

## BAB III

### RUANG KONVEK LOKAL

#### 3.1 TOPOLOGI RUANG VEKTOR

##### DEFINISI 23

Himpunan  $E$  yang memenuhi struktur ruang vektor atas field  $K$  dan suatu topologi didefinisikan padanya adalah suatu ruang vektor topologi jika dipenuhi:

1. Pemetaan  $(x, y) \rightarrow x+y$  dari  $E \times E$  into  $E$  adalah kontinu
2. Pemetaan  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  dari  $K \times E$  into  $E$  adalah kontinu

Dari sini dikatakan bahwa struktur ruang vektor dan topologi pada himpunan  $E$  dapat digabungkan (compatible) jika point 1 dan 2 tersebut diatas dipenuhi.

Ruang vektor norm yang didefinisikan dengan suatu topologi dengan suatu norm adalah ruang vektor topologi.

Ditentukan persekitaran  $a$  adalah himpunan-himpunan dengan bentuk  $V + a$ , dimana  $V$  persekitaran  $0$ , maka kita dapat mengetahui suatu topologi dari ruang vektor topologi jika kita mengetahui persekitaran  $0$ .

##### DEFINISI 24

Himpunan  $A$  dalam ruang vektor  $E$  atas field  $K$  adalah absorbing (radial  $0$ ) jika untuk setiap  $x \in E$

terdapat  $\alpha > 0$  sedemikian sehingga  $x \in \lambda A$  untuk semua  $\lambda \in K$ , sedemikian sehingga  $|\lambda| \geq \alpha$ .

### DEFINISI 25

Himpunan  $A$  dalam ruang vektor  $E$  atas field  $K$  adalah balanced (circle) jika  $\lambda A \subset A$  untuk setiap  $\lambda \in K$  sedemikian sehingga  $|\lambda| \leq 1$ .

### PROPOSISI 2

Dalam ruang vektor topologi  $E$  memuat  $\mathcal{R}$  yang merupakan System fundamental dari persekitaran  $0$  sedemikian sehingga ;

- 1 Setiap  $V \in \mathcal{R}$  adalah Absorbing
- 2 Setiap  $V \in \mathcal{R}$  adalah balanced
- 3 Untuk setiap  $V \in \mathcal{R}$  memuat  $U \in \mathcal{R}$  sedemikian sehingga  $U+U \subset V$ .

### Bukti :

$E$  ruang vektor topologi dan  $\mathcal{R}$  System fundamental dari persekitaran  $0$  maka dalam topologi tersebut himpunan  $W$  merupakan persekitaran  $a \in E$  jika dan hanya jika  $W$  memuat himpunan-himpunan yang berbentuk  $V+a$ , dimana  $V \in \mathcal{R}$ . Hal ini membuktikan bahwa topologi dan pastilah merupakan topologi yang unik, jika  $W_i \supset V+a$ ; ini berarti point 1 definisi 17 dipenuhi.

Selanjutnya diberikan  $W_i (1 \leq i \leq n)$  merupakan persekitaran-persekitaran dari  $a$ . Maka masing-masing  $W_i$  memuat himpunan-himpunan  $V_i+a$  dimana  $V_i \in \mathcal{R}$ . Sejak  $\mathcal{R}$

adalah filter basis, terdapat himpunan  $V \in \mathcal{R}$  yang telah dimuat dalam  $\bigcap_{i=1}^n V_i$  maka

$\bigcap_{i=1}^n W_i \supset V+a$ ;  $\bigcap_{i=1}^n W_i$  merupakan persekitaran  $a$ , hal ini membuktikan point 2 definisi 17.

Untuk setiap  $V \in \mathcal{R}$  kita mempunyai  $0 \in V$  dengan definisi dari Filter Basis tidak ada  $V$  yang kosong dan jika  $x \in V$ , maka dengan (point 2 proposisi 2 diatas)  $0.x \in V$ , jika  $w \supset V+a$ ,  $V \in \mathcal{R}$ , maka  $a \in W$ ; dengan point 3 definisi 17 dipenuhi.

Akhirnya diberikan  $W \supset V+a$ , dimana  $V \in \mathcal{R}$ , Dengan aksioma 3 proposisi 2 terdapat  $U \in \mathcal{R}$  sedemikian sehingga  $U+U \subset V$ , maka  $U+a$  adalah persekitaran  $a$  dan jika  $\delta \in U+a$ , maka  $U+\delta \subset U+U+a \subset V+a \subset W$ ; yaitu untuk setiap  $\delta \in U+a$  suatu himpunan  $W$  adalah persekitaran  $\delta$ , demikian sehingga memenuhi point 4 definisi 17. Diambil  $a+\delta = c$  dan  $W$  persekitaran dari  $c$ , maka  $W$  memuat himpunan  $V+c$ , dimana  $V \in \mathcal{R}$  dan dengan aksioma 3 proposisi 2 terdapat  $U \in \mathcal{R}$  sedemikian sehingga  $U+U \subset V$ , maka  $U+a$  adalah persekitaran,  $U+\delta$  adalah persekitaran  $\delta$  dan didapatkan  $(U+a) + (U+\delta) \subset V+a+\delta = V+c \subset W$ ; dengan demikian terbukti point 1 definisi 23.

