BAB II

MATERI DASAR

2.1. Turunan Parsiil

Di dalam pendugaan nilai-nilai parameter populasi statistik atau model rancangan percobaan digunakan turunan parsiil.

Definisi 1

Turunan parsiil ke-x suatu fungsi dua variabel $Z = f(x,y)$, dinotasikan $\delta Z/\delta x$ adalah turunan ke-x fungsi dua variabel $Z = f(x,y)$ yang mana variabel selain x dipandang sebagai konstanta, dirumuskan :

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Akibat Definisi 1:

Apabila $Z = f(x,y)$ diturunkan parsiil terhadap y, variabel x dipandang sebagai konstanta, dirumuskan :

$$\frac{\delta Z}{\delta y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x\ ,\ y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Definisi 1 dapat diperluas untuk fungsi dengan lebih dari dua variabel.

Turunan parsiil kedua dari $Z = f(x,y)$ dinotasikan :

$$\frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\delta Z}{\delta x}\right] = \frac{\delta^2 Z}{\delta x^2}$$

Contoh 1 :

$$Z = (5x - y)^2$$

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = 2(5x - y)\ (5) = 10(5x - y), \qquad \frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = 50$$

$$\frac{\delta Z}{\delta y} = 2(5x - y)\ (-1) = -2(5x - y), \qquad \frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = -10$$

Syarat ada harga ekstrim dua variabel adalah :

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = 0, \qquad \frac{\delta Z}{\delta y} = 0$$

dengan ketentuan :

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} > 0 \text{ Ekstrim minimum}$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta y^2} < 0 \text{ Ekstrim maximum}$$

Contoh 2 :

$$Z = (5x - y)^2$$

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = 2(5x - y)\ (5)$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = 50 > 0 \text{ Ekstrim minimum}$$

2.2. Kombinasi Linier dan Matriks

2.2.1. Kombinasi Linier

Definisi 2

Suatu vektor v dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots\ldots, \gamma_n\}$ sedemikian sehingga $v = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_n u_n$.

Contoh 3.

$a = [2,1,2]$, $b = [1,0,3]$, $c = [3,1,5]$

Jika ditulis bahwa a sebagai kombinasi linier dari b dan c, dan menghitung γ_1 dan γ_2 yang memenuhi :

$[2,1,2], = \gamma_1[1,0,3] + \gamma_2[3,1,5]$ atau

$$2 = \gamma_1 + 3\gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$1 = 0\gamma_1 + \gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$2 = 3\gamma_1 + 5\gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $\gamma_1 = -1$ dan $\gamma_2 = 1$.

Kemudian nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan (3) ternyata memenuhi pula.

Jadi penulisan yang diminta :

$a = -b + c$

2.2.2. Matriks

Definisi 3

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/dijajarkan secara persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom)

Notasi Matriks :

Matriks diberi nama dengan huruf besar. Secara lengkap dapat ditulis matriks $N = (n_{ij})$ artinya suatu matriks N yang elemen-elemennya n_{ij}, yang mana indeks i menyatakan kolom ke-i dan indeks j menyatakan baris ke-j dari elemen tersebut.

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & \ldots\ldots\ldots n_{v1} \\ n_{12} & n_{22} & \ldots\ldots\ldots n_{v2} \\ \vdots & & \\ n_{1b} & n_{2b} & \ldots\ldots\ldots n_{vb} \end{bmatrix}$$

Matrik $N = (n_{ij})$, $i = 1,2,\ldots..,v$ dan $j = 1,2,,\ldots,\ b$ yang mana banyaknya kolom = v dan banyaknya baris = b

Dapat pula ditulis $N = (n_{ij})$ berukuran v x b

Untuk transpose dari N adalah N′berukuran b x v yang didapatkan dari N dengan menuliskan kolom ke-i dari $N(i = 1,2,\ldots..v)$ sebagai baris ke-i dari N′.

Atau $N' = (n_{ji})$

Definisi 4

Pandang $N = (n_{ij})$ berukuran v x b dan $M = (m_{ij})$ berukuran b x c, maka perkalian NM adalah matriks $A = a_{ij}$ berukuran v x c dengan :

$a_{ij} = n_{1j}m_{i1} + n_{2j}\ m_{i2} + \ldots\ldots\ldots + n_{vj}m_{iv}$

Untuk setiap $i = 1, 2, \ldots\ldots, v$ dan

$j = 1, 2, \ldots\ldots, c$

Definisi 5

Determinan dari $\begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{bmatrix} = n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12}$

Definisi 6

Minor M_{ij} dari elemen n_{ij} adalah determinan dari n_{ij} dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Definisi 7

Kofaktor $N_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$ adalah merupakan suatu skalar dengan elemen n_{ij}.

