BAB II

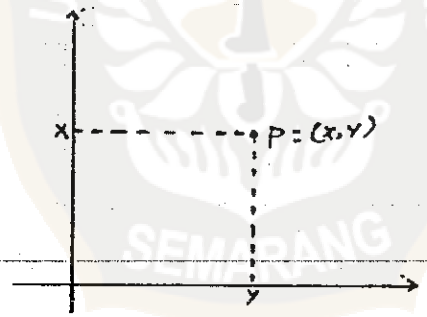
TEORI PENUNJANG

2.1. KONTINUITAS

Definisi (2.1.1)

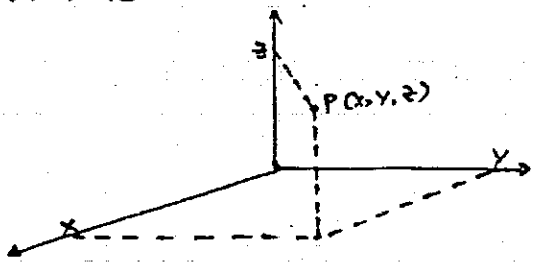
Suatu ruang euclidean dimensi n (R^n) adalah himpunan semua n-tupel $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dari bilangan real sedemikian sehingga n-tupel adalah titik dalam R^n.

Suatu titik dalam R^2 disajikan dalam bentuk koordinat Cartesius, sehingga suatu titik p mempunyai koordinat p=(x,y) (gambar 2.1.1a)



Gb (2.1.1a).Titik p dengan koordinat (x,y).

Pada R^3 disajikan dengan tiga sumbu saling tegak lurus, sehingga suatu titik p mempunyai koordinat p=(x,y,z) (gambar 2.1.1b)



Gb (2.1.1b).Titik p dengan koordinat (x,y,z).

Dalam pembicaraan selanjutnya, dibatasi untuk

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

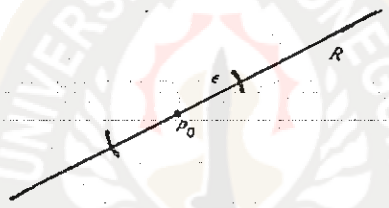
n=1,2,3 dan untuk n=1 disajikan dengan R saja.

Definisi (2.1.2)

Suatu bola terbuka dalam R^n dengan pusat $p_o=(x_1^o, x_2^o, \ldots x_n^o)$ dan jari-jari $\varepsilon>0$, adalah himpunan :

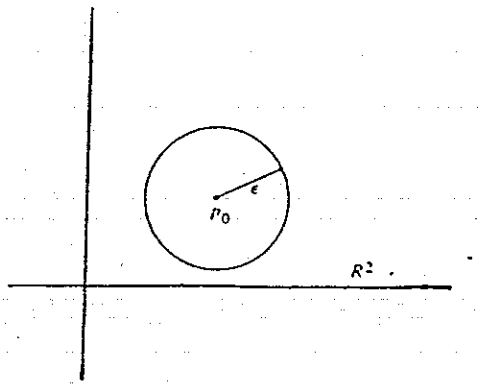
$$B_\varepsilon(p_o)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n/(x_1-x_1^o)^2+\ldots+(x_n-x_n^o)^2<\varepsilon^2\}$$

Dengan demikian, dalam R, $B_\varepsilon(p_o)$ adalah suatu interval terbuka dengan pusat p_o dan panjangnya 2ε (gambar 2.1.2a)



Gb (2.1.2a).Interval terbuka dengan pusat p_o, jari-jari ε.

Dalam R^2, $B_\varepsilon(p_o)$ adalah interior dari suatu cakram dengan pusat p_o dan jari-jari ε (gambar 2.1.2b)

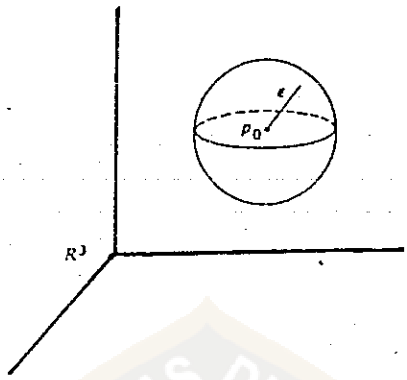


Gb (2.1.2b).Cakram dengan pusat p_o,jari-jari ε.

Dalam R^3, $B_\varepsilon(p_o)$ adalah interior dari daerah yang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dibatasi oleh suatu bola dengan pusat p_o dan jari-jari ε (gambar 2.1.2c)

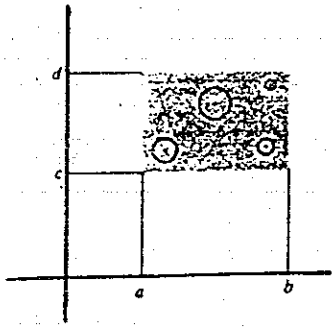


Gb (2.1.2c).Bola dengan pusat p_o,jari-jari ε.

Himpunan $U \subset R^n$ adalah himpunan terbuka jika untuk setiap $p \in U$ terdapat suatu bola $B_\varepsilon(p) \subset U$, artinya seluruh titik pada U dikelilingi oleh titik-titik dari U sendiri. Suatu himpunan terbuka dalam R^n yang memuat suatu titik $p \in R^n$ dinamakan persekitaran dari p. Dalam pembicaraan selanjutnya, yang dimaksud dengan $U \subset R^n$ adalah himpunan terbuka U dalam R^n.

Contoh (2.1.1)

Himpunan $\{(x,y) \in R^2 / a<x<b , c<y<d \}$ adalah himpunan terbuka dalam R^2 (gambar 2.1.3a)

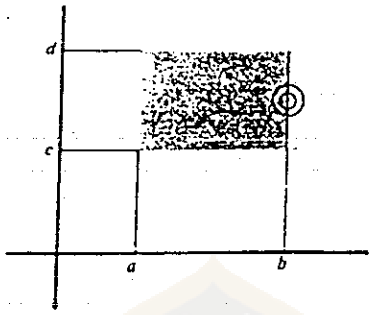


gambar 2.1.3a .$\{(x,y) \in R^2 / a<x<b, c<y<d \}$

Apabila paling sedikit satu dari ketidaksamaan, misalnya

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$x<b$ diganti dengan $x\leq b$, himpunan menjadi tidak terbuka (gambar 2.1.3b)



gambar 2.1.3b. $\{(x,y)\in R^2 / \ a<x\leq b \ , \ c<y<d \ \}$

Definisi (2.1.3a)

Fungsi real $f : U\subset R \longrightarrow R$ dari satu variabel real, adalah kontinu pada $x_o\in U$, jika diberikan $\varepsilon>0$ terdapat suatu $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $|x-x_o| < \delta$, maka $|f(x)-f(x_o)| <\varepsilon$.