Kemudian diambil  $V \in \mathcal{R}$  dan  $\lambda \in K$ , terdapatlah  $U \in \mathcal{R}$  sedemikian sehingga  $\lambda U \subset V$ . Dari (point 3 proposisi 2) dan diberikan  $V \in \mathcal{R}$  untuk suatu  $n \in \mathbb{N}$  terdapatlah  $U \in \mathcal{R}$  sedemikian sehingga  $2^n U \subset V$ . Diberikan  $n$  sangat besar sehingga  $|\lambda| \leq 2^n$ . Jika  $U \in \mathcal{R}$  sedemikian sehingga  $2^n U \subset V$ , maka dengan (point 2 proposisi

2) didapatkan  $\lambda 2^{-n}U \subset U$  yaitu  $\lambda U \subset 2^n U \subset V$ . Diberikan  $a \in E$ ,  $\lambda \in k$  dan  $W$  merupakan persekitaran  $\lambda a$ , terdapatlah  $U \in \mathfrak{R}$  sedemikian sehingga  $U+U+U \subset V$ , karena dari (point 1 proposisi 2) terdapatlah  $\varepsilon > 0$ , sehingga  $|\eta| < \varepsilon$  berarti  $\eta a \in U$ , terdapatlah  $T \in \mathfrak{R}$  sedemikian  $\lambda T \subset U$ , lagipula jika  $|\eta| \leq 1$  dan  $x-a \in U$  maka dengan (point 2 proposisi 2)  $\eta(x-a) \in U$ . Diambil  $S \in \mathfrak{R}$  sedemikian sehingga  $S \subset T \cap U$ .

Dari identitas;

$$\xi x - \lambda a = (\xi - a)a + \lambda(x - a) + (\xi - \lambda)(x - a)$$

bahwa jika

$|\xi - \lambda| \leq \min(1, \varepsilon)$  dan  $V \in S+a$  maka

$$\xi x - \lambda a \in U+U+U \subset V$$

yakni  $\xi x \in W$  point 2 definisi 17 terbukti. ■

**Akibat dari Proposisi 2**

Diberikan  $E$ , ruang vektor atas field  $K$  dan  $\mathfrak{R}$  filter basis pada  $E$  yang memenuhi point 1 sampai point 3 dari proposisi 2, maka terdapatlah topologi yang unik pada  $E$ , dimana  $E$  merupakan Ruang vektor topologi dan  $\mathfrak{R}$  System fundamental dari persekitaran  $0$ .

### PROPOSISI 3

$E$  ruang vektor atas field  $K$  dan  $\mathfrak{G}$  merupakan koleksi himpunan-himpunan bagian Balanced, absorbing pada  $E$  sedemikian sehingga  $U+U \subset V$ , maka terdapatlah unik topologi pada  $E$  dimana  $E$  merupakan ruang vektor topologi dan interseksi berhingga dari elemen-elemen

$\mathcal{G}$  membentuk System fundamental dari persekitaran-persekitaran 0.

**Bukti :**

Himpunan Absorbing jelas tidak kosong; dari sini  $V \in \mathcal{G}$  memuat 0 karena  $V$  balanced, sehingga interseksi dari elemen-elemen  $\mathcal{G}$  membentuk filter basis pada  $E$ , Jadi  $\mathcal{R}$  memenuhi kondisi-kondisi (point 1 proposisi 2) sampai (point 3 proposisi 2). ■

**CONTOH 5**

Dalam Ruang vektor norm, suatu bola  $B_\rho = \{x \mid \|x\| \leq \rho\}$  membentuk filter basis yang memenuhi kondisi-kondisi (point 1 proposisi 2) sampai (point 3 proposisi 2). Sebelum diberikan contoh selanjutnya terlebih dahulu didefinisikan  $R^n$

**DEFINISI 26**

$R^n$  merupakan ruang Euclid berdimensi  $n$  real yakni himpunan semua  $n$ -tuple  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  bilangan real, dimana penjumlahan dan perkalian dengan skalar  $\lambda \in R$  didefinisikan sebagai berikut:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

dengan vektor nol  $(0, \dots, 0)$ .

