BAB II

PENGERTIAN LATTICE

2.1. RELASI

DEFINISI 1

Barisan berhingga adalah suatu himpunan n elemen yang berkorespondensi satu-satu dengan himpunan bilangan asli {1,2,3,...n} yang disusun dalam urutan pokok. Pasangan berurutan adalah barisan dari dua elemen.

DEFINISI 2

Diberikan suatu himpunan S yang beranggotakan a,b,c,.... Misalkan ditentukan suatu himpunan pasangan berurutan R,$(x,y)\in R$ dimana $x,y\in S$. Himpunan pasangan berurutan ini dinamakan relasi diadik dalam S. Pasangan berurutan $(a,b)\in R$,dapat ditulis a R b, dan dibaca "a ada dalan relasi R ke b" atau "relasi R berlaku antara a dan b" a disebut anteseden ke b , b konsekwen ke a . Jika setiap anggaota S muncul sebagai anteseden , R dikatakan terjadi diatas S.

DEFINISI 3

Diberikan suatu himpunan S ,andaikan $S_n=(x_1,x_2,x_3,....,x_n)$ adalah barisan n elemen anggota S. Untuk beberapa n tertentu ditempatkan suatu elemen $y\in S$. Himpunan P dari pasangan berurutan (S_n,y)

dinamakan operasi finitary dalam S. Untuk n = 1,2,3, P disebut unary, binary, ternary dan secara umum untuk n elemen dinamakan n-ary. P adalah relasi diadik antara barisan S_n dengan y.

DEFINISI 4

Jika dalam suatu himopuan A terdapat operasi n-ary P, yang didefinisikan untuk setiap barisan S_n dari n elemen anggota A, himpunan A dikatakan tertutup degnan memperhatikan operasi P. Suatu himpunan tertutup dengan memperhatikan satu atau lebih operasi finitary dinamakan suatu aljabar.

Suatu sub-aljabar adalah himpunan bagian dari aljabar A yang juga merupakaan aljabar dengan memperhatikan operasi-operasi pada A.

Contoh 1

Bilangan genap membentuk sub-aljabar dari aljabar bilangan asli. Tetapi bilangan ganjil tidak karena jumlah dua bilangan ganjil adalah genap, dengan memperhatikan operasi penjumlahan.

Contoh 2

U = {a,b,c,d} maka akan terdapat 16 himpunan bagian yang berfungsi seperti elemen-elemen dari aljabar. Dari U akan terdapat 7 sub-aljabar yang terdiri dari empat elemen.

1. {Ø,{a,b,c},{d},U}

2. $\{\emptyset,\{a,b,d\},\{c\},U\}$
3. $\{\emptyset,\{a,c,d\},\{b\},U\}$
4. $\{\emptyset,\{b,c,d\},\{a\},U\}$
5. $\{\emptyset,\{a,b\},\{c,d\},U\}$
6. $\{\emptyset,\{a,c\},\{b,d\},U\}$
7. $\{\emptyset,\{a,d\},\{b,c\},U\}$

Ketujuh himpunan diatas mengandung komplemen untuk setiap pasang anggotanya, interseksi dan gabungan dari setiap pasang anggotanya.

2.2 RELASI EKUIVALENSI

DEFINISI 5

Diberikan suatu himpunan S dari elemen-elemen a,b,c,...,didefinisikan suatu relasi ekuivalensi E pada S sebagai sembarang relasi pada S dimana berlaku :

i Refleksif

Untuk setiap a pada S, maka aEa.

ii. Simetris

Jika aEb maka bEa.

iii. Transitif

Jika aEb dan bEc maka aEc.

Contoh 3

Misal S adalah himpunan bilangan asli yang merupakan hasil kali suku prima untuk a = 1 didefinisikan $\bar{a}=1$ untuk a>1 maka $a=\Pi P_i^{\alpha_i}$, $\bar{a}$ didefinisikan sebagai ΠP_i.

Jadi jika $a = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$\bar{a} = 2 \times 3 \times 5$

Maka aEb jika dan hanya jika $\bar{a} = \bar{b}$.

Jadi himpunan semua bilangan yang mempunyai faktor prima yangsama adalah ekuivalen.

THEOREMA 1

Sembarang relasi ekuivalensi E atas himpunan tak kosong S menginduksi pembagian dari S ke dalam himpunan-himpunan bagian tak kosong yang terpisah (saling asing), yang beranggotakan seluruh anggota dari himpunan S.