Definisi (2.1.3b)

Fungsi real $f : U\subset R^2 \longrightarrow R$ dari dua variabel real, adalah kontinu pada $(x_o,y_o)\in U$, jika diberikan $\varepsilon>0$ terdapat suatu $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2$, maka $|f(x,y)-f(x_o,y_o)| <\varepsilon$.

Definisi (2.1.3c)

Fungsi real $f : U\subset R^3 \longrightarrow R$ dari tiga variabel real, adalah kontinu pada $(x_o,y_o,z_o)\in U$, jika diberikan $\varepsilon>0$ terdapat suatu $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2<\delta^2$, maka $|f(x,y,z)-f(x_o,y_o,z_o)|<\varepsilon$.

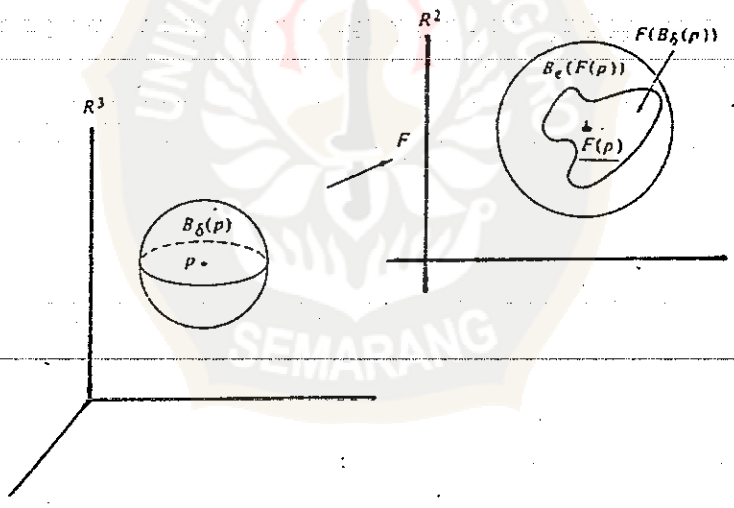
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Pengertian dari kesatuan bola merupakan hal khusus dari konsep umum :

Suatu pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah kontinu pada $p \in U$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$.

Dengan kata lain, F kontinu pada p jika sembarang titik-titik yang melingkupi F(p) adalah bayangan dari titik-titik yang melingkupi p. (gambar 2.1.3).

Suatu pemetaan F dikatakan kontinu dalam U jika F kontinu untuk semua $p \in U$.



Gb (2.1.3).Pemetaan kontinu $F:U \subset R^3 \longrightarrow R^2$.

Diberikan suatu pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$, dapat ditentukan m fungsi dari n variabel , misalkan $p=(x_1,\ldots,x_n) \in U$ dan $f(p)=(y_1,\ldots,y_m)$. Sehingga dapat disajikan :

$$y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots\ldots,y_m=f_m(x_1,\ldots,x_n).$$

Fungsi-fungsi $f_i:U \longrightarrow R$, $i=1,2,\ldots\ldots,m$, adalah

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

fungsi-fungsi komponen dari F.

Contoh (2.1.2)

Misalkan F adalah pemetaan yang disajikan dengan : $F(x,y,z)=(-x,-y,-z)$, maka fungsi-fungsi komponen dari F adalah :

$f_1(x,y,z) = -x$,

$f_2(x,y,z) = -y$,

$f_3(x,y,z) = -z$.

Contoh (2.1.3)

Misalkan $\Pi : R^3 \longrightarrow R^2$ suatu proyeksi dengan $\Pi(x,y,z) = (x,y)$. Maka fungsi-fungsi komponen dari Π adalah : $f_1(x,y,z) = x$,

$f_2(x,y,z) = y$.

Proposisi (2.1.1)

Pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$, adalah kontinu jika dan hanya jika setiap fungsi-fungsi komponen $f_i : U \subset R^n \longrightarrow R$, $i=1,\ldots\ldots,m$ kontinu.

Bukti :

Diasumsikan F kontinu pada $p \in U$. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapatlah suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$. Demikianlah jika $q \in B_\delta(p)$, maka

$F(q) \in B_\varepsilon(F(p))$,

yaitu , $(f_1(q)-f_1(p))^2+\ldots\ldots+(f_m(q)-f_m(p))^2 < \varepsilon^2$,

berarti bahwa, untuk setiap $i=1,\ldots,m$,

$|f_i(q)-f_i(p)| < \varepsilon$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Karena itu jika diberikan $\varepsilon>0$ terdapatlah $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $q\in S_\delta(p)$, maka

$$|f_i(q)-f_i(p)| < \varepsilon,$$

yang berarti tiap f_i kontinu pada p.

Sebaliknya, misalkan f_i, $i=1,\ldots,m$ kontinu pada p. Maka diberikan $\varepsilon>0$ terdapatlah $\delta_i>0$ sedemikian sehingga jika $q\in S_{\delta_i}(p)$, maka

$$|f_i(q)-f_i(p)| < \varepsilon/\sqrt{m} .$$

Ditentukan $\delta<\min.\delta_i$ dan $q\in S_\delta(p)$, maka

$$(f_1(q)-f_1(p))^2 + \ldots\ldots + (f_m(q)-f_m(p))^2 < \varepsilon^2,$$

yang berarti F kontinu pada p.

Contoh (2.1.4)

Misalkan $F : U \subset R \longrightarrow R^m$, maka

$$F(t) = (x_1(t),\ldots\ldots\ldots,x_m(t)),\ t\in U.$$

Biasanya disebut *vektor fungsi harga*, dan fungsi-fungsi komponen dari F adalah komponen-komponen dari vektor $F(t)\in R^m$. Bila F kontinu atau fungsi-fungsi $x_i(t)$, $i=1,\ldots,m$ kontinu , dikatakan bahwa F adalah suatu *kurva kontinu* dalam R.

Proposisi (2.1.2)

Pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ kontinu pada $p\in U$ jika dan hanya jika diberikan persekitaran V dari F(p) dalam R^m dapat ditemukan suatu persekitaran W dari p dalam R^n sedemikian sehingga $F(W)\subset V$.

