$ {}_{m/n}q_{x} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{{}_{n}d_{x+m}}{l_x} $$

Jika n = 1 maka :

$$ {}_{m/1}q_{x} = {}_{m/}q_{x} = \frac{d_{x+m}}{l_x} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} $$

Dari persamaan di atas : x menyatakan usia orang yang dibicarakan , n menyatakan jangka waktu peristiwa meninggal,dan m menyatakan lamanya penundaan terjadinya peristiwa. Misal ${}_{15/5}q_{40}$, hal ini menyatakan peluang seseorang yang sekarang berusia 40 tahun akan meninggal dalam jangka waktu 5 tahun bila meninggalnya ditunda selama 15 tahun (meninggal antara usia 55 dan 60 tahun).

Dengan menggunakan tabel CSO 1941 maka peluang tersebut dapat dihitung sebagai berikut :

$$ {}_{15/5}q_{40} = \frac{l_{55} - l_{60}}{l_{40}} = \frac{754.191 - 677.771}{883.342} = 0,08651 $$

Untuk menghitung nilai harapan hidup menurut usia, dibedakan menjadi dua jenis yaitu harapan hidup ringkas dan harapan hidup lengkap.

1. <u>Harapan hidup ringkas</u> (*curtate expectation of life*), ditulis dengan simbol e_x.

   e_x menyatakan rata-rata jumlah tahun yang masih akan dialami oleh seseorang yang berusia x tahun tanpa memperhitungkan bagian tahun (pecahan).

   Misal seseorang lahir pada tanggal 2 Juli 1951 dan meninggal pada tanggal 28 September 1984, maka dalam perhitungan harapan hidup ringkas, orang tersebut dianggap meninggal pada hari ulang tahunnya yang terakhir. Sehingga umurnya pada waktu meninggal adalah 31 tahun, bukan 31 tahun 2 bulan atau 31 $\frac{1}{6}$ tahun.

   Untuk mendapatkan rumus e_x, diambil jumlah orang yang tepat berusia x tahun yaitu l_x . Sebanyak l_{x+1} orang dari padanya masih akan hidup pada hari ulang tahunnya yang ke x+1 , l_{x+2} daripadanya masih akan hidup pada hari ulang tahunnya yang ke x+2 dan seterusnya,dan tinggal l_w yang masih bisa merayakan hari ulang tahunnya yang terakhir kali.

   Jadi jumlah tahun yang dialami oleh $l_x$orang sampai semua meninggal (hanya dihitung tahun yang lengkap) adalah :

$$ l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots + l_w $$

   Berarti setiap orang dari l_x pada rata - ratanya kebagian sebagai :

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots\ldots + l_w}{l_x} \quad \text{tahun}$$

$$\text{Karena}: \frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x \;,\; \frac{l_{x+2}}{l_x} = {}_2p_x ,\ldots, \frac{l_w}{l_x} = {}_{w-x}p_x$$

$$\text{maka}: \quad e_x = p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_{w-x}p_x$$

2. Harapan hidup lengkap (*complete ecpectation of life*), ditulis dengan simbol $\overset{o}{e}_x$

$\overset{o}{e}_x$ menyatakan rata-rata jumlah tahun yang masih akan alami oleh seseorang yang sekarang berusia x tahun dengan memperhitungkan bagian tahun (pecahan) yang dialami oleh anggota l_x sehingga :

$$\overset{o}{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_o^w l_{x+t}\, dt = \int_o^w {}_tP_x \, dt$$

Bentuk fungsi l_x dalam praktek amat sulit diketahui; oleh karena itu digunakan cara yang yang paling sederhana yaitu dengan memisalkan bahwa kematian terjadi secara merata sepanjang tahun. Dengan demikian maka kematian dalam setahun dapat dimisalkan terjadi pada pertengahan tahun. Berarti secara aproksimasi (hampiran) : $\overset{o}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$

2.3. SIMBOL KOMUTASI

Untuk menyederhanakan perhitungan , dibuatlah simbol komutasi atau simbol perantara sebagai berikut :

$$D_x = v^x \,.\, l_x \quad \text{dimana} \quad v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$$

$$i = \text{tingkat bunga dalam 1 tahun}$$

$$N_x = \sum_{i=o} D_{x+i} = D_x + D_{x+1} + \cdot\cdot\cdot + D_w$$

$$S_x = \sum_{i=0} N_{x+i} = N_x + N_{x+1} + \ . \ . \ . + N_w$$

$$= \sum_{i=0} (i + 1)\ D_{x+1} = D_x + 2\ D_{x+i} + 3\ D_{x+2} + \ . \ . \ . + D_w$$

$$C_x = v^{X+1} \ . \ d_x$$

$$M_x = \sum_{i=0} C_{x+i} = C_x + C_{x+1} + \ . \ . \ . + C_w$$

$$R_x = \sum_{i=0} M_{x+i} = M_x + M_{x+1} + \ . \ . \ . + M_w$$

$$= \sum_{i=0} (i + 1)\ C_{x+1} = C_x + 2\ C_{x+1} + 3\ C_{x+2} + \ . \ . \ . + C_w$$

