BAB II

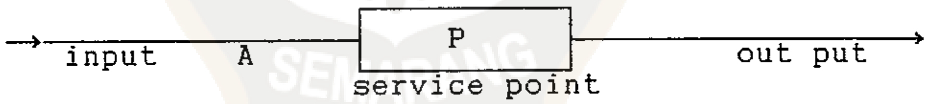
TEORI PENUNJANG

2.1. Konsep Umum dan Definisi dari Suatu Antrian.

Definisi 2.1.

Antrian adalah kumpulan pelanggan yang menunggu dan juga yang sedang dilayani, dan panjang antrian n(t) pada tiap t menyatakan jumlah pelanggan pada kumpulan ini.

Tipe paling sederhana dari antrian digambarkan dalam gambar 1. Individu, dinamakan *pelanggan*, datang pada titik A dan jika disana sudah terdapat pelanggan pada A yang menunggu sampai menerima pelayanan pada *titik pelayanan P*. Setelah pelanggan selesai dilayani mungkin ketitik pelayanan lain dan arus keluaran dinamakan *out put*. Arus dari pelanggan datang pada A dinamakan *input*.



(Gambar 1.)

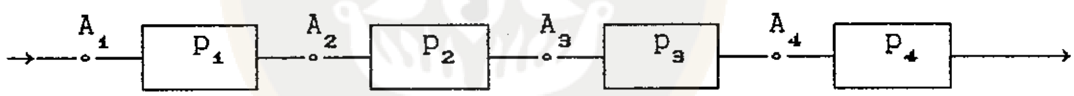
Terdapat dua distribusi statistik yang digunakan dengan spesifikasi dari suatu antrian yaitu :

1 . Distribusi input : menerangkan tipe kedatangan ; distribusi dari interval waktu diantara pelanggan diantara pelanggan yang datang berurutan di A.

2 . Distribusi waktu pelayanan, menyatakan tipe pelayanan ; distribusi dari waktu yang diperlukan untuk melayani pelanggan pada titik pelayanan.

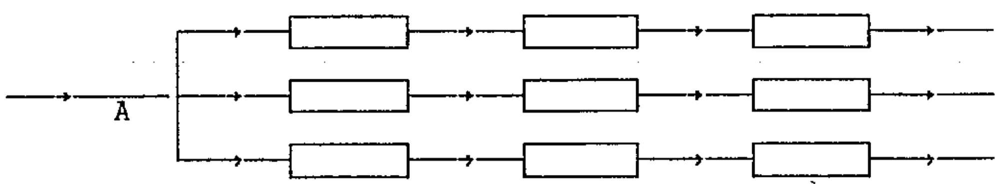
Suatu konsep penting dari teori antrian adalah *aturan antrian*. Yang banyak dipakai adalah *FCFS (= First Come First Service)* dimana pelanggan dilayani sesuai dengan kedatangannya dan pelayanan random penuh yaitu setiap pelanggan mempunyai kesamaan terpilih untuk mendapatkan pelayanan seperti misalnya pada antrian karcis. Tipe lain adalah *LCFS (= Last Come First Service)* yaitu suatu tipe pelayanan yang dalam memberikan pelayanan adalah mundur dengan pelanggan yang datang terakhir akan mendapatkan pelayanan pertama, seperti pada muatan kapal.

Dalam praktek kebanyakan antrian tidak sesederhana pada gambar 1. Macam-macam susunan mungkin dan sering terjadi seperti pada beberapa pelayanan pada gambar 2.



(Gambar 2.)

Pelanggan menunggu di A_1 yang akan dilayani pada p_1 dan dari antrian A_2 menunggu pelayanan di p_2, proses ini berulang untuk jarak antara dua tempat sampai akhirnya menjadi out put. Terdapat pula antrian yang lebih kompleks yang melibatkan beberapa jalur, seperti pada gambar 3. Jalur antrian dinamakan paralel. Mungkin juga antrian yang memuat jaringan kerja dari antrian.



(Gambar 3.)