Bukti :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Diasumsikan F kontinu pada p. Karena V himpunan terbuka yang memuat F(p), maka F(p) juga memuat bola terbuka $B_\varepsilon(F(p))$ untuk suatu $\varepsilon>0$. Dengan kontinuitas, terdapatlah suatu bola $B_\delta(p) = W$ sedemikian sehingga :

$$F(W) = F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) \subset V$$

Sebaliknya, diasumsikan bahwa kondisi tercapai. Diberikan $\varepsilon>0$ dan ditentukan $V = B_\varepsilon(F(p))$. Terdapatlah suatu persekitaran W dari p dalam R^n sedemikian sehingga $F(W)\subset V$. Karena W terbuka, maka terdapatlah suatu bola $B_\delta(p)\subset W$. Jadi,

$$F(B_\delta(p)) \subset F(W) \subset V = B_\varepsilon(F(p)),$$

yang berarti F kontinu pada p.

Proposisi (2.1.3)

Misalkan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$ dan $G : V \subset R^m \longrightarrow R^k$ adalah pemetaan-pemetaan kontinu dimana U dan V adalah himpunan-himpunan terbuka sedemikian sehingga $F(U)\subset V$. Maka $GoF : U \subset R^n \longrightarrow R^k$ adalah pemetaan kontinu.

Bukti :

Diambil $p\in U$ dan V suatu persekitaran dari GoF(p) dalam R^k. Dengan kontinuitas dari G, terdapatlah suatu persekitaran Q dari F(p) dalam R^m dengan $G(Q)\subset V$. Dengan kontinuitas dari F, terdapat suatu persekitaran W dari p dalam R^n dengan $F(W)\subset Q$. Dengan demikian,

$$GoF(W) \subset G(Q) \subset V ,$$

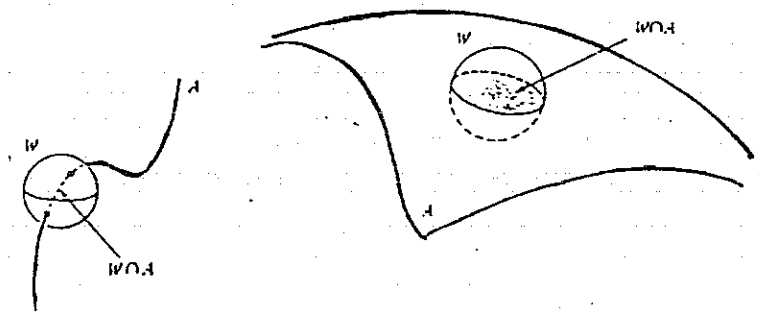
yang berarti GoF kontinu.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Misalkan pemetaan $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ dan suatu himpunan $C \subset A$. Fungsi pembatas dari F terhadap C adalah $F|C : C \longrightarrow R^m$ pemetaan yang terdefinisi dengan aturan yang sama dengan F tetapi hanya berlaku terhadap elemen-elemen dari C.

Misalkan $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ adalah pemetaan dimana A merupakan himpunan sembarang dalam R^n. Dikatakan bahwa F kontinu dalam A jika terdapat suatu himpunan terbuka $U \subset R^n$, $U \supset A$, dan suatu kontinu $F^* : U \longrightarrow R^n$ sedemikian sehingga pembatasan $F^*|A = F$. Dengan kata lain, F kontinu dalam A jika F merupakan pembatas dari suatu pemetaan kontinu yang terdefinisi dalam suatu himpunan terbuka yang memuat A.

Jika $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ kontinu, diberikan suatu persekitaran V dari F(p) dalam R^m, $p \in A$, terdapatlah suatu persekitaran W dari p dalam R^n sedemikian sehingga $F(W \cap A) \subset V$. Untuk keadaan ini, himpunan $W \cap A$ dinamakan persekitaran dari p dalam A. (gambar 2.1.4).



Gb (2.1.4).(a) Persekitaran dalam suatu kurva A.
(b) Persekitaran dalam suatu permukaan A.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh (2.1.5)

Misalkan $E = \{(x,y,z) \in R^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$ adalah suatu elipsoida dan $\Pi : R^3 \longrightarrow R^2$ dengan $\Pi(x,y,z) = (x,y)$. Maka pembatasan dari Π terhadap E adalah suatu pemetaan kontinu dari E ke R^2.

Definisi (2.1.4)

Suatu pemetaan kontinu $F : A \subset R^n \longrightarrow R^n$ dikatakan pemetaan homomorfisma onto F(A) jika F adalah pemetaan satu-satu dan inversnya $F^{-1}: F(A) \subset R^n \longrightarrow R^n$ adalah kontinu. A dan F(A) adalah himpunan homomorfis.

Contoh (2.1.6)

Misalkan $F: R^3 \longrightarrow R^3$ adalah pemetaan kontinu yang diberikan dengan :

$$F(x,y,z) = (xa, yb, zc)$$

Pembatas dari F terhadap bola :

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 / x^2+y^2+z^2 = 1 \}.$$

adalah pemetaan kontinu $F^*: S \longrightarrow R^3$.

Amati bahwa $F^*(S) = E$, dimana

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}.$$

Jelas bahwa F adalah pemetaan satu-satu dan

$$F^{-1}(x,y,z) = (\frac{x}{a} , \frac{y}{b} , \frac{z}{c}).$$

Dengan demikian, $F^{*-1} = F^{-1}|E$ adalah kontinu.

Jadi, F^* adalah suatu homomorfisma dari bola S onto elipsoida E.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.2. DIFERENSIABELITAS (DIFFERENTIABILITY)

Misalkan $f : U \subset R \longrightarrow R$. Derivatif dari f pada x_o adalah :

$$f'(x_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad , \quad x_o+h \in U.$$

Bila f mempunyai derivatif pada seluruh titik dari suatu persekitaran V dari x_o, dapat dianggap bahwa derivatif dari $f' : V \longrightarrow R$ pada x_o disebut derivatif kedua $f''(x_o)$ dari f pada x_o, dan seterusnya. Fungsi f dikatakan dapat dideferensialkan pada U bila dapat dideferensialkan pada semua titik dalam U.

Misalkan $f : U \subset R^2 \longrightarrow R$. Derivatif parsial dari f ke x pada $(x_o,y_o) \in U$ adalah :

$$\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial x} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o+h,y_o) - f(x_o,y_o)}{h} .$$

Derivatif parsial dari f ke y pada $(x_o,y_o) \in U$ adalah :

$$\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial y} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o,y_o+h) - f(x_o,y_o)}{h} .$$

Bila f mempunyai derivatif parsial pada semua titik dari persekitaran V dari (x_o,y_o), dapat dianggap bahwa derivatif parsial kedua pada (x_o,y_o) adalah :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ,$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dan seterusnya.