Jika dalam perhitungan nantinya membutuhkan tabel, maka akan dipilih salah satu tabel yang sudah dibakukan yaitu tabel CSO 1941, baik tabel mortalitas maupun tabel komutasi yang dibuat berdasarkan tingkat bunga $2\frac{1}{2}$ % setahun .

2.4. FUNGSI KEHIDUPAN KONTINU

Pada fungsi kehidupan kontinu, usia x tidak bulat dan dianggap dapat mencapai nilai dari 0 sampai dengan w (usia tertinggi). Berbeda dengan fungsi kehidupan diskrit dimana usia x dianggap bulat karena tanpa memperhitungkan bagian tahun atau pecahan yang dialami oleh anggota l_x. Peristiwa kematian dapat terjadi setiap saat, dan ini berarti bahwa x harus merupakan besaran kontinu (bersinambungan). Bila l_x adalah fungsi kontinu maka tingkat kematian sesaat/laju kematian (*force of mortality*) yaitu tingkat kematian sesaat pada usia tertentu dan diberi simbol μ_x akan dijelaskan sebagai berikut :

Misal diambil x yang bernilai riel non negatif dan

l_x menyatakan banyaknya orang yang hidup dengan usia x tahun maka :

$l_x - l_{x+\Delta x}$ menyatakan banyaknya orang yang meninggal dalam selang usia $(x , x + \Delta x)$.

$\dfrac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$ menyatakan rata-rata orang yang meninggal dalam selang $(x , x + \Delta x)$.

sehingga :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l_{x+\Delta x} - l_x}{\Delta x} = - \frac{d\ l_x}{dx}$$

Jadi :

$$\frac{1}{l_x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x} = - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\ l_x}{dx}$$

Karena l_x merupakan fungsi yang monoton turun maka besaran tersebut berharga positif, dan dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} \mu_x &= - \frac{1}{l_x} \cdot \frac{d\ l_x}{dx} \\ &= - \frac{1}{dx} \cdot \frac{d\ l_x}{l_x} \\ &= - \frac{1}{dx} \cdot d\ (\ln l_x) \\ &= - \frac{d}{dx} \cdot (\ln l_x) \end{aligned}$$

atau :

$$\frac{d\ l_x}{dx} = - l_x \cdot \mu_x \qquad (2.4.1)$$

Persamaan (2.4.1) diintegralkan dari 0 sampai dengan x, didapat :

$$\int_0^x \mu_t \cdot dt = - \int_0^x \frac{1}{l_t} \cdot \frac{d\ l_t}{dt} \cdot dt = - \int_0^x \frac{d\ l_t}{l_t}$$

$$\int_0^x \frac{d\ l_t}{l_t} = - \int_0^x \mu_t \cdot dt$$

$$\Big[\ln l_t \Big]_0^x = - \int_0^x \mu_t \cdot dt$$

$$\ln l_x - \ln l_o = - \int_o^x \mu_t \cdot dt$$

$$\ln \frac{l_x}{l_o} = - \int_o^x \mu_t \cdot dt$$

$$\frac{l_x}{l_o} = e^{- \int_o^x \mu_t \cdot dt}$$

$$l_x = l_o \cdot e^{- \int_o \mu_t \cdot dt}$$

Jika persamaan (2.4.1) diintegralkan dari α sampai dengan w, dimana $x = \alpha + t$ maka :

Untuk $x = \alpha \longrightarrow t = 0$

$x = w \longrightarrow t = w - \alpha$

$dx = d(\alpha + t)$

$= dt$

dengan w = usia tertinggi

α = variabel acak

$0 \leq t \leq 1$

didapat :

$$\int_o^{w-\alpha} \frac{d\, l_{\alpha+t}}{dt} \cdot dt = \int_o^{w-\alpha} - l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$\left[l_{\alpha+t} \right]_o^{w-\alpha} = - \int_o^{w-\alpha} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$l_w - l_\alpha = - \int_o^{w-\alpha} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