Definisi 8 (Determinan)

Determinan dari matriks N = jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

$$|N| = \sum_{j=1}^{v} n_{ij}N_{ij} = n_{i1}N_{i1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_{iv}N_{iv}$$

dengan i sembarang disebut uraian kolom ke-i

$$|N| = \sum_{i=1}^{v} n_{ij}N_{ij} = n_{1j}N_{1j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_{vj}N_{vj}$$

dengan j sembarang disebut uraian baris ke-j

Contoh 4 :

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & n_{31} \\ n_{12} & n_{22} & n_{32} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix}$$

Matrik N tersebut berordo 3, sehingga sesuai definisi 7, maka :

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} n_{22} & n_{32} \\ n_{23} & n_{33} \end{vmatrix} = n_{22}n_{33} - n_{32}n_{23}$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} n_{12} & n_{32} \\ n_{13} & n_{33} \end{vmatrix} = -(n_{12}n_{33} - n_{32}n_{13})$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} n_{12} & n_{22} \\ n_{13} & n_{23} \end{vmatrix} = n_{12}n_{23} - n_{22}n_{13}$$

$$\text{Jadi } |N| = n_{11}(n_{22}n_{33} - n_{32}n_{23}) - n_{21}(n_{12}n_{3} - n_{32}n_{13}) + n_{31}(n_{12}n_{23} - n_{22}n_{13})$$

Sedangkan matriks yang non singular adalah suatu matriks bujur sangkar N (berukuran v x v) yang mempunyai $|N| \neq 0$.

Sifat determinan :

(1) $|N| = |N'|$

(2) Harga determinan tidak berubah jika baris/kolom ke-i ditambah dengan γ baris/kolom ke-j.

Definisi 9 (Rank Matriks)

Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier.

Akibat definisi 9

Karena matriks-matriks yang ekivalen baris/kolom mempunyai ruang yang sama, maka untuk mencari rank dari suatu matriks dapat digunakan transformasi elementer. Dan diusahakan mengubah sebanyak mungkin baris/kolom menjadi vektor nol (karena vektor nol bergantung linier).

2.3. Konsep Dasar Statistika

Konsep dasar statistika yang akan disajikan disini hanya konsep-konsep dasar yang mendasari rancangan percobaan. Untuk itu yang dibahas hanya konsep-konsep dasar statistika yang digunakan dalam pokok pembahasan.

2.3.1. Definisi tentang Data Statistika

Definisi 10

Populasi adalah keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian.

Definisi 11

Sampel adalah pengamatan yang merupakan himpunan bagian populasi.

Definisi 12

Parameter adalah sembarang nilai yang menjelaskan ciri populasi.

Definisi 13

Statistik adalah sembarang nilai yang menjelaskan ciri suatu sampel.

Definisi 14

Jika x_1, x_2, ...,x_N adalah sekelompok data yang tidak harus semuanya berbeda dan menyusun sebuah populasi terhingga berukuran N maka rata-rata populasinya:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Definisi 15

Jika x_1, x_2,...,x_n adalah sekelompok data yang tidak harus semuanya berbeda dan merupakan sebuah sampel terhingga berukuran n, maka rata-rata sampelnya :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Definisi 16

Jika x_1,x_2,...,x_N merupakan populasi berhingga dengan ukuran N, maka varians dari populasi:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$$

Definisi 17

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sembarang sampel acak berukuran n, maka varians dari sampel:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

2.3.2. Variabel Acak, Nilai Harapan dan Varians

Definisi 18

Variabel acak adalah suatu fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap anggota dalam ruang sampel.

Definisi 19

Variabel acak diskrit adalah variabel acak pada suatu ruang sampel yang mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan bulat.

Definisi 20

Variabel acak kontinu adalah variabel acak pada ruang sampel yang mengandung titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis.

Definisi 21

Fungsi f(x) adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu variabel acak diskret X bila, untuk setiap hasil x yang mungkin,

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\sum_{x} f(x) = 1$

(3) $P(X = x) = f(x)$

Definisi 22

Fungsi f(x) adalah fungsi kepekatan peluang variabel acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila :

(1) $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(3) $P\ (a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Definisi 23

Jika X suatu variabel acak dengan distribusi peluang f(x), maka nilai harapan dari X adalah:

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{x} x\ f(x) \qquad \text{bila X diskret}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx \qquad \text{bila X kontinu,}$$

dengan :

$\mathbb{E}(x)$ merupakan rata-rata untuk variabel acak X.