Terkadang disajikan ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} .$$

Fungsi f dikatakan *dapat dideferensialkan pada* (x_o, y_o) bila f mempunyai derivatif parsial untuk semua orde pada (x_o, y_o).

Misalkan $F : U \subset R^3 \longrightarrow R$. Derivatif parsial dari F ke x pada (x_o, y_o, z_o) adalah :

$$\frac{\partial f(x_o, y_o, z_o)}{\partial x} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o+h, y_o, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{h} .$$

Derivatif parsial dari f ke y pada (x_o, y_o, z_o) adalah :

$$\frac{\partial f(x_o, y_o, z_o)}{\partial y} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o, y_o+h, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{h} .$$

Derivatif parsial dari f ke z pada (x_o, y_o, z_o) adalah :

$$\frac{\partial f(x_o, y_o, z_o)}{\partial z} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o, y_o, z_o+h) - f(x_o, y_o, z_o)}{h} .$$

Apabila $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ adalah fungsi real yang dapat dideferensialkan dalam $U \subset R^2$ dan $f(x,y,z)$ adalah fungsi real yang dapat dideferensialkan dalam $U \subset R^3$, maka komposisi fungsi $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ juga

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

merupakan fungsi yang dapat dideferensialkan pada U. Derivatif parsial dari f terhadap u disajikan dengan :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \quad .$$

Derivatif parsial dari f terhadap v disajikan dengan :

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \quad .$$

Pemetaan $F : U \subset R^n \longrightarrow R^m$, dikatakan dapat dideferensialkan pada $p \in U$ bila fungsi-fungsi komponennya dapat dideferensialkan pada p, yaitu bila F disajikan dengan :

$$F(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)),$$

fungsi-fungsi f_i, $i=1,\ldots,m$ mempunyai derivatif parsial kontinu pada semua orde di p. F dikatakan dapat dideferensialkan pada U bila dapat dideferensialkan pada semua titik dalam U.

Contoh (2.2.1).

Misalkan $F : U \subset R^2 \longrightarrow R^3$, disajikan dengan $F(u,v) = (\text{Cos } u.\text{Cos } v\ ,\ \text{Cos}u.\text{Sin } v\ ,\ \text{Cos}^2 v)$, $(u,v) \in U$.

Fungsi-fungsi komponen dari F adalah :

$$f_1(u,v) = \text{Cos } u.\text{Cos } v$$

$$f_2(u,v) = \text{Cos } u.\text{Sin } v$$

$$f_3(u,v) = \text{Cos}^2 u \quad .$$

Karena f_1, f_2 dan f_3 mempunyai derivatif parsial pada semua orde dalam U, maka F dikatakan dapat dideferensialkan dalam U.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi (2.2.1)

Vektor singgung terhadap suatu pemetaan $\alpha:U\subset R \longrightarrow R^m$ pada $t_o \in U$ adalah vektor dalam R^m yang disajikan dengan :

$$\alpha'(t_o) = (x_1'(t_o),\ldots,x_m'(t_o)).$$

Contoh (2.2.2)

Misalkan $\alpha:U\subset R \longrightarrow R^3$ yang disajikan dengan $\alpha(t)=(t^3,t^2,t)$, $t\in U$.

Jelas α adalah kurva yang dapat dideferensialkan dalam R^3.

Vektor singgung terhadap α pada t adalah :

$$\alpha'(t) = (3t^2,2t,1).$$

Misalkan diberikan suatu vektor $\omega \in R^m$ dan suatu titik $p_o \in R^m$, akan dapat ditemukan suatu kurva yang dapat dideferensialkan $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow U$ dengan $\alpha(0)=p_o$ dan $\alpha'(0)=\omega$. Pandang $\alpha(t)=p_o+t\omega$ dengan $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, fungsi komponen dari α adalah $x_i(t)=x_i^o+t\omega_i$, $i=1,\ldots,m$. Jadi α dapat dideferensialkan,

$$\alpha(0) = p_o \text{ dan}$$

$$\alpha'(0)= (x_1'(0), \quad ,x_m'(0))$$

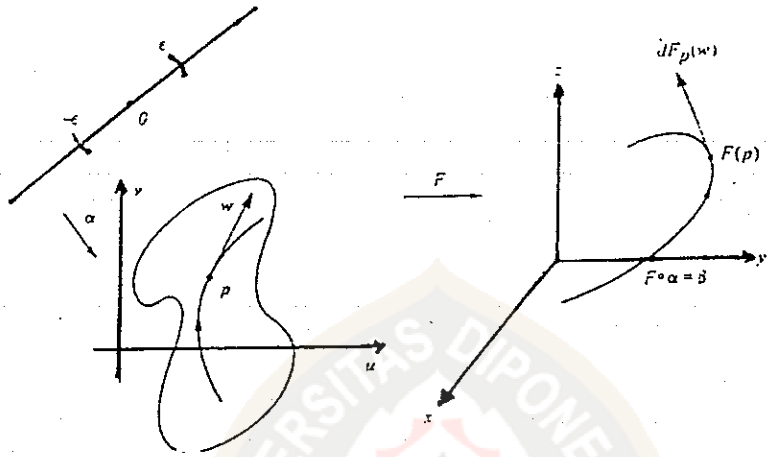
$$= (\omega_1,\ldots,\omega_m) = \omega .$$

Definisi (2.2.2)

Misalkan $F:U\subset R^n \longrightarrow R^m$ suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan. Untuk setiap $p\in U$ diasosiasikan suatu pemetaan linier $dF_p:R^n \longrightarrow R^m$ yang disebut diferensial dari F pada p dan didefiniisikan sebagai berikut. Misalkan $\omega\in R^n$ dan $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow U$ suatu kurva yang dapat dideferensialkan sedemikian sehingga $\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=\omega$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Kurva $\beta = F\circ\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow R^m$ juga dapat dideferensialkan. Maka, $dF_p(\omega) = \beta'(0)$. (gambar 2.2.1)



Gb (2.2.1).Pemetaan yang dapat dideferensialkan $F\circ\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow R^3$.

Definisi (2.2.3)

Pemetaan $X:U\subset R^2 \longrightarrow R^3$ suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan dari suatu himpunan terbuka $U\subset R^2$ into R^3. Himpunan X(U) disebut jejak (trace) dari X. X dikatakan regular jika diferensial dari X_q, $dX_q : R^2 \longrightarrow R^3$ satu-satu untuk semua $q\in U$. Titik $p\in U$ dimana dX_q tidak satu-satu disebut titik singular dari X.