2.2. Tipe-tipe Distribusi dan Notasi.

Distribusi input dan distribusi waktu pelayanan mungkin disebabkan oleh banyak hal dan dalam praktek ditemui banyak bentuk-bentuk itu. Walaupun demikian, pada teori antrian dikembangkan dengan menunjukkan hubungan dari tiga bentuk spesial distribusi yaitu distribusi reguler, random (eksponensial) dan Erlangian.

Definisi 2.2.

Misal x (suatu interval waktu) adalah variabel random positif, dengan fungsi distribusi $F(x)$.

i). Distribusi Reguler,

$$F(x) = 0 \qquad (x < a)$$
$$\quad\;\; = 1 \qquad (x \geq a)$$

dengan a adalah suatu konstanta. Distribusi ini dalam kasus tetap dimana interval waktu mempunyai harga konstan a.

ii). Distribusi Random (exponensial).

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

dengan λ adalah konstanta positif. Pada kasus ini interval waktu adalah random dan mempunyai rata-rata panjang : $1/\lambda$

iii). Distribusi Erlangian,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

dengan distribusi frekuensi f(x) di berikan oleh

$$f(x) = \frac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)}\; x^{k-1}\; e^{-\lambda k x}$$

$$= \frac{(\lambda k)^k}{(k-1)!}\; x^{k-1}\; e^{-\lambda k x}$$

dengan λ dan k adalah konstanta positif , $k \geq 1$

Dan $E(x) = \frac{1}{\lambda}$, $var(x) = \frac{1}{k\lambda^2}$

NOTASI :

Dalam mengelompokkan model-model antrian akan digunakan suatu notasi yang disebut dengan *Kendall's Notation*. Notasi ini sering digunakan karena merupakan alat yang efisien untuk mengidentifikasi tidak hanya model antrian, tetapi juga asumsi-asumsi yang harus dipenuhi.

Bentuk model umum :

Tingkat Kedatangan	*Tingkat Pelayanan*	*Jumlah Fasilitas Pelayanan*	*Besarnya Populasi*	*Kepanjangan Antrian*

Dalam menyajikan suatu model antrian sering digunakan huruf-huruf :

D = Tingkat kedatangan atau pelayanan diterministik (diketahui konstan).

M = Tingkat kedatangan dan pelayanan Poisson.

E_k = Distribusi Erlang waktu antar kedatangan atau pelayanan.

G = Distribusi Umum waktu antar kedatangan dan pelayanan.

s = Jumlah fasilitas pelayanan.

Misal model khusus M/M/1/1.

Tanda pertama notasi selalu menunjukkan distribusi tingkat kedatangan. Dalam hal ini, menunjukkan tingkat kedatangan mengikuti suatu distribusi probabilitas Poisson. Tanda kedua menunjukkan distribusi tingkat pelayanan, dalam hal ini, M menunjukkan bahwa tingkat pelayanan mengikuti distribusi probabilitas Poisson.

Tanda ketiga menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan (jalur) dalam sistem. Maka model diatas adalah model yang mempunyai fasilitas pelayanan tunggal. Tanda keempat untuk menunjukkan apakah populasi antrian terbatas (F) atau tidak terbatas (I) maka model diatas sumber populasinya hanya satu.

Misal diberikan model M/G/s menyatakan bahwa kedatangan mengikuti distribusi Poisson dan waktu pelayanan dengan distribusi umum serta antrian dengan s jalur. Walaupun tidak ditunjukkan dalam notasi ini, seluruh model menganggap bahwa disiplin antrian adalah FIFO.

Dalam hal ini didefinisikan pula transient dan steady state.

Transient : Sistem dikatakan transient, jika sifat-sifat yang berlaku pada sistem tersebut berubah-ubah menurut perubahan waktu.

Steady state : Sistem dikatakan steady state jika sifat-sifat dari sistem tidak berubah-ubah menurut perubahan waktu atau dikatakan sistem tidak tergantung pada waktu.

2.3. Transformasi Laplace.

Definisi 2.3.1.

Misal t adalah variabel real positif dan s suatu variabel kompleks dengan bagian real R(s).

