BAB III

PERSAMAAN DIFFERENSI PADA TEORI ANTRIAN

3.1. Masalah Teori Antrian

Teori antrian dikembangkan untuk mengatasi masalah-masalah yang timbul pada antrian yaitu dengan menggabungkan dan memperhitungkan besar dari waktu menunggu dan panjang antrian.

Sebelum sampai pada perumusan masalah, diperkenalkan terlebih dahulu beberapa notasi. Misal u,v,w,n(t) adalah variabel random yang didefinisikan.

- u = Waktu antara dua kedatangan pelanggan yang datang berurutan.
- v = Waktu pelayanan untuk satu pelanggan.
- w = Waktu tunggu dari satu pelanggan tidak termasuk waktu pelayanan.
- $n(t)$ = Banyaknya pelanggan yang berada dalam antrian pada saat t termasuk pelanggan yang sedang dilayani.

Selanjutnya dimisalkan :

- $P_n(t)$ = Probilitas panjang antrian pada saat t adalah n atau peluang ada n masukan pada saat t.
- $A(u)$ = fungsi distribusi dari u.
- $B(v)$ = fungsi distribusi dari v.
- $F(w)$ = fungsi distribusi dari w.
- λ = rata-rata banyaknya pelanggan yang datang dalam satuan waktu tertentu.

μ = rata-rata banyaknya pelanggan yang selesai dilayani dalam satuan waktu tertentu.

Dapat dinyatakan

$\frac{1}{\lambda}$ = rata-rata jarak waktu kedatangan (rata-rata waktu antar kedatangan).

$\frac{1}{\mu}$ = rata-rata waktu pelayanan.

Yaitu :

$$E(u) = \int_0^\infty u \; d\, A(u) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(v) = \int_0^\infty v \; d\, B(u) = \frac{1}{\mu}$$

Sedangkan besaran yang sering timbul adalah $\frac{\lambda}{\mu}$

Ditulis dengan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ yang disebut juga *intensitas aliran*

Untuk n(t) dan $P_n(t)$ dalam keadaan keseimbangan statistik yaitu suatu *steady state* (keadaan tetap) yang dianggap tercapai apabila tercapai apabila $t \longrightarrow \infty$.

Keadaan tesebut dapat ditulis :

$$n = \lim_{t \to \infty} n(t) \; , \; p_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t)$$

Kemungkinan keadaan ini tergantung dari harga ρ dan keadaan keseimbangan akhirnya tercapai apabila $\rho < 1$.

Contoh :

Dalam suatu antrian karcis dengan suatu fasilitas tunggal dicatat bahwa rata-rata 1 orang pelanggan datang adalah setiap 3 menit sedang rata-rata waktu pelayanan yang dibutuhkan oleh setiap pelanggan adalah 2 menit maka :

$$\lambda = \frac{1}{3} \text{ kedatangan/menit.}$$

$$= 20 \text{ kedatangan/jam.}$$

dan

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ waktu pelayanan/menit.}$$

Khususnya untuk proses kedatangan dan proses kepergian pelanggan setelah selesai dilayani dengan mengamsumsikan jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu antara kedatangan-kedatangan yang berurutan. Dengan menganggap bahwa banyaknya interval dan kemungkinan dari waktu kedatangan adalah proposional dengan panjang interval, yaitu terdapat suatu kebersamaan tentang interval waktu dengan mengharap satu kedatangan pada interval waktu kecil h, kemudian diharapkan ada 2 kedatangan pada interval 2h. Jika kondisi tersebut dipenuhi maka dikatakan bahwa kedatangan mengikuti proses Poisson.

Dianggap suatu proses kedatangan $\{N(t);\ t \geq 0\}$ dengan N(t) adalah jumlah kedatangan sampai waktu t dengan N(0)=0 dan dipenuhi asumsi-asumsi :

(i). Kemungkinan terjadi suatu kedatangan antara waktu t dan $\{t + \Delta t\}$ adalah $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$.

Jadi

Pr { kedatangan yang terjadi antara t dan $t + \Delta t$ }

$= \lambda\Delta t + O(\Delta t)$

dengan λ adalah konstanta yang indenpendent dengan N(t) dan $\Delta(t)$ adalah elemen penambah waktu, sedangkan $O(\Delta t)$ banyaknya kedatangan yang bisa diabaikan jika dibandingkan dengan Δt yaitu :

$$\lim \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

(ii). Pr {terjadi lebih dari satu kedatangan antara t dan $t + \Delta t$ } = $O(\Delta t)$.

(iii). Jumlah kedatangan pada interval waktu yang berurutan adalah independen, dalam proses ini mempunyai penambahan yang bebas.

Dengan asumsi-asumsi di atas akan dibuktikan 2 theorema.

Theorema 1.

Untuk suatu proses Poisson, jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt dan kemungkinan dari n kedatangan adalah $\frac{(\lambda t)^n \, e^{-\lambda t}}{n!}$

Bukti :

Misal $p_n(t)$ = kemungkinan dari n kedatangan pada interval waktu t dimana n = 0, 1, 2, ...