Proposisi (2.2.1)

Definisi diferensial dari F pada p (dF_p) tidak tergantung pada pemilihan kurva yang melewati p dengan vektor singgung ω, dan dF_p merupakan pemetaan linier.

Bukti :

Pemetaan $F:U\subset R^2 \longrightarrow R^3$. Ambil (u,v) sebagai koordinat

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dalam R^2 dan (x,y,z) sebagai koordinat dalam R^3. Juga ambil $e_1=(1,0)$ dan $e_2=(0,1)$ sebagai basis kanonik dalam R^2 dan $f_1=(1,0,0)$, $f_2=(0,1,0)$ dan $f_3=(0,0,1)$ sebagai basis kanonik dalam R^3. Dapat ditulis :

$$\alpha(t) = (u(t),v(t)) \ , \ t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

$$\alpha'(0) = \omega = u'(0).e_1 + v'(0).e_2 \ ,$$

$$F(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \ , \text{ dan}$$

$$\begin{aligned}\beta(t) &= F\circ\alpha(t)\\ &= [x(u(t),v(t),y(u(t),v(t),z(u(t),v(t))].\end{aligned}$$

Dengan mengambil derivatif pada t=0, didapat :

$$\begin{aligned}\beta'(0) = &\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right).f_1 +\\ &\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right).f_2 +\\ &\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right).f_3\\ = &\begin{pmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial u/\partial t\\ \partial v/\partial t\end{pmatrix}\\ = &\ dF_p(\omega).\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa dF_p dapat dinyatakan dalam basis kanonik dari R^2 dan R^3 dengan suatu matrik yang hanya bergantung pada derivatif parsial dari p pada fungsi komponen x,y,z dari F. Maka, dF_p adalah pemetaan linier dan tidak tergantung pada pemilihan dari α.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Proposisi (2.2.2) (Theorema Fungsi Invers)

Misalkan $F:U\subset R^n \longrightarrow R^n$ suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan dan bahwa pada $p\in U$ diferensial $dF_p:R^n \longrightarrow R^n$ adalah isomorfisma, maka terdapatlah suatu persekitaran V dari p dalam U dan persekitaran W dari F(p) dalam R^n sedemikian sehingga $F:V \longrightarrow W$ mempunyai invers yang dapat dideferensialkan.

Bukti :

Pemetaan $F:U\subset R^n \longrightarrow R^n$ isomorfisma, maka F mempunyai invers. Ambil suatu persekitaran V dalam $U \subset R^n$ dan W dalam R^n, V akan bertambah (berkurang) sebanding dengan bertambah (berkurang) nya W. Diambil titik q dalam domain dari F^{-1}, akan dibuktikan bahwa F^{-1} kontinu.

Karena W terbuka, maka untuk suatu $\delta>0$ terdapat $\varepsilon>0$ sedemikian sehingga :

$$W_\delta(q) \subset W_\varepsilon(q) ,$$

dan karena F^{-1} isomorfisma,

maka :

$$F^{-1}[W_\delta(q)] \subset F^{-1}[W_\varepsilon(q)].$$

Karena V terbuka, maka :

$$F^{-1}[W_\varepsilon(q)] \subset V_\varepsilon[F^{-1}(q)] = V$$

Berarti :

$$F^{-1}[W_\delta(q)] \subset F^{-1}[W_\varepsilon(q)] \subset V_\varepsilon[F^{-1}(q)] = V ,$$

yang berarti $F^{-1}: W \longrightarrow V$ kontinu, dan karena F^{-1} isomorfima, maka F^{-1} dapat dideferensialkan.

Suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$F:V\subset R^n \longrightarrow W\subset R^n$, dimana V dan W himpunan terbuka, dinamakan *difeomorfisma* dri V dengan W bila F mempunyai invers yang dapat dideferensialkan. Theorema fungsi invers menerangkan bahwa, bila pada titik $p\in V$ diferensial dari F pada p (dF_p) isomorfisma, maka F adalah suatu difeomorfima dalam persekitaran dari p.

2.3. KURVA TERPARAMETER (PARAMETRIZED CURVE)

Definisi (2.3.1)

Kurva terparameter (parametrized curve) yang dapat dideferensialkan adalah suatu pemetaan yang dapat dideferensialkan $\alpha : I \longrightarrow R^3$ dari suatu interval terbuka $I=(a,b)$ pada garis real R into R^3.

Kata *dapat dideferensialkan* pada definisi diatas, berarti bahwa α merupakan suatu korespondensi yang memetakan tiap $t\in I$ into suatu titik $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))\in R^3$ dengan fungsi-fungsi x(t), y(t), z(t) dapat dideferensialkan. Variabel t dinamakan *parameter* dari kurva.

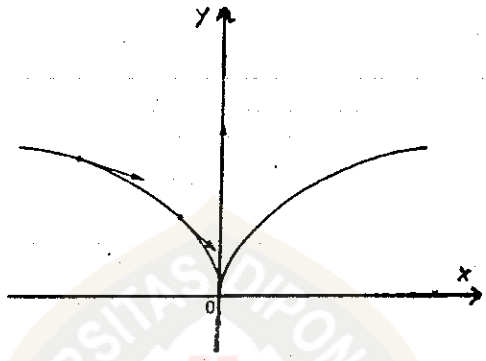
Apabila $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ adalah derivatif pertama dari fungsi x,y dan z terhadap t, vektor $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))\in R^3$ dinamakan vektor singgung dari kurva α pada t.

Contoh (2.3.1)

Pemetaan $\alpha : R \longrightarrow R^2$ yang disajikan dengan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$\alpha(t)=(t^3,t^2)$, $t\in R$, adalah kurva terparameter yang dapat dideferensialkan. Jejak (trace) dari kurva tersebut adalah (gambar 2.3.1) :

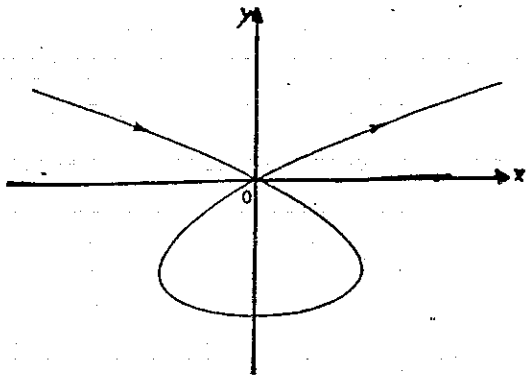


Gb (2.3.1).Untuk t=0 ,vektor kecepatannya nol.