Maka transformasi Laplace dari fungsi f(t) di definisikan F(s) yaitu :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \; ; \; R(s) > 0 \quad .....(2.3.1.1)$$

Selanjutnya ditulis $F(s) = L\{f(t)\}$ untuk menyatakan transformasi Laplace dari f(t).

Contoh :

(i). Jika f(t) = 1 ,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{s} \qquad (s > 0)$$

Jika f(t) = t ,

$$F(s) = \int_0^\infty te^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{s^2} \quad , \; s > 0$$

Jika $f(t) = t^n$ $(n \geq -1)$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt$$

$$= \frac{\Gamma\ (n + 1)}{s^{n+1}}$$

$$\text{dengan } \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx$$

(ii). Misal $f(t) = e^{at}$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(s-a)}\, dt$$

$$= \frac{1}{s - a} \qquad (\; s > a\;)$$

(iii). Misal f(t) = sin t,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin t \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right] dt$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1}$$

(iv). Jika $f(t) = e^{-t} t^n$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-t} t^n \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(s+1)} t^n \, dt$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{(s+1)^{n+1}} \quad , \; (n \geq -1)$$

2.3.2. Beberapa Sifat dari Transformasi Laplace.

1. Sifat linier

Jika c_1 dan c_2 adalah konstan sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi - fungsi dengan transformasi - transformasi Laplacenya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ maka :

$$L \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L \{f_1(t)\} + c_2 \; L_2 \; \{f \; (t)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.2.1)$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

contoh :

$$L \{2t - 5\} = \frac{2}{s^2} - \frac{5}{s}$$

2. Sifat pergantian skala

$$L \{f(at)\} = \frac{1}{a} \; F \left[\frac{s}{a} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.2.2)$$

contoh :

a). Dari sebab $L \{\sin t)\} = \frac{1}{s^2+1}$ maka

$$L \{\sin at\} = \frac{1}{a} \; \frac{1}{(s/a)^2+1}$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

b). $L\{e^{-at}(at)^n\}$

$$= L\{f(at)\}$$

$$= 1/a\ F(\frac{s}{a})$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{a((s/a)+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{a^n\ \Gamma(n+1)}{(s+a)^{n+1}}$$

3. Transformasi Laplace dari derivatif.

$$L\{f'(t)\} = s\,F(s) - f(0) \qquad \text{........(2.3.2.3)}$$

contoh :

Jika $f(t) = \sin t$ maka $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$L\{\cos t\} = L\{f'(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

4. Transformasi Laplace dari integral.

$$L\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{F(s)}{s} \qquad \text{..............(2.3.2.4)}$$

contoh :

Jika $f(t) = \cos t$ dan $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$

karena $\sin t = \int_0^t \cos t\,dt$

maka $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

2.3.3. Invers transformasi Laplace.

Definisi 2.3.3

Jika $F(s)$ adalah transformasi Laplace dari $f(t)$ atau dinyatakan dengan :

$$L\{f(t)\} = F(s).$$

maka $f(t)$ dinamakan invers transformasi Laplace dari $F(s)$.

Dari contoh-contoh di atas maka :

1. Invers transformasi Laplace dari $F(s) = \frac{1}{s}$ adalah $f(t) = 1$.
2. Invers transformasi Laplace dari $F(s) = \frac{1}{s-a}$ adalah $f(t) = e^{-at}$.
3. Invers transformasi Laplace dari $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ adalah $f(t) = \sin t$.

2.4. Fungsi Pembangkit Probabilitas.

Definisi 2.4

Jika X adalah suatu variabel random dan diasumsikan harga-harga yang non negatif 0,1,2,....dan

$$\Pr\{X = k\} = p_k \qquad , k = 0,1,2,\ldots\ldots;$$

$$\sum_k p_k = 1$$

Misal diambil a_k adalah probabilitas p_k, k = 0,1,2,... kemudian korespondensi fungsi pembangkit P(s) dari barisan probabilitas $\{p_k\}$ adalah suatu *fungsi pembangkit probabilitas* (p.g.f) dari random variabel X.

Yang dinyatakan dengan :

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{X = k\}\, s^k$$

$$= E(s^X) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.2)$$

Dengan $E(s^x)$ adalah ekspektasi dari fungsi s^x dari variabel random X.