**CONTOH 6**

Ambil  $\Omega$  open subset dari  $R^n$  dan ambil  $\mathcal{G}(\Omega)$  ruang vektor dari semua fungsi kontinu  $f$  yang didefinisikan

pada  $\Omega$ .

Untuk setiap kompak subset  $K$  dari  $\Omega$  dan bilangan positif tak nol  $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ , kemudian ditentukan himpunan  $V_{K, \varepsilon}$  merupakan himpunan semua  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ , sedemikian sehingga  $|f(x)| \leq \varepsilon$  untuk  $x \in K$ , sejak interseksi dari himpunan kompak adalah kompak, himpunan  $V_{K, \varepsilon}$  membentuk filter basis pada  $\mathcal{C}(\Omega)$  yang mana memenuhi kondisi (point 1 proposisi 2) sampai (point 3 proposisi 2). Maka  $V_{K, \varepsilon}$  membentuk System fundamental dari persekitaran 0.

Kemudian dibawah ini diberikan contoh ruang vektor topologi yang sekaligus didefinisikan suatu fungsi yang dapat dideferensialkan tak berhingga (Fungsi infinite Differentiable )

#### CONTOH 7

Ambil  $K$  kompak subset dari  $R$ , kemudian dinotasikan  $\mathcal{D}(K)$ , ruang vektor dari semua fungsi yang didefinisikan pada suatu open set memuat  $K$ , dimana akan hilang (nol) untuk diluar  $K$  dan derivatif partiel dari semua order ada dan kontinu.

Kemudian ditentukan definisi fungsi  $\mathcal{D}(K)$  bahwa untuk seluruh ruang  $R^n$  hanya dengan penunjukkan harga nol untuk masing-masing titik diluar daerah asal dari definisi. Dari sini kemudian dikatakan bahwa elemen-elemen dari  $\mathcal{D}(K)$  adalah sebagai fungsi infinite differentiable yang didefinisikan pada  $R^n$ .

Ditentukan  $f$  fungsi kontinu yang didefinisikan dalam suatu  $\Omega$  open subset dari  $\mathbb{R}^n$ .

Support (atau carrier) dari  $f$  adalah penutup (closure) dari himpunan yang mana  $f \neq 0$  yaitu jika  $A = \{x | f(x) \neq 0\}$  maka support  $f = \bar{A}$ . Dengan terminologi ini kita dapat mengatakan bahwa  $\mathcal{D}(K)$  adalah ruang vektor dari semua fungsi yang didefinisikan pada  $\mathbb{R}^n$  dimana derivatif partial dari semua order ada dan kontinu yang mana support dimuat  $K$ .

Kemudian didefinisikan terlebih dahulu notasi penting dari derivatif.

Dinotasikan  $\mathbb{N}^n$  ( $\mathbb{N}$ =bilangan asli), himpunan semua  $n$  tuple  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  dimana masing-masing  $p_j \in \mathbb{N}$ , dengan kata lain element  $\mathbb{N}^n$  adalah vektor dengan komponen-komponen bilangan asli, dikatakan juga sebagai element multi indeks.

Order  $|p|$  dari multi indeks  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$  diartikan sebagai  $|p| = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$ .

Didalam tulisan ini kemudian dituliskan symbol  $\partial_j$  untuk menyingkat simbol derivatif  $\partial/\partial x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) dan untuk suatu  $p \in \mathbb{N}^n$ ,

Himpunan

$$\partial^p = \partial_1^{p_1} \dots \partial_n^{p_n} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}$$

dimana order  $|p|$  dari  $p$  dikatakan juga order dari derivatif, kemudian, untuk suatu  $p \in \mathbb{N}^n$  dan  $\epsilon > 0$ , diten-

tukan  $V_{p,\varepsilon}$  himpunan semua  $f \in \mathcal{D}(K)$  sedemikian sehingga  $|\partial^p f(x)| \geq \varepsilon$  untuk semua  $x \in K$ , jelaslah bahwa himpunan-himpunan  $V_{p,\varepsilon}$  memenuhi kondisi (point 1 proposisi 2) sampai (point 3 proposisi 2). dan dengan proposisi 3. Irisan berhingga membentuk system fundamental dari persekitaran 0 dimana  $\mathcal{D}(K)$  adalah ruang vektor topologi.

### TEOREMA 3

Dalam ruang vektor topologi setiap persekitaran dari 0 memuat persekitaran tertutup dari 0

### BUKTI :

Diberikan  $V$  merupakan persekitaran dari 0. Terdapatlah persekitaran Balanced  $U$  dari 0 sedemikian sehingga  $U + U \subset V$ . Kemudian ditunjukkan bahwa  $\bar{U} \subset V$ . Jika  $x \in \bar{U}$ , maka  $(x + u) \cap u \neq \emptyset$  yaitu terdapat  $y \in U$  sedemikian sehingga  $x + y \in U$ .