Dalam interval waktu dengan panjang $t + \Delta t$ kemungkinan terjadi n kedatangan dapat dinyatakan dengan mengembangkan persamaan differensial differensi yang mengikuti :

$$\begin{aligned}
p_n(t+\Delta t) = {} & \text{Pr \{n kedatangan pada saat } t \text{ dan } 0 \text{ dalam } \Delta t\} \\
& + \text{Pr \{n-1 kedatangan pada saat } t \text{ dan } 1 \text{ dalam } \Delta t\} \\
& + \text{Pr \{n-2 kedatangan pada saat } t \text{ dan } 2 \text{ dalam } \Delta t\} \\
& \vdots \\
& + \ldots + \text{Pr \{0 kedatangan pada saat } t \text{ dan } n \text{ dalam } \Delta t\}, \; n \geq 1 \quad \ldots\ldots(3.1.1)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan asumsi (i), (ii) dan (ii) diatas maka persamaan (3.1) menjadi

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)[1-\lambda\Delta t-O(\Delta t)] + p_{n-1}(t)[\lambda\Delta t+O(\Delta t)]+O(\Delta t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.2)$$

$O(\Delta t)$ menyatakan suku-suku Pr {n-j kedatangan pada saat t dan j kedatangan dalam Δt, $2 \le j < n$}

Pada saal n = 0 didapat

$$p_o(t+\Delta t) = p_o(t)\ [1-\lambda\Delta t-O(\Delta t)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.3)$$

(3.1.2) dan (3.1.3) ditulis kembali dengan menggabungkan semua bentuk yang memuat $O(\Delta t)$ didapat

$$p_o(t+\Delta t)-p_o(t) = -\lambda\Delta t p_o(t) + p_o(t)\ O(\Delta t) \quad \ldots\ldots(3.1.4)$$

dan

$$p_n(t+\Delta t)-p_n(t) = -\lambda\Delta t p_n(t)+\lambda\Delta t p_{n-1}(t) + [p_{n-1}(t)-p_n(t)]O(\Delta t)+O(\Delta t) \quad \ldots(3.1.5)$$

(3.1.4) dan (3.1.5) dibagi dengan Δt dan diambil limit $\Delta t \longrightarrow 0$ didapat :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[\dfrac{p_o(t+\Delta t) - p_o(t)}{\Delta t} = \dfrac{-\lambda\Delta t\ p_o(t)}{\Delta t} + \dfrac{O(\Delta t)}{\Delta t}\right] \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[\dfrac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \dfrac{-\lambda\Delta t\ p_n(t)}{\Delta t} + \dfrac{\lambda\Delta t\ p_{n-1}(t)}{\Delta t} + \dfrac{O(\Delta t)}{\Delta t}\right] \qquad n \ge 1 \end{cases}$$

atau dapat ditulis :

$$\frac{dp_o(t)}{dt} = -\lambda p_o(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.7)$$

Persamaan (3.1.6) dan (3.1.7) adalah suatu persamaan differensial linier orde satu.

Dengan mengingat bentuk PD :

$$\frac{dy(x)}{dx} + \phi(x)\ y(x) = \psi(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.8)$$

yang mempunyai penyelesaian

$$y(x) = Ce^{-\int\phi(x)dx} + e^{-\int\phi(x)dx} \int e^{\int\phi(x)dx}\ \psi(x)\ dx \quad \ldots(3.1.9)$$

Persamaan (3.1.9) digunakan untuk mencari penyelesaian (3.1.6) dan (3.1.7) untuk n = 0,1 dan 2 dengan menggunakan syarat awal $p_n(0) = 0$ untu $n > 0$ dan $p_o(0) = 1$ didapat

$$\left\{ \begin{aligned} p_o(t) &= e^{-\lambda t} \\ p_1(t) &= \lambda t\ e^{-\lambda t} \\ p_2(t) &= \frac{\lambda t^{-\lambda t}}{2}\ e^{-\lambda t} \\ p_3(t) &= \frac{(\lambda t)}{3!}\ e^{-\lambda t} \end{aligned} \right. \qquad (3.1.10)$$

Misal diambil suatu rumus umum yaitu

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n\ e^{-\lambda t}}{n!} \qquad n \geq 0 \qquad \ldots\ldots(3.1.11)$$

Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi,yaitu untuk n = k + 1 seperti pada (3.6)

$$\frac{dp_{k+1}(t)}{dt} + \lambda p_{k+1}(t) = \lambda p_k(t)$$

maka $\phi(t) = \lambda$

$$\psi(t) = \lambda\ p_n(t) \text{ dari } (3.11)\ \psi(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

dengan menggunakan (3.8) dan (3.9)

$$p_{n+1} = Ce^{-\int\lambda dt} + e^{-\int\lambda dt}\int e^{\int\lambda dt}\ \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!}\ e^{-\lambda t}dt$$

$$= Ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\ \frac{\lambda^{n+1}\ t^{n+1}}{(n+1)\ n!}$$

batasan untuk p_{n+1} (0) = 0, dan diambil C = 0 didapat

$$p_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1} \quad e^{\lambda t}}{(n+1)\ n!}$$

Dengan demikian asumsi (3.1.11) terbukti untuk n = 0,1,2, dan 3 juga untuk n = k + 1, maka bukti dengan induksi selesai.

Dari (3.1.11) adalah persamaan distribusi Poisson dengan mean λt. Jika variabel random adalah jumlah kedatangan dari sistem pada waktu t, maka variabel random mempunyai distribusi poisson dengan mean λt kedatangan atau rata-rata kedatangan λ.

Proses Poisson mempunyai beberapa sifat penting, salah satunya yaitu bahwa pada kenyataannya jumlah dari kejadian-keajadian dalam interval-interval yang sama panjangnya adalah berdistribusi identik (kenaikan yang seimbang). Dalam keadaan khusus, untuk t>s, N(t)-N(s) akan didistribusikan identik sebagai N(t+h)- N(s+h), dengan distribusi frekuensi

$$p_n(t-s) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda\ (t-s)]^n}{n!}$$

Hal ini dikarenakan Poisson mempunyai kenaikan yang independen (asumsi (iii)), maka pada umumnya tidak ada pengaruh jika N(s) dan N(s-h) diasumsikan nol. Selanjutnya jika bentuk dari Poisson memuat N(t) dan N(t+h) keduanya dengan asumsi (i), (ii) dan (iii) akan mengakibatkan theorema berikut untuk masing-masing asumsi.

<u>Theorema 2</u>.