$\alpha'(t) = (0,0)$, artinya vektor singgung adalah nol untuk t=0.

Contoh (2.3.2)

Pemetaan $\alpha : R \longrightarrow R^2$ disajikan dengan $\alpha(t)=(t^3-4t,t^2-4)$, $t\in R$, adalah kurva terparameter yang dapat dideferensialkan (gambar 2.3.2). Untuk t=2, $\alpha(2)=(0,0)$ dan untuk t=-2. $\alpha(-2)=(0,0)$. Dengan $\alpha(2)=\alpha(-2)=(0,0)$ berarti pemetaan α tidak satu-satu.



Gb (2.3.2).Di titik (0,0) ,pemetaan tidak satu-satu.

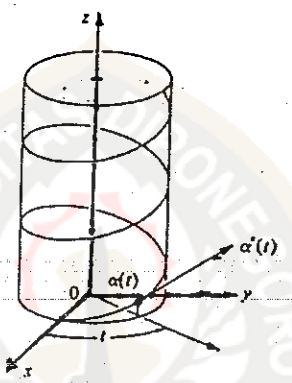
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh (2.3.3)

Kurva terparameter yang diberikan dengan :

$\alpha(t) = (a.\cos t,\ a.\ \sin t,\ b.t)$, $t \in R$,

mempunyai jejak (trace) dalam R^3 berupa heliks pada silinder $x^2 + y^2 = a^2$.



Gb (2.3.3) Silinder tegak diatas bidang X Y.

Disini, parameter t memberikan ukuran sudut antara sumbu x dengan garis yang menghubungkan pusat sumbu 0 dengan proyeksi dari titik $\alpha(t)$ diatas bidang xy.

(gambar 2.3.3)

Definisi (2.3.2)

Kurva terparameter yang dapat dideferensialkan $\alpha : I \longrightarrow R^3$ dikatakan regular jika $\alpha'(t) \neq 0$ untuk semua $t \in I$.

Diberikan $t \in I$, panjang busur dari kurva regular terparameter yang dapat dideferensialkan $\alpha : I \longrightarrow R^3$ dari titik t_o , didefinisikan dengan :

$$S(t) = \int_{t_o}^{t} |\alpha'(t)|\ dt ,$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan,

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2} \ ;$$

merupakan panjang busur dari vektor $\alpha'(t)$.

Karena $\alpha'(0)\neq 0$, panjang busur S merupakan fungsi yang dapat dideferensialkan pada t, dan $dS/dt = |\alpha'(t)|$.

Misalkan $\alpha: I \longrightarrow R^3$ suatu kurva yang dapat dideferensialkan dan diberikan interval tertutup $[a,b]\subset I$. Untuk setiap partisi :

$$a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b \ ,$$

dari [a,b], jumlah

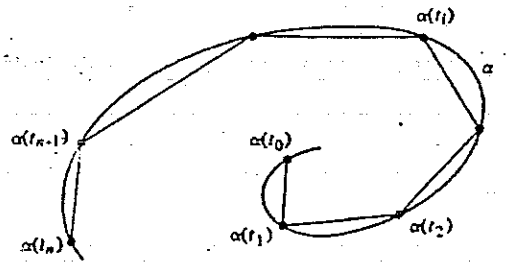
$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})| = L(\alpha,p) \ ,$$

dengan kedudukan p pada partisi yang diberikan.

Norma $|p|$ dari partisi p didefinisikan sebagai,

$$|p| = \max.(t_i-t_{i-1}) \ , \ i=1,2,\ldots,n.$$

$l(\alpha,p)$ merupakan panjang dari suatu poligon yang terdapat pada $\alpha([a,b])$ dengan puncak pada $\alpha(t_i)$ (gambar 2.3.4). Panjang busur $\alpha([a,b])$ merupakan limit dari panjang pada kedudukan poligon-poligon.



Gb. (2.3.4) Busur $\alpha([a,b])$ dengan $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$.

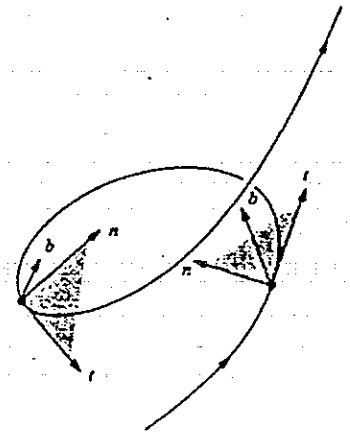
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi (2.3.3)

Misalkan $\alpha: I \longrightarrow R^3$ suatu kurva terparameter sepanjang busur $s \subset I$. Nilai $|\alpha''(s)| = k(s)$ disebut kelengkungan dari α pada s.

Apabila α merupakan garis lurus, $\alpha(s) = us + v$ dengan u dan v vektor konstan, maka $k = |\alpha''(s)| = 0$. Sebaliknya, bila $k = |\alpha''(s)| = 0$, dengan integrasi pada k didapat $\alpha(s) = us + v$, yang berarti kurva berupa garis lurus.

Pada titik dimana $k(s) \neq 0$, vektor satuan n(s) dalam arah $\alpha''(s)$ didefinisikan dengan persamaan $\alpha''(s) = k(s).n(s)$. $\alpha''(s)$ tegak lurus terhadap $\alpha'(s)$ karena dengan menurunkan $\alpha'(s).\alpha(s) = 1$, didapat $\alpha''(s).\alpha'(s) = 0$. Dengan demikian, n(s) adalah normal terhadap $\alpha'(s)$ dan dinamakan vektor normal pada s. Bidang yang dihasilkan dari vektor singgung satuan dan vektor normal ($\alpha'(s)$ dan n(s)) disebut bidang oskulasi pada s (gambar 2.3.5).



Gb (2.3.5) Vektor-vektor t,n,dan b saling tegak lurus.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Pada titik dimana $k(s)=0$, vektor normal dan bidang oskulasi tidak terdefinisi. Vektor singgung satuan dari α pada s disajikan dengan $t(s)=\alpha'(s)$, maka $t'(s)=\alpha''(s)=k(s).n(s)$.

Vektor satuan $b(s) = t(s) \times n(s)$ adalah normal terhadap bidang oskulasi dan disebut *vektor binormal* pada s. Turunan dari $b(s)$ yaitu $b'(s)$ normal terhadap $b(s)$, dan juga

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s)$$
$$= t(s) \times n'(s) ,$$

yang berarti $b'(s)$ normal terhadap $t(s)$. Itu menunjukkan bahwa $b'(s)$ paralel dengan $n(s)$, dan dituliskan ,

$$b'(s) = \tau(s).n(s)$$

untuk semua fungsi $\tau(s)$.