Bukti :

Misal himpunan-himpunan bagian dari S dibentuk dengan aturan:

Jika aEb, menyatakan a dan b berada dalam himpunan bagian yang sama. Karena aEa untuk sembarang $a \in S$ maka dengan refleksifitas (definisi 5), setiap unsur $a \in S$ akan terdapat dalam sembarang himpunan bagian, bahkan bila S hanya mempunyai satu himpunan bagian yaitu S itu sendiri. Diandaikan a dan b dalam satu himpunan bagian dan b dan c dalam himpunan bagian yang lain maka didapat aEb dan bEc, dimana dengan sifat transitif (definisi 5) didapat aEc, a dan c berada dalam himpunan bagian yang sama. Kontradiksi dengan pengandaian di atas, jadi himpunan-himpunan bagian tersebut adalah saling asing.

DEFINISI 6.

Himpunan-himpunan bagian dari teorema 1 dinamakan klas-klas ekuivalensi.

TEOREMA 2

Sembarang pembagian dari suatu himpunan S ke dalam himpunan-himpunan bagian yang saling asing sedemikian sehingga setiap anggota S berada dalam himpunan himpunan bagian tersebut dan tak ada anggota S yang berada lebih dari satu himpunan bagian menginduksi suatu relasi ekuivalensi E atas himpunan S.

Bukti:

Untuk setiap $a,b \in S$ didefinisikan suatu relasi E atas S dengan aEb jika dan hanya jika a dan b berada dalam himponan bagian yang sama. Harus diperlihatkan bahwa E adalah relasi ekuaivalensi. Jelas bahwa E adalah refleksif dan simetris. Jika a dan b anggota dari himpunan bagian yang sama, juga b dan c dalam suatu himpunan bagian. Karena b hanya dapat muncul dalam suatu himpunan bagian maka a,b dan c ada dalam satu himpunan bagian. Ini berarti aEc atau terbukti sifat transitif, jadi terbukti E relasi ekuivalensi.

2.3. RELASI KONGRUENSI

DEFINISI 7

Misal A merupakan aljabar dengan satu operasi finitary atau lebih. Misal $P\ (a_1,a_2,a_3,\ldots a_n) = y_1$,

$$P\ (b_1,b_2,b_3,\ldots b_n) = y_2$$

Misal C adalah suatu relasi ekuivalensi yang didefinisikan pada A sehingga (dalam masing-masing operasi unitary P) $a_1 C\ b_1$, $a_2 C\ b_2$, $a_3 C\ b_3$, ...$a_n C\ b_n$. Berdasarkan penggabunggan menunjukkan $y_1 C y_2$. C dikatakan relasi kongruensi pada A.

THEOREMA 3

Sembarang relasi kongruensi pada suatu aljabar A menghubungkan suatu aljabar A/C, yang elemen-elemennya adalah klas-klas ekuivalen dimana C membagi A, dan memiliki operasi finitary pada kelas-kelas yang berhubungan dalam jumlah dan jenis operasi finitary pada A.

Bukti:

C adalah relasi ekuivalensi dan ini berarti membagi A menjadi klas-klas ekuivalensi (teorema 1). C adalah suatu relasi kongruensi, dengan demikian berdasarkan definisi 7 klas-klas yang dihasilkan dari sembarang operasi finitary hanya tergantung pada klas-klas dari elemen-elemen pada A yang dioperasikan. Pada setiap operasi finiatry P $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = y$ didalam A menghubungkan sebuah operasi finitary Q pada kelas-klas ekuivalensi, didefinisikan dengan Q $(X_1, X_2, X_3, \ldots X_n) = Y$ dimana $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, Y$ adalah klas-klas yang mengandung $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, y$.

DEFINISI 8

Aljabar A/C pada terorema 3 dinamakan aljabar kwosen..

Contoh 4

Pandang himpunan semua pasangan bilangan asli. Dibentuk himpunan ini menjadi aljabar A dengan memberikan dua operasi binair untuk semua pasangan berurutan (a,b), (c,d) dimana :

1.(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)

Kemudian dibentuk relasi C atas A dengan aturan:

2.(a,b)C(c,d) jika dan hanya jika a+d=b+c.