Akibat *definisi 14* dan *23*, maka :

$\mathbb{E}(x) = \mu$

Beberapa sifat dari nilai harapan, antara lain :

1. $\mathbb{E}(ax+b) = a\ \mathbb{E}(x) + b$

   Diperoleh berdasarkan definisi 22 butir (2) dan definisi 23 yaitu :

   $$\mathbb{E}(ax+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

   $$= a\ \mathbb{E}(x) + b$$

Bila a = 0, maka $\mathbb{E}(b) = b$

Bila b = 0, maka $\mathbb{E}(ax) = a\,\mathbb{E}(x)$

dengan a, b adalah konstanta

2. $\mathbb{E}(cx)^2 = c^2\,\mathbb{E}(x^2)$

Diperoleh berdasarkan definisi 23 yaitu :

$$\mathbb{E}(c\,x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(cx)^2 f(x)dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = c^2\mathbb{E}\,(x^2)$$

3. $\mathbb{E}(\sum_i x_i) = \sum_i \mathbb{E}(x_i)$

Diperoleh berdasarkan definisi 23 yaitu :

$$\mathbb{E}(\sum_i x_i) = \int_{-\infty}^{\infty}(\sum_i x_i)f(x)dx = \sum_i \left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x)dx\right\}$$

$$= \sum_i \mathbb{E}\,(x_i)$$

dengan x_i adalah variabel acak yang independen.

Definisi 24

Jika x adalah variabel acak maka ditribusi dari nilai-nilai x di sekitar nilai harapan didefinisikan sebagai:

$$\text{varians }(x) = \text{var}(x) = \sigma^2 = \mathbb{E}(x - \mathbb{E}(x))^2$$

Akibat definisi 23 dan 24, maka:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(x - \mu)^2$$

Beberapa sifat penting dari varians

1. $\text{var}(x) = \sigma^2 = \mathbb{E}(x - \mu)^2 = \mathbb{E}\,(x^2) - \mu^2 = \mathbb{E}(x^2) - \{\mathbb{E}(x)\}^2$
2. $\text{var}(c) = 0$
3. Jika a dan b adalah konstanta, maka:

$\text{var }(ax) = a^2\text{var}(x)$

$\text{var }(ax + b) = a^2\ \text{var}(x)$

$\text{var }(x + b) = \text{var}(x)$

Definisi 25

Variabel acak x dan y dikatakan independen bhb :

$$f(x,y) = g(x)\ h(y)$$

untuk semua kemungkinan nilai-nilai x dan y.

Definisi 26

Jika x segugus data yang terdiri dari elemen-elemen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maka derajad bebas (db) dari x adalah banyaknya elemen yang independen dalam x tersebut.

2.3.3. Beberapa Distribusi yang Penting

2.3.3.1. Distribusi Normal

Distribusi ini merupakan distribusi terpenting yang digunakan dalam rancangan percobaan, karena banyak pengukuran berdistribusi mengikuti atau mendekati distribusi normal.

Definisi 27

Suatu variabel acak kontinu x dikatakan berdistribusi normal jika fungsi kepakatan peluangnya mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right] , -\infty < x < \infty$$

dengan μ dan σ^2 merupakan parameter rata-rata dan varians dari distribusi normal, yang bernilai:

$$-\infty < \mu < \infty \quad \text{dan} \quad 0 < \sigma^2 < \infty \ .$$

$x \sim N(\mu,\sigma^2)$ maksudnya adalah variabel acak kontinu x berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2.

$x_i \sim$ DNI $(0,\sigma^2)$ maksudnya adalah variabel acak x_i

berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varians σ^2.

2.3.3.2. Distribusi Khi-Kuadrat

Definisi 28

Jika s^2 adalah varians dari sampel acak berukuran n yang ditarik dari suatu populasi berdistribusi normal dengan σ^2, maka:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\ s^2}{\sigma^2}$$

merupakan sebuah nilai variabel acak χ^2 yang berdistribusi khi kuadrat dengan v = n - 1 derajad bebas.