Namun  $x \in -y + U \subset U + U \subset V$ . ■

### 3.2 RUANG KONVEK LOKAL

Melihat kembali dari definisi bahwa Himpunan  $A$  dalam ruang vektor  $E$  disebut konvek jika untuk  $x \in A$ ,  $y \in A$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  memenuhi  $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ .

Jika  $A$  merupakan konvek dalam  $E$ , maka  $A+a$  adalah konvek untuk setiap  $a \in E$  dan  $\lambda A$  adalah konvek untuk setiap  $a \in E$  dan  $\lambda A$  adalah konvek untuk setiap  $\lambda \in K$ .

**DEFINISI 27**

Himpunan  $A$  balanced dan konvek jika dan hanya jika untuk setiap  $x, y \in A$  sedemikian sehingga  $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ .

**DEFINISI 28**

Diberikan dua ruang vektor  $E$  dan  $F$  dan  $f$  merupakan pemetaan linier  $E$  into  $F$ .

Jika  $A$  konvek dalam  $E$ , maka  $f(A)$  adalah konvek dalam  $F$ , jika  $B$  konvek dalam  $F$  maka  $f^{-1}(B)$  adalah konvek dalam  $E$ .

Interseksi dari sembarang keluarga himpunan konvek merupakan konvek. Diberikan himpunan sembarang  $B$  dalam  $E$ , maka terdapat himpunan konvek paling kecil  $A$  yang memuat  $B$  yaitu irisan dari himpunan-himpunan konvek yang memuat  $B$ . Himpunan  $A$  disebut konvek hull dari  $B$ .

**PROPOSISI 4**

Dalam ruang vektor topologi, penutup (closure) dari himpunan konvek adalah konvek.

**Bukti :**

Diberikan  $A$  himpunan konvek,  $x \in \bar{A}$ ,  $y \in \bar{A}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . Ambil  $W$  persekitaran dari  $\alpha x + \beta y$ , karena pemetaan  $(u, v) \rightarrow \alpha u + \beta v$  adalah kontinu dari  $E \times E$  into  $E$  terdapat persekitaran  $U$  dari  $x$  dan persekitaran  $V$  dari  $y$  sedemikian sehingga  $\alpha u + \beta v \subset W$ .

Dengan  $U \cap A \neq \emptyset$  dan  $V \cap A \neq \emptyset$  diambil  $z \in U \cap A$ ,  
 $w \in V \cap A$ , maka  $\alpha z + \beta w \in W \cap A$ .

Terbukti bahwa  $\alpha x + \beta y \in \bar{A}$ . ■

### DEFINISI 29

Ruang vektor topologi adalah konvek lokal jika masing-masing titik mempunyai system fundamental dari persekitaran-persekitaran konvek.

Dengan kata lain ruang vektor topologi merupakan konvek lokal jika  $0$  merupakan system fundamental dari persekitaran-persekitaran konvek. Jika  $\mathcal{G}$  merupakan system fundamental dari himpunan-himpunan bagian dari ruang vektor  $E$  yang memenuhi proposisi 3 dan selanjutnya  $V \in \mathcal{G}$  adalah konvek, maka topologi pada  $\mathcal{G}$  di  $E$  adalah konvek lokal.

### CONTOH 8

Suatu ruang yang dipikirkan dalam contoh 5,6,7 merupakan konvek lokal (dengan dibuktikan bahwa himpunan-himpunan  $V_{\kappa, \varepsilon}$  di  $\mathcal{C}(\Omega)$  dan himpunan-himpunan  $V_{p, \varepsilon}$  di  $\mathcal{D}(K)$  adalah konvek.

### PROPOSISI 5

Dalam ruang konvek lokal, persekitaran konvek dari  $0$  yang balanced dan tertutup membentuk system fundamental dari persekitaran-persekitaran  $0$ .

**Bukti :**

Diberikan  $W$  merupakan persekitaran dari  $0$  dan memuat persekitaran tertutup dari  $0$ . Dengan  $V$  berisi persekitaran konvek  $U$  dari  $0$  dan  $\bar{U}$  merupakan persekitaran dari  $0$  yang tertutup, balanced dan konvek yang ter-muat dalam  $W$ . ■

**PROPOSISI 6**

Ditentukan  $E$  ruang vektor dan  $\mathfrak{B}$  filter basis pada  $E$  yang dibentuk dengan himpunan-himpunan balanced, absorbing dan konvek.

Ambil  $\mathfrak{K}$  sebagai koleksi dari semua  $\lambda V$  dimana  $\lambda > 0$  dan  $V \in \mathfrak{B}$ , maka terdapat unik topologi pada  $E$  dimana  $E$  adalah ruang vektor topologi yang konvek lokal dan  $\mathfrak{K}$  adalah system fundamental dari persekitaran-persekitaran  $0$ .