Dengan P(1) = 1, dan devivatif pertama dan kedua dari P(s) diberikan oleh :

$$P'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\ p_k s^{k-1}, \quad -1 < s < 1 \quad \ldots\ldots\ldots(2.4.5a)$$

$$P''(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.5b)$$

Ekspektasi E(X) disajikan dengan :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\ p_k = P'(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.6)$$

dari sebab :

$$E\{X(X-1)\} = \sum_{k} k\ (k-1)\ p_k = P''(1)$$

dan

$$E(X^2) = E\ \{X(X-1)\} + E(X)$$

$$= P''(1) + P'(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.7)$$

maka :

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2 \ldots\ldots\ldots(2.4.8)$$

Persamaan 2.4.6. adalah mean dan 2.4.8 adalah varian dari X dalam fungsi pembangkit probabilitas dari X. Pada masalah yang lebih umum, momen faktorial ke-k dari X adalah

$$E\ [X(X-1)\ldots.(X-k+1)] = \frac{d^k}{ds^k}\ P(s)\Big|_{s=1} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Didefinisikan pula bahwa $P(e^t) = \sum_k p_k\ e^{tk}$ adalah fungsi pembangkit momen.

Contoh :

2.4.1. Misal X adalah variabel Poison dengan fungsi probabilitas.

$$p_k = P_r\ (x = k)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

fungsi pembangkit probabilitas dari distribusi Poisson adalah :

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \; s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \; \lambda^k}{k!} \quad s^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)}{k!}$$

$$P(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

dari sebab $P'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$

$$P'(1) = \lambda$$

didapat $E(X) = \lambda$

dan $P''(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}$

$P''(1) = \lambda^2$

Maka :

$$\text{var } (X) = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\text{var } (X) = \lambda$$

2.4.2. Distribusi Geometrik

Misal X adalah variabel random dengan distribusi geometrik $\{p_k\}$ dan,

$$p_k = \Pr \{X = k\} = q^k \; p \qquad , \; k = 0,1,2,\ldots$$

$$p + q = 1$$

Fungsi pembangkit probabilitas dari X adalah :

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{(1-qs)}$$

$$P'(s) = \frac{pq}{(1-qs)^2}$$

$$P'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

$$\text{maka } E(X) = \frac{q}{p}$$

$$P''(s) = \frac{2pq^2}{(1-s)^3}$$

$$P''(1) = \frac{2q^2}{p^2}$$

$$\text{var } (X) = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$= \frac{q^2 + q(1-q)}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

2.5. Transformasi Laplace dari suatu Distribusi probabilitas atau suatu variabel random.

Definisi 2.5.1

Misal X adalah variabel random dengan fungsi distribusi $F(x) = Pr\ \{X \le x\}$. Maka Transformasi Laplace $f^*(s)$ dari distribusi ini adalah

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\ d\ F(x)\ ,\ s \ge 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.5.1)$$

2.5.1. juga menyatakan Transformasi Laplace dari variabel random X

$$f^*(s) = E(e^{-sX}) \qquad \text{.......................(2.5.2)}$$

dan

$$f^*(0) = 1$$

Anggap bahwa X adalah variabel kontinu yang mempunyai fungsi densitas $f(x) = F'(x)$ dari 2.5.1 didapat :

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \qquad \text{................(2.5.3)}$$

Jika X adalah suatu harga integral variabel random dengan distribusi $p_k = \Pr\{X = k\}$ $k = 0,1,2,\ldots.$ dan fungsi pembangkit probabilitas $P(s) = \sum_k p_k s^k$ maka transformasi Laplace dari X dapat di definisikan dengan :

$$\begin{aligned} f^*(s) &= E(e^{-sX}) \\ &= P(e^{-s}) \qquad \text{.................(2.5.4)} \end{aligned}$$