~~Definisi (2.3.4)~~

Misalkan $\alpha: I \longrightarrow R^3$ suatu kurva terparameter disepanjang busur s, sedemikian sehingga $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. Untuk $\tau(s)$ yang didefinisikan dengan $b'(s)=\tau(s).n(s)$ dinamakan *torsi* dari α pada s.

Bila α adalah kurva bidang ($\alpha(I)$ termuat dalam bidang), maka bidang dari kurva sama dengan bidang oskulasi, berarti $\tau(s)=0$. Jika $\tau=0$ (dan $k \neq 0$), didapat $b(s)=b_o$=konstan dan $(\alpha(s).b_o)'=\alpha'(s).b_o=0$. Itu menunjukkan bahwa $\alpha(s).b_o$=konstan, yang berarti $\alpha(s)$ termuat dalam bidang normal terhadap b_o.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4. HIMPUNAN TERHUBUNG

Definisi (2.4.1)

Suatu kurva kontinu $\alpha:[a,b] \longrightarrow A \subset R^n$ disebut busur dalam A yang menghubungkan $\alpha(a)$ dengan $\alpha(b)$.

Definisi (2.4.2)

$A \subset R^n$ merupakan busur terhubung bila diberikan dua titik $p,q \in A$, terdapat suatu busur dalam A yang menghubungkan p dengan q.

Definisi (2.4.3)

Himpunan $A \subset R^n$ disebut terhubung jika tidak memungkinkan untuk ditulis $A = U_1 \cup U_2$, dengan U_1 dan U_2 merupakan himpunan terbuka tidak kosong dalam A, dan $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Definisi (2.4.4)

Misalkan $A \subset R^n$ dan $p \in A$, union dari semua himpunan bagian terhubung dari A yang memuat p, disebut komponen terhubung dari A yang memuat p.

Proposisi (2.4.1)

Misalkan $F : A \subset R^n \longrightarrow R^m$ pemetaan kontinu dan A terhubung, maka F(A) terhubung.

Bukti :

Andaikan F(A) tidak terhubung, maka F(A) dapat ditulis dengan $F(A)=F(U_1) \cup F(U_2)$, dengan $F(U_1)$ dan $F(U_2)$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

adalah himpunan terbuka yang tidak kosong dan terpisah dalam F(A). Karena F kontinu, maka $F^{-1}(F(U_1))$ dan $F^{-1}(F(U_2))$ juga himpunan terbuka yang tidak kosong dan terpisah dalam A, berarti $A = F^{-1}(F(U_1)) \cup F^{-1}(F(U_2)) = U_1 \cup U_2$, kontradiksi dengan keterhubungan dari A. Jadi, pengandaian tidak benar, yang benar F(A) terhubung.

Definisi (2.4.5)

Suatu interval dari garis real R adalah suatu himpunan $a<x<b$, $a<x\leq b$, $a\leq x<b$, $a\leq x\leq b$, $x\in R$. Dalam hal $a=b$, $a=-\infty$, $b=+\infty$ tidak termasuk, sehingga suatu interval tidak mungkin berupa titik, setengah garis, atau R itu sendiri.

Proposisi (2.4.2)

$A\subset R$ terhubung bila dan hanya bila A interval.

Bukti :

(<==) Misalkan $A\subset R$ interval dan andaikan bahwa A tidak terhubung.

Karena A tidak terhubung, dapat ditulis $A=U_1 \cup U_2$ dengan U_1 dan U_2 himpunan terbuka tidak kosong dan terpisah dalam A. Ambil $a_1\in U_1$ dan $b_1\in U_2$ dan andaikan bahwa $a_1<b_1$. Dengan membagi interval tertutup $[a_1,b_1]=I_1$ titik tengah $(a_1+b_1)/2$, didapat dua buah interval yang salah satunya dinamakan I_2 dengan salah satu ujung di U_1 dan ujung yang lainnya di U_2. Proses dilanjutkan untuk interval I_2

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sehingga didapat $I_3 \subset I_2 \subset I_1$, untuk seterusnya daidapatkan interval tertutup $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ yang mempunyai panjang mendekati nol. Dengan $I_i=[c_i,d_i]$, maka didapatkan $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n \leq \ldots$ dan $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \leq \ldots$. Misalkan $c=\sup\{c_i\}$ dan $d=\inf\{d_i\}$, dari d_i-c_i sangat kecil maka $c=d$. Suatu persekitaran dari c memuat suatu I_i untuk i relatif besar. Jadi c merupakan titik limit dari U_1 dan U_2, maka U_1 dan U_2 tertutup dan $c \in U_1 \cap U_2$. Kontradiksi dengan ketidakterhubungan dari U_1 dan U_2 , yang benar, $A \subset R$ terhubung.

(==>) Diasumsikan bahwa A terhubung.

Bila A mempunyai elemen tunggal, A merupakan interval biasa. Misalkan A paling sedikit mempunyai dua elemen a dan b, ambil a=inf A dan b= sup A dengan $a \neq b$, jelas $A \subset [a,b]$. Akan ditunjukkan bahwa $[a,b] \subset A$, yang berarti A suatu interval.

Andaikan sebaliknya, berarti terdapat t dengan $a<t<b$ sedemikian sehingga $t \in A$. Himpunan $A \cap (-\infty,t)=V_1$ dan $A \cap (t,+\infty)=V_2$ adalah terbuka dalam $A=V_1 \cup V_2$. Karena A terhubung, maka salah satu dari himpunan, misalkan V_2 adalah kosong. Dari $b \in (t,+\infty)$ berarti bahwa $b \notin A$ dan b bukan titik limit dari A. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa b=sup A. Dengan jalan yang sama, jika $V_1=\emptyset$, didapat kontradiksi dengan kenyataan bahwa a=inf A . Yang benar, tidak terdapat $t \in A$ yang berarti A interval.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5. KOMPONEN TERHUBUNG

Proposisi (2.5.1)

Misalkan $C_\alpha \subset R^n$ suatu keluarga himpunan terhubung sedemikian sehingga, $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq 0$, maka $\bigcup_\alpha C_\alpha = C$ merupakan himpunan terhubung.