**Bukti :**

Dari proposisi 2, jelas bahwa  $\mathfrak{K}$  adalah filter basis pada  $E$  yang memenuhi point 1 dan point.2, kemudian lebih lanjut  $U \in \mathfrak{K}$  adalah konvek, tetapi  $\mathfrak{K}$  juga memenuhi point 3 proposisi 2 karena jika  $V \in \mathfrak{K}$ , maka  $1/2V \in \mathfrak{K}$  dan  $1/2V + 1/2V \subset V$ , sehingga  $E$  adalah ruang vektor topologi dan  $\mathfrak{K}$  adalah System fundamental dari persekitaran-persekitaran  $0$ . ■

**CONTOH 9**

Dalam ruang yang didefinisikan di contoh 6, himpunan  $V_K = V_{K,1}$  memenuhi kondisi dari proposisi 6,

karena  $V_{K,\varepsilon} = \varepsilon V_K$ , kita dapatkan bahwa  $V_{K,\varepsilon}$  membentuk system fundamental dari persekitaran 0 untuk suatu topologi konvek lokal pada  $\mathfrak{C}(\Omega)$ .

### DEFINISI 30

Ambil  $E$  ruang vektor dan  $\mathfrak{G}$  koleksi subset-subset dari  $E$  yang balanced, konvek dan absorbing.

Ambil  $\mathfrak{K}$  sebagai koleksi dari semua himpunan interseksi berhingga dengan bentuk  $\lambda V$ , dimana  $V \in \mathfrak{G}$  dan  $\lambda > 0$ , maka terdapat unik topologi pada  $E$  untuk mana  $E$  adalah ruang konvek lokal dan  $\mathfrak{K}$  adalah system fundamental dari persekitaran-persekitaran 0.

Sehingga apabila diambil  $\mathfrak{B}$  koleksi semua interseksi berhingga dari element-element dari  $\mathfrak{G}$  dan ambil  $\mathfrak{K}$  koleksi semua himpunan-himpunan  $\lambda V$ , dimana  $\lambda > 0$  dan  $V \in \mathfrak{B}$ , maka  $\mathfrak{K}$  adalah system fundamental dari persekitaran 0, ekuivalent untuk  $\mathfrak{K}$ .

### CONTOH 10

Dalam ruang  $\mathfrak{D}(K)$  di contoh 7 himpunan-himpunan  $V_p = V_{p,1}$  adalah absorbing, balanced dan konvek, karena  $V_{p,\varepsilon} = \varepsilon V_p$ , maka interseksi berhingga dari  $V_{p,\varepsilon}$  membentuk system fundamental dari persekitaran 0 untuk topologi konvek lokal pada  $\mathfrak{D}(K)$ .

### DEFINISI 31

Diberikan ruang vektor  $E$ , semi-norm pada  $E$  adalah

pemetaan  $q: x \rightarrow q(x)$  dari  $E$  into  $R_+$  yang mengikuti aksioma-aksioma berikut:

1.  $q(\lambda x) = |\lambda|q(x)$  untuk semua  $\lambda \in K$  dan  $x \in E$
2.  $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ .

Untuk point 1  $q(0) = 0$ , dan jika sebaliknya  $q(x) = 0$  yang berarti  $x = 0$  maka  $q$  adalah suatu norm.

Andaikan  $E$  ruang vektor dan  $q$  semi-norm pada  $E$ .

Himpunan  $V = \{x | q(x) \leq 1\}$  adalah absorbing, balanced, konvek. Karena jika  $q(x) = \alpha \neq 0$ , maka  $q(\alpha^{-1}x) = 1$ . Lebih lanjut,  $q(\lambda x) \leq q(x)$  untuk  $|\lambda| \leq 1$ , akhirnya jika  $q(x) \leq 1$ ,  $q(y) \leq 1$  dan  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , maka

$$q(\alpha x + \beta y) \leq \alpha q(x) + \beta q(y) \leq \alpha + \beta = 1.$$

Sekarang, ditentukan  $(q_i)_{i \in I}$  sebagai keluarga semi-norm yang didefinisikan pada  $E$ , dan untuk masing-masing  $i \in I$ , diambil  $V_i$  sebagai himpunan semua  $x \in E$  sedemikian sehingga  $q_i(x) \leq 1$ .