Jika kedatangan mengikuti proses Poisson maka suatu variabel random *waktu antara kedatangan berurutan* mengikuti distribusi exponensial yaitu :

$$p(u < t < u+du) = \lambda e^{-\lambda\mu}$$

Bukti

Untuk membuktikan theorema ini sangat sederhana, misal t adalah interval waktu antara kedatangan berurutan .

Jika $f(u)\,du = p(u < t < u+du)$

dengan $f(u)du$ adalah kemungkinan tidak ada kedatangan pada interval u, dan terdapat suatu kedatangan pada interval du .

maka $f(u)\,du = p_o(u)\,\lambda\,du$

$$f(u) = \lambda p_o(u)$$

$$= \lambda e^{-\lambda u}$$

atau

Jika suatu kumpulan variabel random *waktu antara dua kedatangan berurutan* dimisalkan T.

$$\Pr\{T \geq t\} = \Pr\{\text{tidak ada kedatangan dalam waktu } t\}$$

$$= p_o(t) = e^{-\lambda t}$$

misal diambil A(t) sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T didapat .

$$A(t) = \Pr\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

maka fungsi densitas a(t) diberikan oleh :

$$a(t) = \frac{d\,A(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

dengan demikian waktu antara kedatangan berurutan mempunyai distribusi eksponensial dengan mean $\frac{1}{\lambda}$.

Jika mean waktu antara kedatangan adalah $\frac{1}{\lambda}$ maka dilihat bahwa mean rata-rata kedatangan adalah λ.

3.2. Antrian M/G/1 : rumus untuk E(n) dan E(w).

Pada model antrian ini metode dasar untuk mendapatkan rumus rata-rata panjang antrian dan rata-rata waktu tunggu dengan input random dan waktu pelayanan umum ketika sistem dalam keadaan keseimbangan statistik.

Jika di misalkan :

n_o = panjang antrian setelah c_o mendapatkan pelayananan.

n_1 = panjang antrian setelah c_1 mendapatkan pelayanan.

v = waktu pelayanan untuk c_1

r = banyaknya pelanggan yang datang saat c_1 mendapatkan pelayanan.

Maka dapat dinyatakan.

$$n_1 = r \text{ jika } n_o = 0$$

dan

$$n_1 = n_o + r - 1 \text{ jika } n_o \neq 0$$

Dari dua kasus diatas jika dibentuk suatu penggabungan dengan random variabel baru yaitu δ yang didefinisikan :

$$\delta = 1 \text{ jika } n_o = 0$$

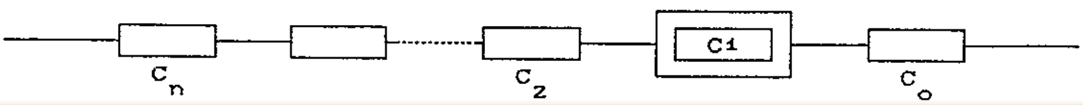
$$\delta = 0 \text{ jika } n_o \neq 0$$

Dan $\delta^2 = \delta$, $n_o\delta = 0$

Maka didapat

$$n_1 = n_o + r - 1 + \delta \qquad \text{.................(3.2.1)}$$

sebagai ilustrasi dapat di gambarkan :



(gambar 3.2.1)

Dan didapat

$$E(n_1) = E(n_0) + E(r) - 1 + E(\delta)$$

Dalam keadaan seimbang dianggap $E(n_0) = E(n_1)$ dan $E(n_0^2) = E(n_1^2)$, dan jika $E(r)$ adalah harapan jumlah kedatangan pada $E(v)$, maka :

$$E(r) = \lambda\ E(v)$$

$$= \lambda \frac{1}{\mu} = \rho$$

dan

$$E(\delta) = 1 - E(r) = 1 - \rho$$

Dari definisi δ, $E(\delta)$ adalah harapan bahwa seorang pelanggan sedang dilayani dan akhirnya meninggalkan sistem tidak ada pelanggan lain mengikuti. Karena δ hanya di definisikan pada saat pelanggan sedang dilayani maka ini tidak dapat dinyatakan bahwa $E(\delta)$ adalah harapan bahwa dalam sistem tidak ada antrian. Walaupun rumus $E(\delta) = 1-\rho$ adalah harapan tidak ada antrian, seperti kenyataan yang ada pada 3.3.

3.2.1 dikuadratkan kedua sisinya dan mengingat $n_0\delta = 0$ dan $E(n_1^2) = E(n_0^2)$

$$n_1^2 = n_0^2+r^2+1+\delta^2+2n_0r+2n_0\delta-2n_0-2r+2r\delta-2\delta$$

$$E(n_1^2) = E(n_0^2) + E(r-1)^2 + E(\delta^2) + 2E[n_0(r-1)]$$
$$+2E[\delta(r-1)]$$

$$0 = E(r-1)^2+E(\delta^2)+2E(n_0)E(r-1)+2E\ [\delta(r-1)]$$

$$2E(n_0)E(r-1) = -E(r-1)^2 - E(\delta^2) - 2E(\delta)[E(r)- 1]$$

$$E(n_0) = \frac{E(r^2) - 2\rho + 1 + (1-\rho) + 2(1-\rho)(\rho-1)}{2(1-\rho)}$$

$$= \frac{E(r^2) + 2(1-\rho)-\rho + 2(1-\rho)(\rho-1)}{2(1-\rho)}$$

$$= \frac{E(r^2)-\rho}{2(1-\rho)} + \frac{2(1-\rho) + 2(1-\rho)(\rho-1)}{2(1-\rho)}$$

$$= \frac{E(r^2)-\rho}{2(1-\rho)} + \frac{2(1-\rho)[1 + \rho-1]}{2(1-\rho)}$$

$$E(n_o) = \frac{E(r^2) - \rho}{2(1-\rho)} + \rho$$

Kemudian dihitung $E(r^2)$ dengan $E(r^2)$ adalah rata-rata kuadrat jumlah kedatangan pada waktu pelayanan v Karena input adalah random dan harapan ada r kedatangan pada waktu v menurut 3.1.11 adalah $\frac{e^{-\lambda v}(\lambda v)^r}{r!}$