Relasi C ini jelas merupakan refleksif dan simetrik. Untuk transitif dibuktikan dengan :

Jika (a,b)C(c,d) dan (c,d)C(e,f) maka berlakulah :

$a+d = b+c$ dan $c+f = d+e$

$a+d+c+f = b+c+d+e$

atau $a+f = b+e$

Jadi (a,b) C (e,f). Terbukti C transitif.

Jadi relasi C adalah relasi ekuivalensi.

Akan diperlihatkan bahwa C adalah relasi kongruensi.

Misal $(a_1, b_1)C(a_2,b_2)$ dan $(c_1,d_1)C(c_2,d_2)$ dengan (2) didapat :

(3). $a_1+b_2 = b_1+a_2$ dan $c_1+d_2 = d_1+c_2$

Jika : $(a_1,b_1) + (c_1,d_1) = (a_1+c_1,b_1+d_1)$

$(a_2,b_2) + (c_2,d_2) = (a_2+c_2,b_2+d_2)$

maka $a_1+c_1+b_2+d_2 = (a_1+b_2)+(c_1+d_2)$

$= (a_2+b_1)+(c_2+d_1)$

$= a_2+c_2+b_1+d_1$

Jadi$(a_1+c_1, b_1+d_1)C(a_2+c_2, b_2+c_2)$

Dengan demikian C adalah relasi ekuivalensi atas A (theorema 3) menghasilkan aljabar kwosen A/C adalah kelas -kelas X,Y,Z....atas pasangan berurutan yang ekuivalen.

2.4. URUTAN PARSIAL

DEFINISI 9.

Misal S adalah sebuah himpunan dengan elemen a,b,c,....

Relasi urutan parsial O pada S adalah sembarang relasi diadik pada S yang memenuhi:

1. Refleksif

   Untuk setiap $a \in S$, aOa.

2. Anti simetrik

   Jika a O b dan bOa, maka a=b

3. Transitif

   Bila aOb dan bOc maka aOc

Simbul O dalam aOb biasanya diganti dengan $\leq$; jika $a \leq b$ dikatakan bahwa a lebih kecil atau sama dengan b, a dikandung/terdapat dalam b, a anggota dari b dll. Jika $a \leq b$ atau $b \leq a$ dikatakan bahwa a,b dapat dibandingkan (sebanding).

DEFINISI 10

Suatu himpunan S dimana relasi urutan parsial O didefinisikan dinamakan himpunan berurutan parsial.

Contoh 5.

S adalah sebuah himpunan dari himpunan-himpunan bagian dari A,B,... Dan $A \leq B$ berarti A adalah himpunan bagian dari B;$A<B$ berarti A himpunan bagian sejati dari B.

Contoh 6.

S adalah himpunan bilangan asli, $a \leq b$ didefinisikan b/a yaitu a adalah pembagi dari b.

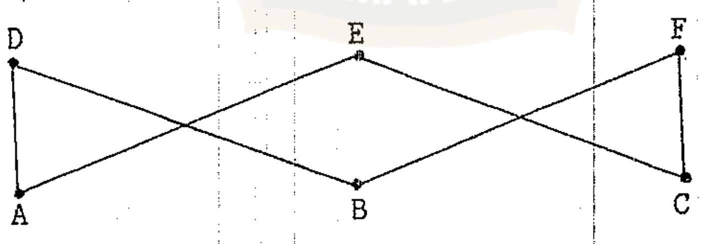
Himpunan berurutan parsial dapat digambarkan dengan diagram, dimana elemennya digambar dengan noktah. Jika b memenuhi a, noktah yang mewakili a dihubungkan dengan noktah yang mewakili b dengan garis vertikal.

Contoh 7.

Misal S himpunan bagian tak kosong dari {a,b,c}.

A={a}, B={b}, C={c}, D={a,b}, E={a,c}, F={b,c}. Maka relasi "himpunan bagian dari " merupakan relasi urutan parsial.

Gambar 1



DEFINISI 11

Misal S,T adalah dua himpunan berurutan parsial , dengan $S \leftrightarrow T$ yaitu terjadi korespondensi satu-satu antara elemen-elemen dari S dengan elemen dari T. Dalam korespondensi ini s_1,s_2 menghubungkan t_1,t_2

secara berturut-turut, ditulis $s_1 \backsim t_1$, $s_2 \backsim t_2$.

Apabila $s_1 \le s_2$ didalam S menunjukkan $t_1 \le t_2$ dalam T dan $t_1 \le t_2$ dalam T menunjukkan $s_1 \le s_2$, korepondensi ini dinamakan ISOMORFISMA dan S dan T dikatakan saling isomorfis.