Dengan mengacu pada definisi 30 bahwa interseksi berhingga himpunan-himpunan  $\varepsilon V_i (\varepsilon > 0)$  membentuk system fundamental dari persekitaran 0 untuk topologi konvek lokal  $\tau$  pada  $E$ . Himpunan  $\varepsilon V_i = V_{i, \varepsilon}$  dibentuk dari semua  $x \in E$  sedemikian sehingga  $q_i(x) \leq \varepsilon$  dan demikian system fundamental dari persekitaran 0 untuk  $\tau$  diberikan dengan bentuk himpunan-himpunan

$$V_{i_1, i_2, \dots, i_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n} = \{x | q_{i_k}(x) \leq \varepsilon_k\}$$

untuk  $1 \leq k \leq n$

dimana  $i_1, i_2, \dots, i_n$  adalah subset berhingga dari index set  $I$  dan  $\varepsilon_k > 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Dengan menyesuaikan Definisi 30, suatu ekuivalent system fundamental dari persekitaran 0 untuk  $\tau$  dibentuk dengan himpunan-himpunan

$$V_{i_1, i_2, \dots, i_n, \varepsilon} = \{x \mid q_{i_k} \leq \varepsilon_k \text{ untuk } 1 \leq k \leq n\} \dots \dots (1)$$

Berikut diberikan Contoh-contoh topologi ruang konvek lokal dimana sekaligus merupakan dasar-dasar dari Teori Distribusi.

#### CONTOH 11

Melihat kembali contoh 9, kemudian dapat didefinisikan suatu keluarga seminorm-seminorm, Untuk setiap kompak subset  $K$  dari  $\Omega$  diambil

$$q_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)| \dots \dots \dots (2)$$

Suatu topologi pada ruang  $\mathcal{C}(\Omega)$  didefinisikan dengan seminorm-seminorm tersebut.

#### CONTOH 12

Ambil  $K$  kompak subset dari  $\mathbb{R}^n$  dan bilangan bulat positif. Dinotasikan  $\mathcal{D}^m(K)$  sebagai ruang vektor dari semua fungsi kontinu  $f$  yang didefinisikan pada  $\mathbb{R}^n$  yang mana derivatif partial  $\partial^p f$  ada dan kontinu untuk  $|p| \leq m$  dan support dimuat dalam  $K$ .

Untuk masing-masing  $p \in \mathbb{N}^n$  sedemikian sehingga  $|p| \leq m$ .

Kemudian kita definisikan suatu seminorm  $q_p$  dengan

bentuk berikut :

$$q_p f = \max |\partial^p f(x)| \dots \dots \dots (3)$$

Sehingga apabila dilengkapi dengan keluarga  $(q_p)_{|p| \leq m}$  dari seminorm-seminorm, maka  $\mathcal{D}^m(K)$  menjadi ruang topologi konvek lokal.

### CONTOH 13

Dalam ruang  $\mathcal{D}(K)$  dari contoh 9, suatu topologi didefinisikan sebagai keluarga seminorm  $(q_p)$ , dimana  $q_p$  diberikan sesuai point (3) untuk setiap  $p \in \mathbb{N}^n$ . Karena bila ditinjau himpunan himpunan  $V_p$  yang didefinisikan dalam bentuk  $V_p = \{f \mid q_p(f) \leq 1\}$ .

#### 3.2.1 QUOTIENT TOPOLOGI

Diberikan Ruang topologi  $X$ ,  $R$  merupakan relasi ekuivalensi pada  $X$ , dan pemetaan kano-nik surjektif  $\varphi$  dari  $X$  onto himpunan quotient  $X/R$  yang mana menunjuk untuk masing-masing  $x \in X$  class ekuivalen  $\varphi(x)$  modulo  $R$ .

#### DEFINISI 32

Quotient topologi di  $X/R$  didefinisikan sebagai finest topologi untuk mana  $\varphi$  kontinu.

Dari definisi diatas dapatlah dikatakan bahwa, himpunan  $A$  di  $X/R$  open jika dan hanya jika  $\varphi^{-1}(A)$  open di  $X$ .

Ambil  $\bar{f}$  pemetaan dari  $X/R$  into ruang topologi  $Y$  dan didefinisikan pemetaan  $f: X \rightarrow Y$  dengan  $f = \bar{f} \circ \varphi$ . Maka  $\bar{f}$  kontinu jika dan hanya jika  $f$  kontinu. Karena  $\varphi$  kontinu, kita ketahui bahwa  $\bar{f}$  kontinu maka  $f$  kontinu. Sebaliknya diasumsikan bahwa  $f$  kontinu dan ambil himpunan terbuka  $A$  di  $Y$ . Maka himpunan  $f^{-1}(A) = \varphi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$  adalah open di  $X$ . Lebih lanjut dengan definisi dari Quotient topologi  $\bar{f}^{-1}(A)$  adalah open di  $X/R$  yakni  $\bar{f}$  kontinu.