2.5.1. Transformasi Laplace dari fungsi distribusi pada Fungsi Densitas.

Definisi 2.5.1.1

Misal X adalah variabel random kontinu non negatif yang mempunyai fungsi densitas $f(x)$ dan fungsi distribusi

$$\Pr\{X \le x\} = F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

maka Transformasi Laplace dari ditribusi fungsi $F(x)$ adalah

$$L\{F(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} F(x)\, dx \qquad \text{...............(2.5.5)}$$

dan Transformasi Laplace dari distribusi (atau variabel random X) adalah

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$= L\{f(x)\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.6)$$

dari sebab sifat transformasi Laplace dari integral

$$L\,\{F(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} \left\{ \int_0^x f(t)\, dt \right\} dx$$

$$= L \left\{ \int_0^x f(t)\, dt \right\}$$

$$= \frac{f^*(s)}{s} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.7)$$

2.5.2. Mean dan Varian dalam Transformasi laplace

Dengan memperhatikan differensial dibawah tanda integral adalah berlaku untuk Transformasi Laplace yang dinyatakan pada 2.5.1.

Mendefferensialkan 2.5.1 pada s didapat

$$\frac{d}{ds} f^*(s) = \int_0^\infty (-x\ )\, e^{-sx}\, d\,F(x)$$

$$= - \int_0^\infty x\, e^{-sx}\, d\,F(x)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} f^*(s) = (-1)^2 \int_0^\infty x^2\, e^{-sx}\, d\,F(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d^n}{ds^n} f^*(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n\, e^{-sx}\, d\,F(x) \ldots\ldots\ldots(2.5.8)$$

Dengan menggunakan relasi di atas untuk menemukan $E(X^n)$

momen ke-n dari X didapat

$$(-1)^n \left[\frac{d^n}{ds^n} f^*(s)\right]_{s=0} = \int_0^\infty e^{-sx} x^n\, d\,F(x) \text{ untuk } s = 0$$

$$= \int_0^\infty x^n\, d\,F(x) = E(X^n)$$

Maka didapat

$$E(X) = -\left[\frac{d}{ds} f^*(s)\right]_{s=o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.9)$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2}{ds^2} f^*(s)\right]_{s=o}$$

$$var(X) = \left[\frac{d^2}{ds^2} f^*(s)\right]_{s=o} - \left[\left\{-\frac{d}{ds} f^*(s)\right\}_{s=o}\right]^2 \ldots(2.5.10)$$

contoh :

2.6.1. Distribusi eksponensial negatif

Misal X mempunyai distribusi eksponensial negatif dengan parameter λ fungsi densitasnya adalah :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \lambda > 0,\ 0 \le x < \infty \ \ldots\ldots(2.5.11)$$

$$= 0 \qquad x < 0$$

Transformasi Laplace dari variabel random X adalah

$$f^*(s) = \int_o^\infty e^{-sx} \{\lambda e^{-\lambda x}\}\, dx$$

$$= \lambda \int_o^\infty e^{-x(s+\lambda)}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

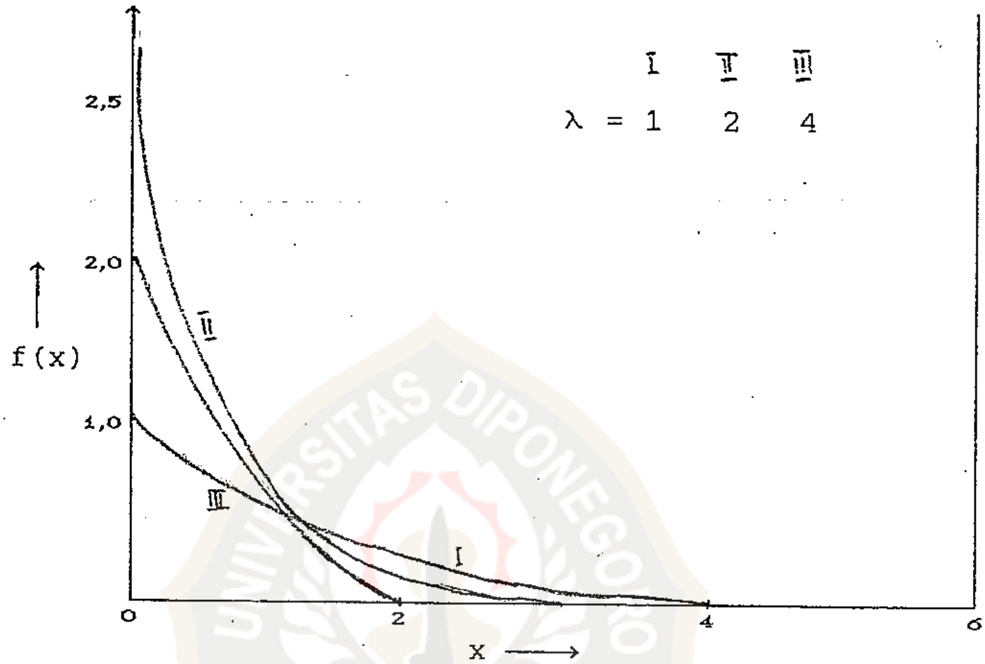
$$\frac{d}{ds} f^*(s) = -\frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} f^*(s) = \frac{2\lambda}{(s+\lambda)^3}$$