Untuk suatu v tertentu, rata-rata kuadrat dari jumlah kedatangan pada waktu v dimisalkan M maka :

$$M = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2 e^{-\lambda v}(\lambda v)^r}{r!}$$

dengan menggunakan akibat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = x(1+x)e^x$

didapat $M = \lambda v(1 + \lambda v)$

dan $E(r^2) = \int_0^{\infty} \lambda v(1+\lambda v)\, dB(v)$

$$= \int_0^{\infty} \lambda v\, dB(v) + \lambda^2 \int_0^{\infty} v^2\, dB(v)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} + \lambda^2 [\int_0^{\infty} (v - \frac{1}{\mu})^2 dB(v) + \frac{1}{\mu^2}]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} + \lambda^2 [\text{ var } v + \frac{1}{\mu^2}]$$

$$E(r^2) = \rho + \rho^2 + \lambda^2 \sigma_v^2$$

Maka $E(n_o) = \rho + \frac{E(r^2) - \rho}{2(1-\rho)}$

$$= \rho + \frac{(\rho + \rho^2 + \lambda^2 \sigma_v^2) - \rho}{2(1-\rho)}$$

$$= \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_v^2}{2(1-\rho)}$$

Untuk $n = n_o$ di dapat :

$$E(n) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_v^2}{2(1-\rho)} \qquad \text{.......(3.2.2)}$$

Catatan :

E(n) *adalah rata-rata panjang pada kasus input random dan sembarang distribusi waktu pelayanan. Jika B(v) suatu distribusi exponensial dengan parameter* μ, *maka :*

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{\mu^2} \quad \textit{dan } E(n) = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

Untuk memperoleh rumus E(w), dengan w adalah waktu tunggu (sebelum dilayani) dari C_1, kemudian n_1 pelanggan datang pada saat v + w . Dengan demikian jika rata-rata kedatangan adalah λ

$$E(n) = \lambda\ E(v + w) = \frac{\lambda}{\mu} + \lambda\ E(w)$$

dan di dapat :

$$\lambda E(w) = E(n) - \rho$$

$$= \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_v^2}{2(1-\rho)}$$

di mana dapat ditulis suatu bentuk :

$$\frac{E(W)}{E(V)} = \frac{\mu(\rho^2 + \lambda^2\ \sigma_v{}^2)}{\lambda\ 2(1-\rho)}$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho)} \quad \frac{\mu\ \rho^2 + \mu\lambda^2\sigma_v{}^2}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho)} \left[\frac{\mu\ \rho^2}{\lambda} + \frac{\mu\lambda^2\sigma_v{}^2}{\lambda}\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho)} \left[\frac{\rho^2}{\rho} + \frac{\mu^3\lambda\ \sigma_v^2}{\mu^2}\right]$$

$$= \frac{\rho}{2(1-\rho)} \quad (1 + \mu^2\ \sigma_v{}^2) \qquad \text{..........(3.2.3)}$$

(3.2.3) adalah ukuran yang sesuai dengan efisiensi sistem, yang di berikan oleh perbandingan rata-rata seorang pelanggan menunggu sampai mulai di layani dengan rata-rata waktu pelayanan. Maka terdapat 2 hal penting

1. Jika di berikan waktu pelayan pada E (w) terkecil dengan $\sigma_v = 0$, untuk waktu pelayanan tetap (reguler), maka :

$$\frac{E(W)}{E(V)} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

2. Jika waktu pelayanan random, dalam hal ini

$$M/M/1 \text{ maka } \sigma_v^2 = \frac{1}{\mu^2} \text{ dan } \frac{E(w)}{E(V)} = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

Dengan demikian untuk dua antrian M/M/1 dan M/D/1, yang mempunyi rata-rata waktu pelayanan sama maka :

$$\frac{E(W) \text{ untuk } M/M/1}{E(V) \text{ untuk } M/D/1} = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.24)$$

Ini berarti bahwa pelangganan akan cepat dilayani jika suatu sistem antrian dengan waktu pelayanan berdistribusi reguler dari pada antrian dengan sistem pelayanan random. Untuk efisiensi sistem antrian akan dibicarakan terpisah pada 4.3

3.3. Penyelesaian steady-state untuk model M/M/1

Untuk menyelesaikan masalah ini maka analisa pertama dengan mencari probabilitas $\{p_n(t)\}$ untuk jalur tunggal dengan model input Poisson dan model pelayanan exponensial dengan kapasitas sistem tidak terbatas dan pelanggan dilayani dengan FIFO. Dan Analisa ini dapat di cari dengan empat langkah yaitu :

step 1 : persamaan differensi untuk $p_n(t)$

step 2 : persamaan differensial-differensi untuk $p_n(t)$

step 3 : penyelesaian untuk $p_n(t)$ – penyelesaian transient.

step 4 : penyelasaian untuk p_n – Steady state.

Sebelum mencari step 1, pertimbangan pertama yaitu mekanisme kedatangan dan pelayanan. Fungsi densitas untuk waktu antar kedatangan adalah :

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

dan Fungsi densitas untuk waktu pelayanan adalah :

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}$$

dengan $1/\lambda$ adalah rata-rata waktu antar kedatangan dan $1/\mu$ adalah rata-rata waktu pelayanan. Waktu antar kedatangan demikian juga waktu pelayanan di asumsikan independen. Dari sebab keduanya adalah exponensial akan tetapi kedatangan dan pelayanan dan mengikuti poisson, maka :

Pr{terjadi suatu kedatangan dalam interval waktu sangat kecil dengan panjang Δt} = $\lambda\Delta + O(\Delta t)$

Pr { terjadi lebih dari satu kedatangan dalam Δt } $= O(\Delta t)$

Pr { ada satu yang selesai di layani dlm $\Delta t |$ sistem tidak kosong } = $\mu\Delta t + O(\Delta t)$

Pr { lebih dari satu yang selesai dilayani dalam $\Delta t|$ lebih dari satu yang berada di dalam sistem} $= O(\Delta t)$.