Pemetaan  $f$  adalah konstan pada setiap class ekuivalen modulo  $R$ . Sebaliknya jika kita mempunyai pemetaan kontinu  $f: X \rightarrow Y$  yang mana konstan di setiap class ekuivalens modulo  $R$ , maka terdapat pemetaan kontinu unik  $\bar{f}: X/R \rightarrow Y$  sedemikian sehingga  $f = \bar{f} \circ \varphi$ .

### 3.3 KEKOMPLETAN

#### DEFINISI 33

Diberikan Ruang vektor Topologi  $E$  dan Subset  $A$ . Filter  $\mathfrak{F}$  pada  $A$  dikatakan Cauchy Filter jika untuk setiap  $V$  persekitaran  $0$  di  $E$  terdapat himpunan  $X \in \mathfrak{F}$  sedemikian sehingga  $X - X \subset V$ ; yang berarti  $x - y \in V$  untuk semua  $x, y \in X$ .

Subset  $A$  dari ruang topologi  $E$  adalah komplete jika untuk setiap Cauchy filter di  $A$  konvergen untuk suatu titik dari  $A$ .

**DEFINISI 34**

Diberikan  $E$  dan  $F$  ruang vektor topologi. Pemetaan  $f$  dari  $A$  subset  $E$  into  $F$  dikatakan Uniform kontinu jika untuk setiap  $W$  persekitaran  $0$  di  $F$  terdapat  $V$  persekitaran  $0$  di  $E$  sedemikian sehingga  $x - y \in V$  yang berarti  $f(x) - f(y) \in W$ .

**3.4 PEMETAAN LINIER PADA RUANG VEKTOR TOPOLOGI**

Ambil ruang vektor  $E$  dan  $F$ , kedua-keduanya atas field  $K$  yang sama, maka pemetaan  $f$  dari  $E$  into  $F$  dikatakan linier jika memenuhi identitas :

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b) \dots \dots \dots (1)$$

untuk semua  $a, b \in E$  dan  $\lambda, \mu \in K$

**3.4.1 BENTUK LINIER**

Ambil Ruang vektor atas field  $K$ , bentuk linier pada  $E$  adalah pemetaan  $f$  dari  $E$  into  $K$  yang mana memenuhi identitas (1) diatas.

Dengan memikirkan bahwa  $K$  sebagai ruang vektor atas dirinya sendiri dengan memberikan operasi

$$\text{Pemetaan } (x, y) \longrightarrow (x + y) \text{ dan}$$

$$\text{Pemetaan } (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

untuk  $x, y, \lambda \in K$ .

Sehingga aksioma ruang vektor terpenuhi.

Untuk hal diatas bentuk linier pada  $E$  adalah pemetaan linier dari  $E$  into ruang vektor  $K$ .

Jika  $E$  adalah Ruang Vektor atas Field  $K$  kita

katakan bahwa pemetaan  $f$  dari  $E$  into  $K$  adalah Semi-linier jika kondisi dibawah ini dipenuhi:

$$f(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} f(a) + \bar{\mu} f(b)$$

untuk semua  $a, b \in E$ ,  $\lambda, \mu \in K$ ,  $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in R$ .

Hal ini berarti jika  $K=R$  maka bentuk semi-linier adalah bentuk linier

Sekarang diberikan pengertian tentang bentuk sesqui-linier dan Bilinier

### 1. Bentuk Sesqui-linier

Diambil  $E$  dan  $F$  dua ruang vektor atas field  $K$ , pemetaan  $(x, y) \rightarrow B(x, y)$  dari  $E \times F$  into  $K$  adalah bentuk Sesqui-linier jika untuk setiap  $y \in F$ , pemetaan  $x \rightarrow B(x, y)$  adalah semi-linier pada  $F$  dan untuk setiap  $x \in E$  pemetaan  $y \rightarrow B(x, y)$  adalah bentuk semi-linier pada  $F$ .

### 2. Bentuk bilinier

Kemudian untuk pernyataan 1 diambil sesuai dengan point satu diatas dan untuk pernyataan kedua diganti dengan jika  $y \rightarrow B(x, y)$  adalah bentuk linier maka kita dapatkan  $(x, y) \rightarrow B(x, y)$  adalah bentuk bilinier.

### PROPOSISI 7

Pemetaan linier  $f$  dari ruang vektor topologi  $E$  into ruang vektor topologi  $F$  adalah kontinu jika  $f$  kontinu pada titik asal.