Karena w adalah usia tertinggi maka $l_w = 0$, sehingga :

$$l_\alpha = \int_o^{w-\alpha} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

Karena α = variable acak, maka α bisa disubtitusi dengan x sehingga :

$$l_x = \int_0^{w-x} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad (2.4.2)$$

Pandang $d_x = l_x - l_{x+1}$ dimana d_x = jumlah orang yang meninggal dari l_x orang sebelum mencapai usia (x+1) tahun, maka :

$$\left[l_{\alpha+t} \right]_0^1 = -\int_0^1 l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$l_{\alpha+1} - l_\alpha = -\int_0^1 l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

Jika variabel acak α diganti dengan x maka :

$$l_{x+1} - l_x = -\int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$-d_x = -\int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$d_x = \int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Jika persamaan (2.4.1) diintegralkan dari α sampai dengan $\alpha + n$ dimana :

$x = \alpha + t$, maka :

Untuk $x = \alpha \longrightarrow t = 0$

$x = \alpha+n \longrightarrow t = n$

$dx = d\ (\alpha + t)$

$= dt$

Diperoleh :

$$\int_0^n \mu_{\alpha+t} \cdot dt = -\int_0^n \frac{d}{dt} \cdot \ln (l_{\alpha+t}) \cdot dt$$

$$= -\int_0^n d \ln (l_{\alpha+t})$$

$$= -\left[\ln (l_{\alpha+t}) \right]_0^n$$

$$= -\left[\ln (l_{\alpha+n}) - \ln (l_{\alpha+0}) \right]$$

$$= -\ln \frac{l_{\alpha+n}}{l_\alpha}$$

$$\ln \frac{l_{\alpha+n}}{l_\alpha} = -\int_0^n \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$\frac{l_{\alpha+n}}{l_\alpha} = e^{-\int_0^n \mu_{\alpha+t} \cdot dt}$$

Jika variabel acak α diganti x maka :

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \cdot dt} \qquad (2.4.3)$$

Pandang ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ yaitu peluang seseorang yang berusia x tahun akan hidup paling sedikit n tahun, sehingga :

$${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \cdot dt}$$

$$1 - {}_nq_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \cdot dt}$$

$${}_nq_x = 1 - e^{-\int_0^n \mu_{x+t} \cdot dt}$$

Selanjutnya pandang persamaan : $\frac{d\,l_x}{dx} = -l_x \cdot \mu_x$

$$d\,l_x = -l_x \cdot \mu_x \cdot dx$$

Bila diambil variabel acak $x = \alpha + t$ dan diintegralkan dari α sampai dengan $\alpha + n$ maka :

Untuk $x = \alpha \longrightarrow t = 0$

$x = \alpha + n \longrightarrow t = n$

$dx = d\,(\alpha + t)$

$= dt$

didapat :

$$\int_0^n d\, l_{\alpha+t} = -\int_0^n l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$\Big[\, l_{\alpha+t} \,\Big]_0^n = -\int_0^n l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$l_{\alpha+n} - l_{\alpha} = -\int_0^n l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

atau :

$$l_{x+n} - l_x = -\int_0^n l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$\frac{l_{x+n} - l_x}{l_x} = -\frac{1}{l_x} \cdot \int_0^n l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \cdot \int_0^n l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$_n q_x = \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad (2.4.4)$$

Jika diambil $n = 1$ maka :

$$_1 q_x = \int_0^1 \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$q_x = \int_0^1 {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Untuk peluang $_{m/n} q_x$ diperoleh :

$$_{m/n} q_x = \int_m^{m+n} {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad (2.4.5)$$

Bukti :

Pandang persamaan : $d\, l_x = -\, l_x\, \mu_x \cdot dx$

Bila diambil variabel acak $x = \alpha + t$ dan diintegralkan dari $\alpha + m$ sampai dengan $\alpha + m + n$ maka :

untuk $x = \alpha + m \longrightarrow t = m$

$x = \alpha + m + n \longrightarrow t = m + n$

didapat :

$$\int_m^{m+n} d\, l_{\alpha+t} = -\int_m^{m+n} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$\left[l_{\alpha+t} \right]_m = -\int_m^{m+n} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

$$l_{\alpha+m+n} - l_{\alpha+m} = -\int_m^{m+n} l_{\alpha+t} \cdot \mu_{\alpha+t} \cdot dt$$

atau :

$$l_{x+m+n} - l_{x+m} = -\int_m^{m+n} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$\frac{l_{x+m+n} - l_{x+m}}{l_x} = -\frac{1}{l_x} \int_m^{m+n} l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

$$\frac{l_x - l_{x+m+n}}{l_x} = \int_m^{m+n} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