Suatu proses dengan kedatangan dan kepergian yang terjadinya secara random untuk setiap waktu dengan mekanisme probabilitas hanya digambarkan saja. Kedatangan dapat dinyatakan sebagai *birth* (kelahiran) dari sistem.

Jika sistem dalam keadaan E_n (yang menyatakan keadaan sistem dengan jumlah sistem, maka E_n menyatakan terdapat n pada sistem dan jika terjadi satu kedatangan, keadaan berubah menjadi E_{n+1}. Dilain pihak, jika terjadi kepergian sistem dalam keadaan E_n berubah menjadi E_{n-1} dapat pula dinyatakan sebagai *death* (kematian). Proses ini sering dinyatakan dengan *birth and death process* dan analisa ini membentuk suatu bentuk pendekatan persamaan differensi .

a. Step 1 Persamaan Differensi untuk $p_n(t)$

Persamaan differensi untuk $p_n(t)$ dengan pertimbangan pertama yaitu bagaimana sistem mencapai keadaan E_n pada waktu t+Δt. Dalam keadaan E_n pada waktu t+Δt, sistem dalam keadaan E_n pada saat t dan selama Δt terdapat j kedatangan dan j yang selesai dilayani. Atau pada keadaan E_{n+j} pada saat t dan selama Δt terdapat j+k yang selesai di layani dan ada k kedatangan. Juga pada saat E_{n-j} pada saat t dan selama Δt terdapat j+k kedatangan dan k yang selesai di layani. Kemungkinan lebih dari satu kedatangan dalam Δt atau lebih dari satu yang selesai di layani dalam Δt dinyatakan dengan O(Δt). Dengan demikian diperlukan pertimbangan dari kasus kebanyakan, yaitu hanya ada satu kedatangan dan satu yang selesai di layani dalam Δt.

Sistem dalam keadaan E_n pada saat t dan tidak ada kedatangan ataupun juga tidak ada yang selesai dilayani pada saat Δt atau dalam keadaan E_{n-1} pada saat t dan selama Δt terdapat satu kedatangan dan tidak ada yang selesai di layani. Akhirnya sistem dalam keadaan E_{n+1} pada saat t dan selama Δt terdapat satu yang selesai dilayani dan tidak ada kedatangan. Diasumsikan untuk waktu dengan $n \geq 1$. Maka dapat di tulis sebagai :

Pr {sistem dalam E_n pada waktu $t + \Delta t$}

= Pr {sistem dalam E_n pada saat t dan tidak terjadi kedatangan selama Δt dan tidak ada yang selesai di layani selama Δt}.

+ Pr {sistem dalam E_n pada saat t dan terjadi satu kedatangan selama Δt dan satu yang selesai di layani selama Δt).

+ Pr {sistem dalam E_{n+1} pada saat t dan satu yang selesai di layani selama Δt dan tidak terjadi kedatangan selama Δt}

+ Pr { sistem dalam E_{n-1} pada saat t dan terjadi satu kedatangan selama Δt dan tidak ada yang selesai di layani selama Δt} + $O(\Delta t)$

Karena kedatangan dan pelayanan keduanya tidak tergantung satu sama lain dan keadaan saat t dapat di lihat :

$p_n(t+\Delta t)$ = $p_n(t)$ Pr { tidak ada kedatangan dalam Δt}
Pr {tidak ada yang selesai di layani dalam Δt}
+ $p_n(t)$ Pr {satu kedatangan dalam Δt} Pr {satu dilayani dalam Δt}
+ $p_{n+1}(t)$ Pr {satu selesai dilayani dalam Δt}. Pr {tidak ada kedatangan dalam Δt}.
+ $p_{n-1}(t)$ Pr {satu kedatangan dalam Δt}

Pr {tidak ada yang selesai dilayani dalam Δt}

$+ O(\Delta t) \qquad n \geq 1$

Waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi exponensial, maka dapat dinyatakan sebagai :

$$
\begin{aligned}
p_n(t+\Delta t) &= p_n(t)\ [1 - \lambda\Delta t - O(\Delta t)]\ [1 - \mu\Delta t - O(\Delta t)] \\
&\quad + p_n(t)\ [\lambda\Delta t + O(\Delta t)]\ [\mu\Delta t + O(\Delta t)] \\
&\quad + p_{n+1}(t)\ [\mu\Delta t + O(\Delta t)]\ [1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)] \\
&\quad + p_{n-1}(t)\ [\lambda\Delta t + O(\Delta t)]\ [1 - \mu\Delta t + O(\Delta t)] \\
&\quad + O(\Delta t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.1) \\
&= p_n(t)[1 - \lambda\Delta t - O(\Delta t) - \mu\Delta t + \lambda\mu(\Delta t)^2 + \\
&\qquad \mu\Delta t O(\Delta t) - O(\Delta t) + \lambda\Delta t O(\Delta t) + (O(\Delta t))^2] + \\
&\qquad p_n(t)[\lambda\mu(\Delta t)^2 + \mu\Delta t\, O(\Delta t) + \lambda\Delta t\ O(\Delta t) + \\
&\qquad (O(\Delta t))^2] \\
&\quad + p_{n+1}(t)\ [\mu\Delta t + O(\Delta t) - \lambda\mu(\Delta t)^2 - \lambda\Delta t\, O(\Delta t) + \\
&\qquad \mu\Delta t\, O(\Delta t) + (O(\Delta t))^2] \\
&\quad + p_{n-1}(t)\ [\lambda\Delta t + O(\Delta t) - \lambda\mu(\Delta t)^2 - \mu\Delta t O(\Delta t) + \\
&\qquad \lambda\Delta t O(\Delta t) + (O(\Delta t))^2] + O(\Delta t)
\end{aligned}
$$