**Bukti :**

Andaikan  $W$  persekitaran  $0$  di  $F$ , maka terdapat  $V$  persekitaran  $0$  di  $E$  sedemikian sehingga  $f(V) \subset W$ , maka didapatkan untuk

$$f(a+V) = f(a) + f(V) \subset f(a) + W \text{ untuk setiap } a \in E.$$

Hal ini berarti  $f$  kontinu pada titik asal. ■

**3.5 RUANG DUAL**

Ditentukan Ruang vektor  $E$  atas field  $K$  dan  $E'$  himpunan semua bentuk linier kontinu pada  $E$ . Dengan mengingat Definisi ruang Banach, akan didefinisikan pada  $E'$  atas field  $K$ .

1. Jika  $f$  dan  $g$  dua bentuk linier kontinu pada  $E$ , maka  $f + g$  dibatasi dengan

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \dots\dots\dots \text{untuk semua } x \in E$$

dengan kekontinuan mengikuti dari pertidaksamaan berikut:

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x) + g(x)| \leq (\|f\| + \|g\|)\|x\| \dots\dots\dots (4)$$

sehingga  $f$  dan  $g$  adalah dua bentuk linier kontinu.

2. Kemudian untuk  $\lambda$  (skalar),  $\lambda f$  adalah bentuk linier yang diberikan dengan:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \text{ untuk semua } x \in E.$$

dengan kekontinuan mengikuti dari :

$$|(\lambda f)(x)| \leq |\lambda| \|f\| \|x\|$$

Sehingga dengan pendefinisian diatas maka aksioma-aksioma ruang vektor terpenuhi, dengan element zero

vektor dari  $E^1$  adalah pemetaan yang mana untuk setiap  $x \in E$  menunjuk pada nol (zero) di  $K$ .

Lebih lanjut bentuk linier diatas diberikan suatu norm (definisi 2). Untuk aksioma 1 dan aksioma 3 jelas terpenuhi. kemudian untuk aksioma 2 juga dipenuhi karena:

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \sup \frac{|\lambda f(x)|}{\|x\|} = \sup \frac{|\lambda| \|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= |\lambda| \sup \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|f\|\end{aligned}$$

Untuk mendefinisikan suatu ruang norm agar memenuhi struktur ruang Banach perlu dibuktikan bahwa ruang norm diatas merupakan ruang metrik lengkap (definisi 7)

Ambil  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  barisan cauchy dalam  $E^1$ , maka untuk  $x \in E^1$  didapatkan

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \dots \dots (5)$$

dimana  $n, m > N(\varepsilon)$

Ini berarti barisan  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  adalah konvergen.

Kemudian dengan menotasikan suatu limit .

Pemetaan  $f: x \longrightarrow f(x)$  dari  $E$  into  $K$  adalah linier karena

$$\begin{aligned}f(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} f(y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y)\end{aligned}$$

Dengan mengikuti dari (4) bahwa

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \|x\| \text{ jika } m > n.$$

Sehingga

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x)| \leq (\varepsilon + \|f_m\|) \|x\| ;$$

yakni  $f$  kontinu.

Lebih lanjut

$$\|f - f_m\| = \sup_x \frac{|f(x) - f_m(x)|}{\|x\|} \leq \varepsilon \text{ jika } m > n$$

Dimana menunjukkan bahwa  $(f_n)$  konvergen untuk  $f$  di ruang norm  $E^1$ .

Sehingga dengan uraian diatas telah lengkap bahwa  $E^1$  merupakan ruang Banach. Dan ruang  $E^1$  ini disebut ruang dual dari  $E$ .

Kemudian didefinisikan ruang dual adalah sebagai berikut,  $E$  merupakan ruang vektor topologi dan ruang dual dari  $E$  dituliskan  $E^1$  merupakan himpunan dari semua bentuk-bentuk linier kontinu pada  $E$  sedemikian sehingga  $E^1$  merupakan ruang vektor topologi. Untuk pembahasan selanjutnya ruang dual yang dimaksudkan dapat merupakan ruang dual dari ruang konvek lokal.

#### NOTASI

Ambil andaikan  $E$  ruang vektor norm dan  $E^1$  merupakan ruang dualnya dengan  $x^1, y^1, \dots$  merupakan elemen-elemen (anggota) dari  $E^1$ .

Kemudian didefinisikan symbol :

$$\langle x, x^1 \rangle \text{ dengan pengertian } \langle x, x^1 \rangle = x^1(x).$$

dimana pada ruas kanan diatas adalah harga dari ben-

tuk linier  $\alpha^l$  pada titik  $\alpha$ .

Untuk pembahasan selanjutnya didefinisikan symbol  $\mathfrak{D}^l(\Omega)$  adalah dengan maksud sebagai ruang dual dari  $\mathfrak{D}(\Omega)$  dan juga pengertian diatas berlaku secara juga untuk ruang  $\mathfrak{D}^l(\Omega)$  tersebut. Begitu pula untuk ruang  $\mathfrak{E}^l(\Omega)$ .