Pandang ${}_{m/n}q_x = \dfrac{l_{m+n} - l_{x+m+n}}{l_x}$ yaitu peluang seseorang yang berusia x tahun, akan hidup m tahun, tetapi meninggal dalam m tahun kemudian, yaitu meninggal antara usia (x+m) dan (x+m+n) tahun sehingga :

$${}_{m/n}q_x = \int_m^{m+n} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot dt \qquad \text{(terbukti)}$$

2.4.1. Hampiran tingkat kematian sesaat

Dalam praktek kadang-kadang tingkat kematian sesaat μ sulit dihitung. Untuk itulah dicari nilai hampirannya.

Pandang ${}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,.dt}$

untuk $n = 1$ maka : $p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\,.dt}$

$$\ln p_x = -\int_0^1 \mu_{x+t} \,.\, dt$$

$$-\ln p_x = \int_0^1 \mu_{x+t} \,.\, dt$$

Integral $\left(\int_0^1 \mu_{x+t}\ .dt\right)$ merupakan pertengahan harga (*mean value*) tingkat kematian sesaat μ_{x+t} antara x dan x+1 , diasumsikan dengan $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ sehingga :

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} \doteq -\ln p_x$$

Oleh karena itu :

$$_2p_{x-1} = e^{-\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt}$$

maka :

$$\ln\left({}_2p_{x-1}\right) = -\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt$$

$$\ln\left(p_{x-1} \, . \, p_x\right) = -\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt$$

$$\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt = -\ln\left(p_{x-1} \, . \, p_x\right) = -\left[\ln p_{x-1} + \ln p_x\right]$$

$$= -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

Hal ini disebabkan :

$$\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt = \int_{-1}^{0} \mu_{x+t} \, . \, dt + \int_{0}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt$$

$$\doteq -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

dan :

$$\int_{-1}^{1} \mu_{x+t} \, . \, dt = 2\,\mu_x$$

Sehingga :

$$2\mu_x \doteq -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

$$\doteq -\left[\ln p_{x-1} + \ln p_x\right]$$

$$\mu_x \doteq -\frac{1}{2} \cdot \left[\ln p_{x-1} + \ln p_x\right]$$

$$\doteq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left[p_{x-1} \cdot p_x\right]$$

$$\doteq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left[\frac{l_x}{l_{x-1}} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x}\right]$$

$$\doteq -\frac{1}{2} \ln \frac{l_{x+1}}{l_{x-1}}$$

$$\doteq -\frac{1}{2} \left[\ln l_{x+1} - \ln l_{x-1} \right]$$

Hampiran lain bisa dicari dengan menggunakan deret Taylor; misalnya l_x fungsi polinom berderajad 2. Cara ini dapat dilakukan dengan mengganti $\frac{dl_x}{dx}$ atau $l_x^{\prime}$ pada persamaan (2 . 4 . 1) tingkat kematian sesaat μ_x yaitu

$$\frac{dl_x}{dx} = - l_x \cdot \mu_x$$

Pandang suatu fungsi polinom berderajad 2 sehingga :

$$l_{x+h} = l_x + h \cdot l_x^{\prime} + \frac{h^2}{2\,!} \cdot l_x^{\prime\prime}$$

Untuk $h = 1 \longrightarrow l_{x+1} = l_x + l_x^{\prime} + \frac{1}{2} l_x^{\prime\prime}$

$h = -1 \longrightarrow l_{x-1} = l_x - l_x^{\prime} + \frac{1}{2} l_x^{\prime\prime}$

Jika kedua persamaan tersebut dikurangkan maka diperoleh :

$$l_{x+1} - l_{x-1} = l_x + l_x^{\prime} + \frac{1}{2} \cdot l_x^{\prime\prime} - l_x + l_x^{\prime} - \frac{1}{2} \cdot l_x^{\prime\prime}$$

$$= l_x^{\prime} + l_x^{\prime} = 2\, l_x^{\prime}$$

$$l_x^{\prime} = \frac{1}{2} \left[l_{x+1} - l_{x-1} \right]$$

$$\frac{dl_x}{dx} = \frac{1}{2} \left[l_{x+1} - l_{x-1} \right]$$

Jadi untuk tingkat kematian sesaat μ_x dimana :

$$\frac{dl_x}{dx} = - l_x \cdot \mu_x$$

dapat didekati dengan hampiran tersebut diatas sehingga :

$$\frac{1}{2} \left[l_{x+1} - l_{x-1} \right] = - l_x \cdot \mu_x$$

$$\mu_x = - \frac{1}{2\, l_x} \cdot \left[l_{x+1} - l_{x-1} \right]$$

2.4.2. Interpolasi Usia Pecahan

Jika usianya adalah pecahan , maka digunakan interpolasi linier. Pandang l_x yaitu jumlah orang yang tepat berusia x tahun.