Dengan mengkombinasikan semua $O(\Delta t)$ dan suku-suku dengan $O(\Delta t)^2$ juga $O(\Delta t)$ dapat di tulis :

$$
\begin{aligned}
p_n(t+\Delta t) &= p_n(t)\ [1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t] + p_{n+1}(t)\ [\mu\Delta t] \\
&\quad + p_{n-1}(t)\ [\lambda\Delta t] + O(\Delta t) \qquad \ldots\ldots\ldots (3.3.2)
\end{aligned}
$$

Karena p_{n-1} tidak menyatakan untuk $n = 0$ (3.3.2) tidak berlaku untuk $n = 0$ dan keadaan ini akan di pisahkan. Sistem berada dalam E_0 pada saat $t+\Delta t$ jika pada E_0 saat t dan tidak ada kedatangan selama Δt (tidak memungkinkan ada pelayanan jika sistem dalam keadaan kosong) atau pada sistem pada E_1 pada saat t dan selama Δt tidak ada kedatangan tetapi ada satu yang selesai di layani . Jika sistem berada pada keadaan yang lebih tinggi pada waktu t, pelayanan multiple (lebih dari satu) akan diperlukan selama Δt dan probabilitasnya adalah $O(\Delta t)$.

Dengan demikian dari (3.3.1).

$$\begin{aligned} p_o(t+\Delta t) &= p_o(t)\ [1-\lambda\Delta t + O(\Delta t)\ ] + p_1(t)[1-\lambda\Delta t \\ &\quad + O(\Delta t)][\mu\Delta t+O(\Delta t)] + O(\Delta t) \\ &= p_o(t)\ [1-\lambda\Delta t] + p_1(t)\ [\mu\Delta t] + O(\Delta t) \end{aligned} \qquad \text{..........(3.3.3)}$$

Maka persamaan differensi untuk model M/M/1 dinyatakan dengan :

$$\begin{cases} p_n(t+\Delta t) = p_n(t)\ \ [1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t] + p_{n+1}(t)\ [\mu\Delta t] \\ \qquad + p_{n-1}\ [\lambda\ \Delta t] + O(\Delta t) \qquad (\ n \geq 1\ ) \\ p_o(t+\Delta t) = p_o(t)\ [1-\lambda\Delta t] + p_1(t)[\mu\Delta t] + O(\Delta t) \end{cases} \qquad (3.3.4)$$

persamaan differensi tersebut untuk t yaitu waktu dan keadaan sistem n.

b. Step 2 Persamaan Differensial Differensi

Persamaan 3.3.4 dapat di tulis sebagai :

$$\begin{cases} p_n(t+\Delta t) - p_n(t) = -(\lambda+\mu)\Delta t\ p_n(t) + \mu\Delta t\ p_{n+1}(t) + \\ \qquad \lambda\ \Delta t\ p_{n-1}(t) + O(\Delta t) \qquad (n\geq 1) \\ p_o(t+\Delta t) - p_o(t) = -\lambda\Delta t\ p_o(t) + \mu\Delta t p_1(t) + O(\Delta t) \end{cases}$$

Persamaan diatas dibagi dengan Δt dan diambil limit $\Delta t \rightarrow 0$, sedangkan harga $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ maka didapat bentuk persamaan :

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t) & (n \geq 1) \\ \dfrac{dp_o(t)}{dt} = -\lambda\ p_o(t) + \mu\ p_1(t) \end{cases} \quad \ldots\ldots(3.3.5)$$

maka persamaan 3.3.5 adalah persamaan defferensial defferensi, persamaan differensial dalam t dan differensi dalam n.

c. Step 3 Penyelesaian Persamaan Differensial untuk $p_n(t)$.

Secara umum step ini tidak praktis pada kebanyakan model, penyelesaian (3.3.5) akan dipisahkan pada 4.2. BAB IV.

d. Step 4. Penyelesaian Steady State untuk p_n

Untuk mencari penyelesaian steady state untuk p_n, kemungkinan dari n pelanggan dalam sistem dan untuk setiap waktu (sembarang titik waktu) setelah keadaan steady dicapai. Diambil limit t mendekati ∞ dari (3.3.5) dan diasumsikan untuk waktu pada saat penyelesaian steady state berada. Jika $p_n(t)$ adalah waktu bebas dalam steady state maka $\dfrac{dp_n(t)}{dt} = 0$, dan (3.3.5) dapat ditulis dengan

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda + \mu)\ p_n + \mu\ p_{n+1} + \lambda p_{n-1} & (n \geq 1) \\ 0 = -\lambda p_o + \mu p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{\lambda + \mu}{\mu} p_n - \dfrac{\lambda}{\mu} p_{n-1} & (n \geq 1) \\ p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_o \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots(3.3.6)$$

Maka dapat diselesaikan suatu persamaan diferensi dalam variabel n dengan dua cara yaitu :

1. Penyelesaian dengan *fungsi pembangkit probabilitas* (generating function)

   Fungsi pembangkit probabilitas $P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$, dapat digunakan untuk mencari p_n. Untuk menemukan P(s) dari persamaan (3.3.6) dan kemudian mencari suatu ekspansi deret kuasa dengan $\{p_n\}$ adalah koefisien-koefisiennya. Pada banyak model relatif mudah untuk menemukan P(s), tapi sangat sulit untuk menemukan expansi deret yang sesuai dengan $\{p_n\}$. Bagaimanapun juga jika expansi deret tidak dapat ditemukan, P(s) masih bisa digunakan. sebagai contoh $\frac{dP(s)}{ds}$ pada $s = 1$ memberikan harga ekspektasi $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$,yaitu rata-rata jumlah pada sistem.