$$E(x) = -\left[\frac{d}{ds} f^*(s)\right]_{s=o} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \left[\frac{d^2}{ds^2} f^*(s)\right]_{s=o} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$var(x) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$



(Gambar 4) Fungsi densitas exponensial negatif untuk harga-harga λ

2.6.2. Distribusi Poisson

Misal X mempunyai distribusi Poisson dengan mean λ

Dari contoh 2.4.1 fungsi pembangkit probabilitas $P(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

Dengan menggunakan 2.5.4. Transformasi Laplace dinyatakan oleh :

$$f^*(s) = P\{e^{-s}\}$$
$$= e^{\lambda[e^{-s}-1]}$$

$$\frac{d}{ds} f^*(s) = e^{\lambda[e^{-s}-1]} \; d \; \lambda[e^{-s}-1]$$

$$= -\lambda \; e^{-s} + \lambda(e^{-s}-1)$$

$$\frac{d}{ds} f^*(s)\Big]_{s=o} = -\lambda$$

maka di dapat $E(x) = \lambda$

$$\frac{d^2}{ds^2} f^*(s) = \frac{d}{ds} [-\lambda\ e^{-s} + \lambda\ (e^{-s} - 1)\ ]$$

$$= -\lambda \left[e^{-s} + \lambda(e^{-s} - 1)\right] \left[-1 - \lambda e^{-s} \right]$$

$$\frac{d^2}{ds^2} f^*(s)\Big]_{s=o} = -\lambda\ (-1-\lambda)$$

$$= \lambda + \lambda^2$$

$$\text{var}\ (x) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2$$
$$= \lambda$$

2.6. Persamaan Differensi

Definisi 2.6.1

Misal f(n) adalah suatu fungsi yang didefinisikan hanya untuk harga integral non negatif. Differensi pertama dari f(n) didefinisikan dengan tambahan f(n) yang dinyatakan dengan

$$\Delta\ f(n) = f(n+1) - f(n)\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.6.1)$$

Differensi kedua dan yang lebih tinggi dinyatakan oleh

$$\Delta^{k+1}\ f(n) = \Delta\ \{\Delta^k\ f(n)\} \qquad , k = 1,2,3$$
$$= \Delta^k\ \{\Delta\ f(n)\}$$
$$= \Delta^k\ \{f(n+1) - f(n)\}$$
$$= \Delta^k\ f(n+1) - \Delta^k\ f(n)\ , \ k = 1,2,3.$$
$$\ldots\ldots(2.6.2)$$

Jika f(n+1) dinyatakan sebagai E f(n) (E = operator), maka dapat di bentuk

$$\Delta\ f(n) = E\ f(n) - f(n)$$
$$= (E - 1)\ f(n)$$

$\Delta = E - 1$ atau $E = 1 + \Delta$ didapat

$$E^k\ f(n) = f(n + k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.6.3)$$

Misal untuk persamaan

$$f(n+2) + a\,f(n+1) + b\,f(n) = 0 \quad \text{.........(2.6.4)}$$

dapat di tulis dengan

$$E^2\,f(n) + E\,a\,f(n) + b\,f(n) = 0$$

$$r(E)\,f(n) = 0$$

dengan

$$r(E) = E^2 + a\,E + b$$

Dengan mempertimbangkan bentuk solusi $f(n) = m^n$ $(m \neq 0)$ kemudian $E\,f(n) = m^{n+1}$, $E^2\,f(n) = m^{n+2}$

Maka 2.6.4 dapat disajikan dengan

$$(m^2 + am + b) = 0 \quad \text{......................(2.6.5)}$$

persamaan $r(m) = 0$ dinamakan persamaan karakteristik dari persamaan 2.6.4.