Untuk usia pecahan :

$$\begin{aligned} l_{x+t} &\doteq (1-t)\cdot l_x + t\cdot l_{x+1} \\ &= l_x - t\cdot l_x + t\cdot l_{x+1} \\ &= l_x - t\,(l_x - l_{x+1}) \\ &= l_x - t\cdot d_x \end{aligned}$$

dimana : $0 \le t \le 1$ dan x usia bulat.

Dari persamaan tersebut diatas , dapat diketahui ${}_tp_x$ dan ${}_tq_x$ sebagai berikut :

Untuk $0 \le t \le 1$ maka :

$$\begin{aligned} {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - t\cdot d_x}{l_x} &= 1 - t\cdot\frac{d_x}{l_x} \\ &= 1 - t\cdot q_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_tq_x = 1 - {}_tp_x &= 1 - (1 - t\cdot q_x) \\ &= t\cdot q_x \end{aligned}$$

Jadi tingkat kematian sesaat :

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}}\cdot\frac{d\,l_{x+t}}{d\,(x+t)}$$

dimana :

$$\frac{d\,l_{x+t}}{d\,(x+t)} = \frac{d\,l_{x+t}}{dt} = \frac{d\,(l_x - t\cdot d_x)}{dt} = -d_x$$

sehingga :

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -\frac{1}{l_{x+t}}\cdot\frac{d\,l_{x+t}}{d\,(x+t)} \\ &= -\frac{1}{l_{x+t}}\cdot(-d_x) \\ &= \frac{d_x}{l_{x+t}} \\ &= \frac{d_x}{l_x}\cdot\frac{l_x}{l_{x+t}} \end{aligned}$$

$$= q_x \cdot \frac{1}{{}_t p_x}$$

$$= \frac{q_x}{1 - t \cdot p_x}$$

2.5. FUNGSI HIDUP GABUNGAN

Dalam sub bab (2.2) telah dibahas simbol ${}_n q_x$ yang menyatakan fungsi hidup tunggal (*functions of a single life*). Misalkan ada 2 orang yang masing-masing berusia x dan y tahun, maka untuk mencari peluang keduanya masih hidup dalam masa satu tahun mendatang dibuat asumsi bahwa peristiwa hidup dari kedua orang tersebut saling bebas.

Dalam teori peluang, apabila A dan B saling bebas maka peluangnya adalah :

$$p\,(AB) = p\,(A) \cdot p\,(B)$$

Artinya peluang dari terjadinya kedua peristiwa yang saling bebas adalah hasil kali peluang dari masing-masing peristiwa.

Dengan demikian, peluang bahwa (x) dan (y) keduanya masih hidup dalam masa satu tahun mendatang adalah $p_x \cdot p_y$ yang ditulis dengan simbol p_{xy} dimana :

$$p_{xy} = p_x \cdot p_y$$

$$= \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y} = \frac{l_{x+1} \cdot l_{y+1}}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_{x+1\,:\,y+1}}{l_{xy}}$$

Secara umum, peluang dari (x) dan (y) akan hidup dalam masa n tahun adalah :

$${}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \frac{l_{x+n}}{l_n} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_n} = \frac{l_{x+n\,:\,y+n}}{l_{xy}} \quad (2.5.1)$$

Pandang persamaan ${}_n p_x + {}_n q_x = 1$, maka peluang meninggal :

$$ {}_{n}q_{xy} = 1 - {}_{n}p_{xy} = 1 - \frac{l_{x+n\,:\,y+n}}{l_{xy}} $$

$$ = \frac{l_{xy} - l_{x+n\,:\,y+n}}{l_{xy}} \qquad (2.5.3) $$

Untuk $n = 1$ maka $q_{xy} = 1 - p_{xy}$

dimana : $d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1\,:\,y+1}$ dan $d_{xy} \neq d_x \cdot d_y$

maka $l_{xy} - l_{x+n\,:\,y+n} = {}_{n}d_{xy}$

Jadi ${}_{n}q_{xy}$ menyatakan peluang paling sedikit satu dari dua orang yang berusia x dan y tahun akan meninggal dalam n tahun, disebut juga kegagalan hidup gabungan xy.