DEFINISI 12

Jika dalam relasi diadik, antiseden di tukar dengan konsekwen, kita dapatkan relasi konversi R' yaitu :

xR'y jika y R x

DEFINISI 13

Himpunan S yang diurutakan berdasarkan relasi R' adalah dual dari S yang diurutkan berdasarkan R.

CONTOH 8

Himpunan bilangan {2,4,6,8,10,12}

$a \le b$ yang berarti a faktor dari b, maka dualnya adalah $b \ge a$ yang berarti b kelipatan dari a.

DEFINISI 14

Misal T merupakan himpunan bagian dari himpunan berurutan parsial S.

1.a. Bila a merupakan sebuah elemen dari T sehingga $a \le t$ untuk semua t dalam T, a disebut elemen terkecil dari T. (elemen terkecil bila ada adalah tunggal).

b .Bila a merupakan sebuah elemen dari T sehingga $a \ge t$ untuk semua t dalam T, a disebut elemen terbesar dari T. (elemen terbesar bila ada adalah tunggal).

2. a. Bila T = S, elemen terkecil sering disebut elemen nol (o)

   b. Bila T = S, elemen terbesar sering disebut elemen gabungan (u).

3. a. Bila a ada dalam T dan tidak ada elemen t dari T sehingga t <a, a disebut elemen minimal dari T. Elemen minimal tidak perlu unik.

   b. Bila a ada dalam T dan tidak ada elemen t dari T sehingga t > a, a desebut elemen maximal dari T. Elemen maximal tidak perlu unik.

4. a. Bila b merupakan sebuah elemen dari S sehingga b ≤ t untuk semua t dalam T, b di sebut batas bawah dari T.

   b. Bila g merupakan sebuah elemen dari S sehingga b ≥ t untuk semua t dalam T, b di sebut batas atas dari T.

5. a. Bila g merupakan batas bawah dari T sehingga b ≤ g untuk setiap batas bawah dari T, g dinamakan batas bawah terbesar dari T.

   b. Bila g merupakan batas atas dari T sehingga b ≥ g untuk setiap batas atas dari T, g dinamakan batas atas terbesar dari T.

6. a.Bila elemen g itu ada, elemen itu adalah unik, karena himpunan dari batas bawah tidak pernah kosong dan g merupakan elemen terbesar dari himpunan ini.

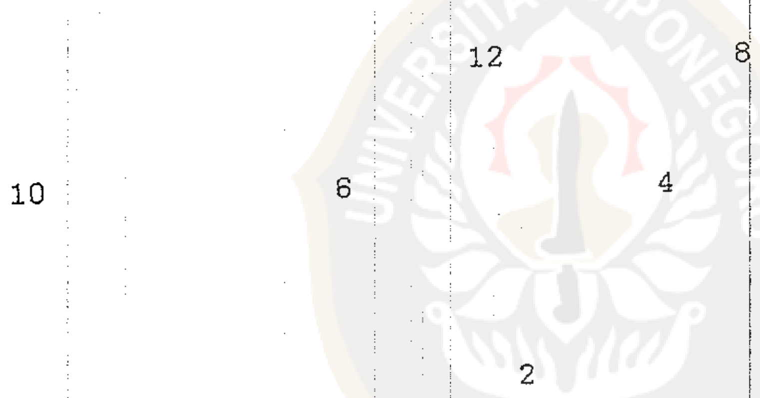
   b.Bila elemen g itu ada, elemen itu adalah unik, karena himpunan dari batas atas tidak pernah kosong dan g merupakan elemen terkecil dari himpunan ini.

Contoh 9

Diagram lattice di bawah inimemperlihatkan bahwa angka 2 adalah elemen terkecil,angka 8,10,12 adalah elemen maksimal,angka 12 merupakan batas atas terkecil dari himpunan bagian yang terdiri dari 2,4,6,12.

2 adalah elenen terkecil / elemen nol, angka 8,10,12 adalah elemen maximal, angka 12 merupakan batas atas terkecil dari himpunan bagian yang terdiri dari 2,4,6,12.