1. Jika akar-akar m_1 dan m_2 dari persamaan 2.6.5 adalah nyata maka $m_1^{\,n}$ dan $m_2^{\,n}$ adalah 2 penyelesaian dari persamaan 2.6.4 di dapat

   $$f(n) = c_1\,m_1^{\,n} + c_2\,m_2^{\,n} \quad \text{..............(2.6.6)}$$

   dengan $c_1 . c_2$ konstanta sembarang.

2. Jika $m_1 = m_2$ maka solusi umumnya adalah

   $$f(n) = (c_1 + c_2 n)\,m_1^{\,n} \quad \text{...............(2.6.7)}$$

3. Jika akar-akarnya kompleks yaitu $m_1 = \alpha + i\beta$, dan $m_2 = \alpha - i\beta$, misal di bentuk dalam sistem polar $m_1 = r\,e^{i\theta}$ dan $m_2 = re^{-i\theta}$ dengan $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dan $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$ maka solusi 2.6.6 akan berbentuk :

   $$c_1 m_1^{\,n} + c_2 m_2^{\,n} = c_1 r^n e^{\,in\theta} + c_2 r^n e^{-in\theta}$$

$$= r^n \Big[c_1(\cos n\theta + i \sin n\theta) + c_2(\cos n\,\theta - i \sin n\theta)\Big]$$

$$= r^n\Big[A \cos n\theta + B \sin n\theta \Big] \quad ..(2.6.8)$$

dengan $A = c_1 + c_2$ dan $B = i(c_1 - c_2)$

contoh : Jika diberikan persamaan

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; $n \geq 2$

Penyelesaian :

Persamaan differensi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mempunyai persamaan karakteristik $(m^2 + m - 1)$ dan nilai akar-akarnya adalah

$$m_1 = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \quad \text{dan} \quad m_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$$

dari $f(n) = c_1 m_1^{\ n} + c_2 m_2^n$ persamaan 2.6.6

dengan menggunakan nilai $f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$.

Maka $c_1 = -c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$f(n) = \left[\left\{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right\}^n - \left\{\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right\}^n\right] / \sqrt{5}$$

2.7. Persamaan Differensi pada Teori Probabilitas.

Banyak masalah dalam teori probabilitas dapat diturunkan pada persamaan differensi untuk menyelesaikan probabilitas yang tidak diketahui. Dengan demikian masalah tersebut dapat diselesaikan secara lengkap dengan menggunakan kondisi awal dari masalah itu sendiri.

Misal : Fungsi probabilitas $p_n = Pr\ \{N = n\},\ n = 0,\ 1,\ \ldots$

Jika suatu variabel random N memenuhi persamaan differensi

$$p_{n+1} - (1+a)\ p_n + ap_{n-1} = 0,\ n \geq 1 \quad \ldots\ldots\ldots(2.7.1)$$

$$-p_1 + ap_0 = 0,\ (0<a<1) \quad \ldots\ldots(2.7.2)$$

Jika p_n adalah probabilitas dari variabel random N, dan dengan syarat

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.3)$$

Untuk menyelesaikan 2.7.1 yang memenuhi 2.7.2 dan 2.7.3 dapat digunakan metode fungsi pembangkit.