Bukti :

Andaikan bahwa $C = U_1 \cup U_2$ dengan U_1 dan U_2 himpunan terbuka yang tidak kosong dan terpisah, andaikan suatu titik $q \in \bigcap_\alpha C_\alpha$ termuat pada U_1. Ambil $q \in U_2$, karena $C = \bigcup_\alpha C_\alpha$ dan $p \in \bigcap_\alpha C_\alpha$, maka terdapatlah suatu C_α sedemikian sehingga $p,q \in C_\alpha$. Maka $C_\alpha \cap U_1$ dan $C_\alpha \cap U_2$ merupakan himpunan terbuka yang tak kosong yang terpisah dalam C_α. Kontradiksi dengan keterhubungan dari C_α, ini menunjukkan bahwa C terhubung.

Proposisi (2.5.2)

Misalkan $C \subset A \subset R^n$ suatu himpunan terhubung, maka penutup dari C yaitu $\overline{C}$ dalam A adalah terhubung.

Bukti :

Anggap bahwa $\overline{C} = U_1 \cup U_2$ dengan U_1 dan U_2 himpunan terbuka yang tidak kosong dan terpisah dalam $\overline{C}$. Karena $\overline{C} \supset C$, maka himpunan $C \cap U_1 = V_1$, $C \cap U_2 = V_2$ terbuka dan terpisah dalam C dan $V_1 \cup V_2 = C$. Akan diperlihatkan bahwa V_1 dan V_2 tidak kosong, sehingga dicapai suatu kontradiksi dengan keterhubungan dari C.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Diberikan $p \in U_1$. Karena U_1 terbuka dalam $\bar{C}$, terdapatlah suatu persekitaran W dari p dalam A sedemikian sehingga $W \cap \bar{C} \subset U_1$. Karena P merupakan limit dari C, terdapatlah $q \in W \cap C \subset W \cap \bar{C} \subset U_1$. Jadi, $q \in C \cap U_1 = V_1$ yang berarti V_1 tidak kosong. Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa V_2 tidak kosong.

2.6. HIMPUNAN KOMPAK

Definisi (2.6.1)

Suatu himpunan $A \subset R^n$ adalah terbatas bila himpunan tersebut termuat dalam suatu bola dari R^n.

Definisi (2.6.2)

Selimut terbuka dari suatu himpunan $A \subset R^n$ adalah suatu keluarga dari himpunan-himpunan terbuka $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ sedemikian sehingga $\bigcup_\alpha U_\alpha \supseteq A$. Bila hanya berhingga banyak U_α dalam keluarga yang menyelimuti A dikatakan bahwa himpunan adalah kompak. Jika keluarga bagian $\{U_\beta\}$, $\beta \in B \subset A$, masih menyeliputi A, yaitu $\bigcup_\beta U_\beta = A$ dikatakan bahwa $\{U_\beta\}$ merupakan selimut bagian dari $\{U_\alpha\}$.

Proposisi (2.6.1)

Untuk suatu himpunan kompak $K \subset R^n$, setiap selimut terbuka dari K merupakan selimut bagian berhingga dari K.

Bukti :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

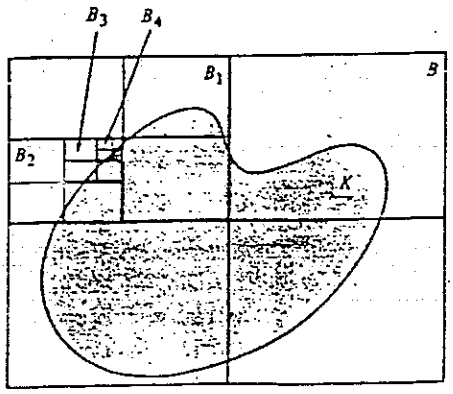
Misalkan $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ adalah selimut terbuka dari himpunan kompak K. Diasumsikan bahwa $\{U_\alpha\}$ tidak mempunyai selimut bagian yang berhingga.

Karena K kompak, berarti K termuat dalam suatu daerah tertutup :

$B = \{(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in R^n \ , \ a_j \le x_j \le b_j \ , \ j = 1, \ldots\ldots, n \}$.

Dengan membagi B dengan $x_j = (a_j + b_j)/2$ (sebagai contoh, jika $K \subset R^2$, B berupa suatu segi empat dan B akan dibagi-bagi menjadi $2^2 = 4$ segi empat). Sehingga didapat 2^n segi empat tertutup yang lebih kecil. Pada salah satu dari daerah tersebut, katakanlah B_1, berlaku $B_1 \cap K$ tidak dapat terselimuti dengan berhingga banyak himpunan terbuka dari $\{U_\alpha\}$. Dengan jalan yang sama B_1 dibagi lagi, sehingga dengan mengulang-ulang proses akan didapat suatu barisan dari daerah segi empat tertutup (gambar 2.6.1),

$B_1 \supset B_2 \supset \ldots\ldots\ldots \supset B_i \supset \ldots\ldots\ldots$.



Gb (2.6.1).Setiap selimut terbuka dari K adalah selimut bagian berhingga dari K.

Sehingga jelas tidak ada $B_i \cap K$ yang dapat menyelimuti K

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan berhingga banyak himpunan terbuka dari $\{U_\alpha\}$, dan untuk i yang cukup besar maka B_i mendekati nol.

Dapat dipastikan terdapat $p \in \cap B_i$. Dengan memproyeksikan tiap B_i pada poros j dari R^n, $j = 1,\ldots,n$, didapat suatu barisan dari interval tertutup :

$$[a_{j1},b_{j1}] \supset [a_{j2},b_{j2}] \supset \ldots\ldots \supset [a_{ji},b_{ji}] \supset \ldots\ldots .$$

Karena $[b_{j1}-a_{ji}]$ cukup kecil, dapat dilihat bahwa :

$$\begin{aligned} a_j &= \sup.\{a_{ji}\} \\ &= \inf.\{b_{ji}\} \\ &= b_j , \end{aligned}$$

karenanya,

$$a_j \in \bigcap_i [a_{ji},b_{ji}].$$

Jadi, $p = (a_1,\ldots\ldots,a_n) \in \bigcap_i B_i$, pasti ada.

Untuk suatu persekitaran dari p, $p \in \bigcap_i B_i$, memuat suatu B_i untuk suatu i cukup besar, yang berartti memuat berhingga banyak titik dari K. Jadi, p merupakan titik limit dari K, dan karena K tertutup berarti $p \in K$.

Misalkan U_o merupakan suatu elemen dari keluarga $\{U_\alpha\}$ yang memuat p. Karena U_o terbuka, terdapat suatu bola $B_\varepsilon(p) \subset U_o$. Dengan kata lain, untuk i cukup besar $B_i \subset B_\varepsilon(p) \subset U_o$. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa tidak ada $B_i \cap K$ dapat terselimuti dengan berhingga banyak U_α.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)