   Untuk model yang sesuai dapat dislesaikan $\{p_n\}$ dengan menggunakan P(s). Persamaan (3.3.6) dengan suku-suku ρ dan menjadi :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (\rho + 1)p_n - \rho p_{n-1} & (n \geq 1) \\ p_1 = \rho p_0 \end{cases} \qquad \text{.........(3.3.7)}$$

   Jika kedua sisi dikalikan dengan s^n pada baris pertama (3.3.7).

$$p_{n+1}s^n = (\rho + 1)p_n s^n - \rho p_{n-1}s^n$$

$$s^{-1}p_{n+1}s^{n+1} = (\rho + 1)p_n s^n - \rho s p_{n-1}s^{n-1}$$

kemudian kedua sisi persamaan diatas dinyatakan sebagai jumlahan dari n=1 sampai ∞ didapat bentuk :

$$s^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}s^{n+1} = (\rho + 1)\sum_{n=1}^{\infty} p_n s^{n} - \rho s\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}s^{n-1}$$

Karena bentuk :

$$\sum_{n=-1}^{\infty} p_{n+1}s^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}s^{n-1} = P(s)$$

maka didapat :

$$s^{-1}\left[\sum_{n=-1}^{\infty} p_{n+1}s^{n+1} - p_1 s - p_o\right] = (\rho+1)\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^{n} - p_o\right] - \rho s\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}s^{n-1}$$

$$s^{-1}[P(s)-p_1 s-p_o] = (\rho+1)[P(s)-p_o]-\rho sP(s) \quad ..(3.3.8)$$

dari (3.3.7) diketahui bahwa $p_1 = \rho p_o$ maka di dapat :

$$s^{-1}[P(s) - (\rho s+1)p_o] = (\rho+1)[P(s)-p_o]-\rho sP(s)$$

Penyelesaian untuk P(s) didapat :

$$P(s) - (\rho s+1)p_o = s(\rho+1)\ [P(s) - p_o] - \rho s^2 P(s)$$

$$P(s) - s(\rho+1)P(s) - \rho s^2 P(s) = (\rho s+1)p_o - s(\rho+1)p_o$$

$$P(s)\ [1-s\rho - s - \rho s^2] = p_o\ [\rho s + 1 - \rho s - s]$$

$$P(s)\ (1-s)(1-s\rho) = p_o(1 - s)$$

$$P(s) = \frac{p_o}{(1-s\rho)} \quad ....(3.3.9)$$

Untuk mencari p_o di gunakan syarat $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ sesuai dengan P(1) yaitu :

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, 1^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

dari (3.3.9) didapat :

$$P(1) = 1 = \frac{p_o}{(1-\rho)} \quad ....(3.3.10)$$

$$p_o = 1-\rho$$

Karena $\{p_n\}$ adalah probabilitas, P(s)>0 untuk s>0 dan P(1) > 0. Dari (3.3.10) dapat dilihat bahwa $P(1) = p_o/(1-\rho)>0$, oleh karena itu ρ harus < 1 dari sebab p_o adalah suatu probablitas dan pasti > 0. Dengan demikian

$$P(s) = \frac{1-\rho}{1-s\rho} \qquad (\rho < 1) \qquad (3.3.11)$$

(3.3.11) sulit diexpansikan sebagai deret kuasa karena hanya suatu penggunaan pembagian panjang pada $\frac{1}{1-s\rho}$ atau sebagai jumlahan dari suatu deret geometric, yaitu : $\frac{1}{1-s\rho} = 1 + s\rho + (s\rho)^2 + (s\rho)^3 + \ldots$

Dengan demikian fungsi pembangkit probabilitas :

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n s^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.12)$$

Koefisien dari s^n, adalah p_n yang dapat dinyatakan sebagai $p_n = (1 - \rho)\,\rho^n$

2. Penyelesaian persamaan differensi Steady-state untuk $\{p_n\}$ dengan *menggunakan operator*.

Jika diambil suatu operator linier D yang didefini-nisikan pada barisan $\{a_o, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$ sehingga :

$$D\,a_n = a_{n+1} \qquad \text{(untuk semua n)}$$

persamaan differensi linier dengan koefisien konstan

$$c_n a_n + c_{n+1} a_{n+1} + \ldots + c_{n+k} a_{n+k} = \sum_{i=n}^{n+k} c_i a_i = 0 \quad \ldots.(3.3.14)$$

dapat pula ditulis dengan

$$\left[\sum_{i=n}^{n+k} c_i\, D^{i-n}\right] a_n = 0$$

dari sebab $D^m a_n = a_{n+m}$ (untuk setiap m dan n).

Jika (3.3.14) berbentuk

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_o a_n = 0 \qquad \text{............(3.3.15)}$$

dan

$$(c_2 D^2 + c_1 D + c_o) a_n = 0 \qquad \text{............(3.3.16)}$$

Jika diambil bentuk kuadratik dalam D yang mempunyai akar-akar real r_1 dan r_2, maka memenuhi

$$(D - r_1)\ (D - r_2)\ a_n = 0$$

Misal r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan (3.3.16) maka $d_1 r_1^n$ dan $d_2 r_2^n$ adalah penyelesaian dari (3.3.15)dengan d_1 dan d_2 adalah konstanta sembarang. Ini dapat dinyatakan dengan substitusi dari $d_1 r_1^n$ dan $d_2 r_2^n$ kedalam (3.3.15) dengan $a_n = d_1 r_1^n$ atau $d_2 r_2^n$ dengan substitusi dalam (3.3.15)

$$c_2 d_1 r_1{}^{n+2} + c_1 d_1 r_1{}^{n+1} + c_o d_1 r_1{}^n = 0$$

atau

$$d_1 r_1{}^n\ [c_2 r^2 + c_1 r_1 + c_o] = 0$$

ini adalah bentuk dari (3.3.16).