Jika fungsi pembentuk probabilitas dari p_n

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.4)$$

2.7.1 dikalikan dengan s^n $(n \geq 1)$ dan penambahan dengan n, n = 1, 2, ...

didapat

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} s^n - (1+a) \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n + a \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} s^n = 0 \quad \ldots(2.7.5)$$

atau

$$(1/s)[P(s) - p_0 - p_1 s] - (1+a)[P(s) - p_0] + a\, sP(s) = 0$$

atau

$$[1/s - (1+a) + as]\ P(s) = \frac{p_0}{s} + p_1 - (1+a)\ p_0$$

dari 2.7.2 didapat

$$\frac{(1-s)(1-as)}{s}\ P(s) = \frac{p_0(1-s)}{s}$$

$$P(s) = \frac{p_0}{(1-as)} = p_0(1-as)^{-1} = p_0(1+as+a^2s^2+\ldots)$$

maka p_n = koefisien dari s^n dalam P(s)

$= p_o\ a^n$ ....(2.7.6)

Untuk menemukan p_o seperti 2.7.3 didapat

$$1 = \Sigma\, p_n = \Sigma\, p_o a^n = \frac{p_o}{(1-a)} \quad \text{atau } p_o = (1-a)$$

Maka $p_n = (1-a)\ a^n \ , \quad n \geq 0$

2.8. Persamaan differensial differensi

Definisi 2.8.

Anggap Un(t) ; n = 1, 2, ... adalah fungsi dari t yang mempunyai suatu derivatif :

$$\frac{d}{dt} U_n(t) = U_n'(t) \quad \text{......................(2.8.1)}$$

Persamaan yang menyelesaikan $U_n'(t)$ dan $U_n(t), U_{n+1}(t)$ dan seterusnya dinamakan persamaan differensial - differensi.

contoh :

Sesuai dengan persamaan

$$p_n'(t) = -\lambda[p_n(t) - p_{n-1}(t)],\ n \geq 1,\ \lambda > 0 \ \text{...(2.8.2)}$$

$$p_o'(t) = -\lambda p_o(t) \quad \text{.................(2.8.3)}$$

Dengan kondisi awal:

$$p_n(o) = 0 \text{ untuk } n \neq 0 \ ,\ p_o(0) = 1 \quad \text{.......(2.8.4)}$$

Penyelesaian :

Misal $L\{p_n(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} p_n(t)\ dt = f_n(s)$ ....(2.8.5)

adalah transformasi Laplace dari $p_n(t)$, kemudian sesuai dengan sifat derivatif transformasi Laplace :

$$L\{p_n'(t)\} = sf_n(s) - p_n(o)$$

$$= sf_n(s) \qquad n \geq 1$$

dengan mengambil Transformasi Laplace kedua sisi 2.8.2

$$sf_n(s) = -\lambda[f_n(s) - f_{n-1}(s)] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.6)$$

atau

$$f_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right) f_{n-1}(s) \quad , \quad n \geq 1$$ adalah suatu

persamaan diferensi dalam f_n. Penyelesaian di berikan oleh :

$$f_{n-1}(s) = c\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{n-1} \quad , \; n \geq 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(2.8.7)$$

dengan menggunakan Transformasi Laplace dari 2.8.3 dan kondisi awal $p_o(0) = 1$

$$sf_o(s) - 1 = -\lambda f_o(s)$$

$$f_o(s) = 1/(s + \lambda) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.8)$$

Suatu konstanta sembarang c dalam 2.8.7 dapat dicari dengan mengambil n = 1 dan dengan menggunakan 2.8.8 didapat

$$f_o(s) = c = \frac{1}{s + \lambda}$$

oleh karena itu

$$f_{n-1}(s) = \frac{\lambda^{n-1}}{(\lambda + s)^n} \quad , \quad n \geq 1$$

$$f_n(s) = \frac{\lambda^n}{(\lambda + s)^{n+1}} \quad , \quad n \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.9)$$

Sekarang $p_n(t)$ dapat dicari sebagai invers transformasi Laplace dari $f_n(s)$. Dari contoh

2.3.2.2.b. $f_n(s)$ adalah transformasi Laplace dari

$$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Maka $p_n(t) = \dfrac{e^{-\lambda t}\ (\lambda t)^n}{n\ !}$

Solusi dari persamaan ini adalah pengembangan Proses Poisson akan disajikan pada BAB III.