Gambar 2



Gambar 2

DEFINISI 15

Gugusan K adalah hmpunan berurutan parsial dimana untuk setiap pasang elemen a,b didapatkan $a \leq b$ atau $b \leq a$

2.5 LATTICE

DEFINISI 16

Lattice adalah suatu struktur aljabar dengan dua operasi binair (dengan simbol pergandaan (.); dibaca: meet; dan simbol penjumlahan (+) ; dibaca: joint). dimana untuk setiap a,b,c dalam L, dipenuhi postulat-postulat:

Ia. Untuk setiap pasangan berurutan (a,b) dari elemen-elemen a,b ditentukan sebuah elemen unik $a \cdot b$ dalam L.

b. Untuk setiap pasangan berurutan (a,b) dari elemen-elemen a,b ditentukan sebuah elemen unik $a+b$ dalam L.

IIa. $a \cdot b = b \cdot a$

b. $a+b = b+a$

IIIa. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

b $a+(b+c) = (a+b)+c$.

IVa. $a \cdot (a+b) = a$

b. $a+a \cdot b = a$

THEOREMA 4

$$a \cdot a = a$$

Bukti :

$a \cdot a = a \cdot (a + a \cdot b)$ dengan definisi 16.IV b

$= a$ dengan definisi 16.IV a

THEOREMA 5

$$a + a = a$$

Bukti :

$a + a = a + a \cdot a$ dengan THEOREMA 4

$= a$ dengan definisi 16.IV b.

Dari teorema 4 dan 5 ini dapat dilihat bahwa perkalian dan pertambahan adalah imdepoten. Jadi tidak diperlukan eksponen atau koefisien bilangan dalam teori Lattice.

THEOREMA 6

Bila a.b = a maka a + b = b

Bukti :

a + b = a.b + b dengan hipotesa

= b + a.b dengan definisi 16.II b

= b + b.a dengan definisi 16.II a

= b dengan definisi 16.IV b

THEOREMA 7

Bila a + b = b maka a.b = a

Bukti :

a.b = a.(a + b) dengan hipotesa

= a dengan definisi 16.IV a.

DEFINISI 17

Relasi R antara dua elemen dalam suatu Lattice dapat dijelaskan dengan :

1. a R b bila a.b = a
2. a R b bila a + b = b.

aRb pada definisi 17 dapat ditulis dengan a≤b.

THEOREMA 8 (Refleksif)

a R a

Bukti :

a.a = a dengan theorema 6 : dari sini a R a, dengan definisi 17.(1)

THEOREMA 9 (Anti simetris)

Bila $a\ R\ b$ dan $b\ R\ a$, maka $a = b$

Bukti :

$a = a.b$ dengan hipotesa pertama dan definisi 17

$= b.a$ dengan definisi 16.II a.

$= b$ dengan hipotesa kedua dan definisi 17

THEOREMA 10 (Transitif)

Bila $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$, maka $a\ R\ c$.

Bukti :

$a.c = (a.b).c$ dengan hipotesa pertama dan definisi 17

$= a.(b.c)$ dengan definisi 16 III a

$= a.$ dengan hipotesa kedua dan definisi 17(1)

Dari ketiga theorema di atas terlihat bahwa R adalah relasi urutan parsial karena memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

THEOREMA 11

Suatu Lattice merupakan himpunan berurutan persial, dengan $a.b = a$ dan $a+b = b$.

Bukti:

Dengan teorema 8, teorema 9, teorema 10, dan definisi 17.

Contoh 10

Elemen-elemen dari L merupakan 16 faktor dari bilangan 216 yaitu 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216.

Himpunan ini mengandung FPB dan KPK yang unik untuk dua anggota sembarang. Misal a.b di definisikan sebagai FPB (a,b) dan a + b di definisikan sebagai KPK (a,b).

Dapatlah diperhatikan bahwa definisi 16 terpenuhi.

Lattice dalam contoh 35 dapat diperhatikan dengan diagram sebagai berikut :

216

72 108

24 36 54

8 12 18 27

4 6 9

2 3

1

Gambar 3

THEOREMA 12

$a.b \leq a$

Bukti :

$a.b + a = a + a.b$ dengan definisi 16.III b

$= a$ dengan definisi 16.IV b

dari sini $a.b \leq a$ dengan definisi 17 (1)

THEOREMA 13

$a \leq a + b$

Bukti :

$a (a + b) = a$ berdasarkan 16.IV a

karena itu $a \leq a + b$ dengan definisi 17 (1).

THEOREMA 14

$a \cdot b \leq b$

Bukti:

$b \cdot a \leq b$ dengan theorema 12.