Dengan jalan yang sama dapat diperlihatkan bahwa $d_2 r_2{}^n$ adalah suatu penyelesaian dan oleh karena jumlah dari $d_1 r_1{}^n + d_2 r_2{}^n$ juga merupakan penyelesaian.

Pendekatan ini secara langsung dapat diterapkan pada penyelesaian dari persamaan differensi dari Steady-state (3.3.6). Oleh karena ini adalah persamaan Differensi linier seperti bentuk (3.3.15). Jika didefinisikan sebagai operator $Dp_n = p_{n+1}$ dan jika (3.3.6) ditulis sebagai :

$$\mu p_{n+2} - (\lambda + \mu)p_{n+1} + \lambda p_n = 0 \text{ ......} (n = 0,1,2,...)$$

dan limit probabilitas dari penyelesaian adalah :

$$[\mu D^2 - (\lambda + \mu)D + \lambda]p_n = 0 \quad \text{...............(3.3.17)}$$

dengan syarat awal

$$p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_o \text{ dan } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Persamaan kuadrat dalam faktor D

$$[(D-1)(\mu D-\lambda)]p_n = 0$$

Oleh karena itu didapat :

$$p_1 = d_1(1)^n + d_2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \text{..............(3.3.18)}$$

dengan d_1 dan d_2 dapat ditemukan dengan menggunakan syarat tertentu dari (3.3.18).

$$p_1 = d_1 + d_2\rho$$

dan

$$p_2 = d_1 + d_2\rho^2$$

Juga dari (3.3.6) di dapat pula syarat tertentu yaitu

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_o = \rho p_o$$

dan

$$p_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_1 - \frac{\lambda}{\mu} p_o$$

$$= \frac{\lambda + \mu}{\mu} \rho p_o - \frac{\lambda}{\mu} p_o$$

$$= (\rho + 1)\rho p_o - \rho p_o$$

$$= \rho^2 p_o$$

Persamaan dengan menyatakan p_1 dan p_2, masing-masing memberikan dua persamaan dalam d_1, d_2 :

$$\begin{cases} d_1 + d_2\rho = p_o\rho \\ d_1 + d_2\rho^2 = p_o\rho^2 \end{cases}$$

Jika diambil $d_1 = 0$ maka $d_2 = p_o$

dengan demikian

$$p_n = \rho^n p_o$$

Kemudian p_o dapat ditemukan dengan metode pertama dengan penjumlahan p_n untuk semua. n, diperoleh

$$p_o = 1 - \rho \qquad (\rho < 1)$$

Memenuhi (3.3.10) dan (3.3.13)

Dari bentuk solusi $p_n = (1 - \rho)\rho^n$ $(n = 0,1,2,..)$ maka panjang antrian n mengikuti suatu deret geometri. Karena $p_o = 1 - \rho$ yang berarti bahwa dalam sistem tidak ada antrian (sistem kosong) adalah $1 - \rho$.

Untuk antrian M/M/1 dapat langsung dicari mean E(n) dan var(n) dari panjang antrian n, demikian juga untuk distribusi frekuensi p(w) dari waktu tunggu w.

Didapat :

$$E(n) = \sum_{n=o}^{\infty} np_n = p_o \sum_{n=o}^{\infty} n\rho^n$$

$$= \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

$$var(n) = \sum_{n=o}^{\infty} n^2 \; p_n - \{E(n)\}^2$$

$$= \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Misal $\Pi_n(w)$ dw untuk $n > 0$ adalah kemungkinan ada satu pelanggan A, datang pada suatu waktu ketika didalam sistem terdapat (n-1) pelanggan menunggu dan 1 sedang dilayani. A menunggu pada waktu antara w dan (w + dw). Sebelum dia mulai dilayani. Kemungkinan dari satu pelanggan selesai dilayani dalam waktu dw adalah μ dw dan kemungkinan (n-1) pelanggan selesai dilayani dalam waktu w adalah

$$\frac{(\mu w)^{n-1}\ e^{-\mu w}}{(n-1)!}$$

Maka $\Pi_n(w)\ dw = \dfrac{\mu(\mu w)^{n-1}\ e^{-\mu w}}{(n-1)\ !}\ dw \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

Ketika A datang didalam sistem sudah ada n pelanggan ($n = 1,2,3,\ \ldots$) yang berada di depan A. Oleh karena itu

$$p(w)\ dw = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n(w)\ p_n\ dw$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu e^{-\mu w}(\mu w)^{n-1}}{(n-1)!}\ (1-\rho)\rho^n\ dw$$

$$= \mu\rho(1-\rho)\ e^{-\mu w} dw \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho\mu w)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \mu\rho(1-\rho)\ e^{-\mu w} dw\ e^{(\rho\mu w)}$$

$$= \mu\rho(1-\rho)\ e^{-\mu w(1-\rho)} dw$$

$$p(w) = \rho v e^{-vw}$$

dengan $v = \mu(1-\rho) = \mu - \mu\dfrac{\lambda}{\mu} = \mu - \lambda$

Integral dari $p(w)$ dari 0 sampai ∞ adalah ρ. Penjelasan ini tidak menyatakan untuk $n = 0$. Dan pada kasus ini pelanggan A saat datang menemukan tidak ada antrian dan waktu tunggunya adalah nol. Kemungkinannya adalah $(1-\rho)$, dari sini $p(w)$ harus dianggap sesuai dengan

1. Suatu fungsi komponen δ yang mempunyai harga $1-\rho$ pada $w = 0$
2. Suatu komponen kontinu $\rho v e^{-vw}$ untuk $w > 0$

Maka total integral dari $p(w) = \rho + (1-\rho)$ yang merupakan suatu kesatuan.