$b \cdot a = a \cdot b$ dengan 16.II a.

Jadi $a \cdot b \leq b$

TEOREMA 15

$b \leq a + b$.

Bukti :

$b \leq b + a$ dengan theorema 13

$b \leq a + b$ dengan definisi 16.II b

Dari theorema 14 dan 16 dapat dilihat bahwa $a \cdot b$ merupakan batasbawah dari pasangan a,b, dan dari theorema 15 dan 17, $a + b$ merupakan batas atas pasangan a,b.

THEOREMA 16

Bila $c \leq a$ dan $c \leq b$ maka $c \leq a \cdot b$.

Bukti :

$c = c \cdot a$ dengan hipotesa pertama dan definisi 17 (1)

$= (c \cdot b) \cdot a$ dengan hipotesa kedua dan definisi 17 (1)

$= c \cdot (b \cdot a)$ dengan def 16 III a.

$= c \cdot (a \cdot b)$ dengan def 16 II a.

Jadi dengan definisi 17 (1), $c \leq a \cdot b$.

Ini berarti $a \cdot b$ merupakan batas bawah terbesar dari pasangan a,b.

THEOREMA 17

Bila $a \leq d$ dan $b \leq d$ maka $a + b \leq d$

Bukti :

$(a+b)+d = a + (b + d)$ dengan definisi 16.III b

$= a + d$ dengan hipotesa kedua dan definisi 17(2)

$= d$ dengan hipotesa pertama dan definisi 17(2)

karena itu dengan definisi 17(2), $a + b \leq d$.

Jadi $a + b$ merupakan batas atas terkecil dari pasangan a,b.

THEOREMA 18

Suatu Lattice merupakan himpunan berurutan persial dengan $a \leq b$ yang berarti $a \cdot b = a$ dan $a + b = b$ yang di dalamnya setiap pasang akan mempunyai batas bawah terbesar dan batas atas terkecil dalam himpunan.

Bukti :

Theorema 11 membuktikan bagian pertama. Dengan memperhatikan definisi 16 Ia , Ib, setiap pasang dari elemen a,b memiliki hasil kali yang unik $a \cdot b$ dan jumlah unik $a + b$ dalam latihan dan theorema 12 - 17 memperlihatkan batas-batas yang membuktikan.

2.3. Aturan Dualitas

Definisi 17 menerangkan urutan persial pada lattice sebagai berikut :

i. $a \leq b$ jika $a \cdot b = a$

ii. $a \leq b$ jika $a + b - b$

Bila dalam pernyataan $a \cdot b = a$ dan $a + b = b$, irisan diganti dengan gabungan dan gabungan dengan irisan akan diperoleh $a + b = a$ dan $a \cdot b = b$. Berdasarkan definisi 17 hal ini akan berakibat $a \geq b$. Dengan demikian pertukaran dari irisan dan gabungan dalam sebuah rumus akan memutar semua tanda pertidaksamaan.

Jadi didapatkan suatu aturan dualitas :

Bila dalam sembarang teorema semua irisan dan gabungan ditukarkan dan juga semua tanda pertidaksamaan, akan diperoleh suatu teorema yang valid.

misalnya :

Untuk sembarang $a,b \in L$ akan berlaku

$a + b \geq a$

Dualitasnya

$a \cdot b \leq a$.

2.4. KOMPLEMENT

DEFINISI 18

Misal x adalah elemen dari interval [a,b] dari lattice L. JIka ada elemen y anggota L sedemikian sehingga.

$x \cdot y = a$, $x + y = b$

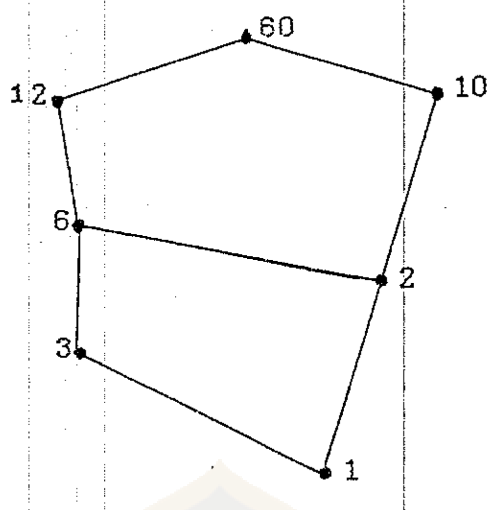
maka y dikatakan komplemen relatif dari R ke interval [a,b]

Contoh 11

Ketuju faktor dari 60 yaitu 60,10,12,6,3,2,1

dimana $a \cdot b$ didefinisikan sebagai FPB dari a dan b dan $a+b$ adalah KPK dari a dan b. Maka 6 dan 12 adalah komplemen dari 10 relatif ke interval [2,60]

Gambar 4



DEFINISI 19

Jika setiap elemen x dari interval [a,b] sedikitnya mempunyai satu komplemen relatif ke [a,b], interval itu dikatakan menjadi terkomplemen. Jika setiap interval dalam suatu lattice adalah terkomplemen, lattice ini dikatakan terkomplemen relatif.

DEFINISI 20

Misal x adalah elemen dari lattice L dengan elemen o dan elemen gabungan u. Bila ada y anggota dari L sedemikian sehingga

$x \cdot y = o$, $x + y = u$

maka y disebut komplemen dari x

DEFINISI 21

Jika setiap elemen x dari suatu lattice dengan o dan u sedikitnya mempunyai satu komplemen, lattice ini dikatakan terkomplemen. Dengan kata lain, suatu lattice dengan o dan u adalah terkomplemen jika interval [o,u] adalah terkomplemen.

Ini berarti bahwa terkomplemen relatif lattice dengan o dan u adalah terkomplemen, tetapi lattice terkomplemen tidak memerlukan terkomplemen relatif.

Contoh 12

Faktor dari 10 yaitu 10,5,2,1

Dengan aturan a + b adalah KPK dari a dan b dan a.b adalah FPB dari a dan b.

Terlihat bahwa setiap elemen dari ke 4 faktor 10 tersebut mempunyai komplemen.

Jika setiap elemen x anggota L dengan o dan u mempunyai sedikitnya satu komplemen, Lattice tersebut dikatakan berimbang.

2.5. SUB-LATTICE

DEFINISI 22

Himpunan bagian bukan kosong S dari elemen lattice L yang memiliki irisan dan gabungan dari dua elemen untuk sembarang anggota-anggotanya dinamakan sub Lattice L.

Contoh 13

himpunan P yang terdiri dari :

{ U = {a,b,c,d}, A = {a}, B {b}, C = {c}, D = {d},

E = {a,b}, F = {a,c}, G = {a,d}, H = {b,c}, I = {b,d}

J = {c,d}, K = {a,b,c}, L = {a,c,d}, M = {b,c,d}

N = {a,b,d} O = {Ø} }

Himpunan di atas dengan aturan A + B adalah gabungan dari A dan B, A·B adalah irisan dari A dan B.

Himpunan {U,K,D,O} adalah sub lattice

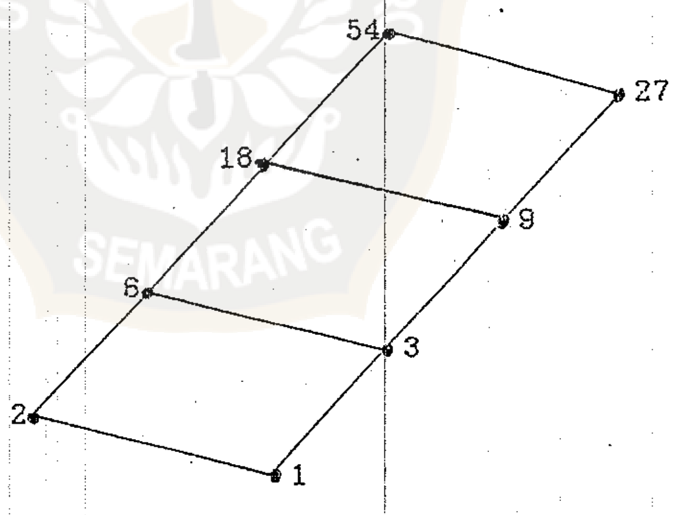
DEFINISI 23

Sub lattice dari lattice L dinamakan konveks bila untuk sembarang elemen a,b dalam S,a ≤ b, seluruh interval [a,b] anggota dari S.

Contoh 14

Sub-lattice yang beranggotakan 1,2,3,6,9,18 pada diagram lattice gambar 5 adalah konveks.

Gambar 5



Pada diagram lattice gambar 6 sub-lattice yang beranggotakan {o,a,b,u} adalah tidak konveks.