2.3.3.3. Distribusi F

Definisi 29

Jika x_1^2 dan x_2^2 adalah variabel khi-kuadrat dengan masing-masing mempunyai db v_1 dan v_2 serta ke dua variabel itu independen, maka:

$$F = \frac{x_1^2/v_1}{x_2^2/v_2}$$

akan berdistribusi F dengan derajad bebas v_1 dan v_2.

2.3.4. KONSEP PENDUGAAN

Dalam analisa statistik pendugaan digunakan untuk menaksir parameter populasi yang tidak diketahui seperti rata-rata dan varians. Caranya dengan menghitung statistik dari sampel acak yang berdistribusi probilitas yang telah diketahui dan menggunakan data sampel tadi untuk menduga parameter. Sehingga penduga adalah statistik yang digunakan untuk memperoleh nilai dugaan, misalnya sebuah nilai θ bagi suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut nilai dugaan bagi parameter populasinya. Dan yang akan digunakan adalah Metode Kuadrat Terkecil.

Definisi 30

Statistik $\hat{\theta}$ dikatakan penduga tidak bias bagi parameter θ bila $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$.

Diantara semua kemungkinan penduga tidak bias bagi θ, yang variansnya terkecil adalah penduga paling efisien. Definisi 31 dan harga varians terkecil merupakan ciri-ciri penduga yang baik. Salah satu pendugaan ialah cara/metode kuadrat terkecil.

2.3.4.1. Metode Kuadrat Terkecil

Pada dasarnya cara kuadrat terkecil bertolak dari pengertian bahwa penduga yang baik dapat diperoleh melalui nilai rata-ratanya yang jumlah simpangan kuadratnya bernilai paling kecil.

Definisi 31

Bila pengamatan dari nilai dugaan suatu variabel acak x_i adalah x_1, x_2, ... , x_n dan rata-rata populasinya adalah $\mathbb{E}(x) = \mu$ maka jumlah kuadrat simpangan masing-masing pengamatan terhadap rata-rata μ, dinotasikan:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \text{ bernilai paling kecil}$$

Sifat metode kuadrat terkecil:

Jumlah kuadrat simpangan merupakan fungsi kuadrat, agar fungsi tersebut mempunyai nilai miminum maka turunan parsiil pertama terhadap parameter μ sama dengan 0 dan turunan parsiil kedua terhadap parameter μ lebih besar dari 0.

$$\frac{\delta \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}{\delta\mu} = 0$$

$$\frac{\delta^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}{\delta\mu^2} > 0 \text{ , minimum}$$

2.3.5. Pengujian Hipotesa

Pendugaan dan pengujian hipotesa merupakan 2 hal utama dalam statistika inferensia untuk keperluan pembuatan keputusan dan penarikan kesimpulan. Benar atau salahnya suatu hipotesa tidak diketahui dengan pasti kecuali jika memeriksa seluruh populasi. Untuk mengetahui benar atau salah maka perlu dilakukan pengujian, yang dikenal sebagai pengujian hipotesa.

Definsi 32

Hipotesa statistik adalah pernyataan atau dugaan mengenai satu atau lebih populasi.

Definisi 33

Ho disebut hipotesa nol yang merupakan hipotesa yang akan diuji.

Definisi 34

H_1 disebut hipotesa akternatif yang merupakan tandingan dari Ho, maksudnya jika Ho ditolak maka H_1 akan diterima.

Definisi 35

Kesalahan jenis I adalah penolakan hipotesa nol (Ho) yang benar.

Definisi 36

Kesalahan jenis II adalah penerimaan hipotesa nol (Ho) yang salah.

Peluang melakukan kesalahan jenis I disebut taraf nyata uji tersebut dan dilambangkan dengan α.
Yang mana α yang digunakan biasanya 0,01 dan 0,05. Sedangkan taraf kepercayaan dinotasikan $(1-\alpha)$ merupakan peluang $(1-\alpha)$ dalam membuat keputusan yang benar.

Langkah-langkah pengujian hipotesa:

1. Menyatakan hipotesis nolnya.
2. Memilih hipotesa alternatif yang sesuai.
3. Menentukan taraf nyata α.
4. Menggunakan statistik uji yang sesuai (uji F) dan kemudian menentukan daerah kritisnya.
5. Menghitung nilai statistik uji berdasarkan

datanya.

6. Keputusan :

Menolak Ho jika nilai statistik uji tersebut jatuh dalam daerah kritisnya, jika nilai itu jatuh di luar daerah kritis Ho diterima.

2.4. Rancangan Percobaan

2.4.1. Tujuan Rancangan Percobaan.

Rancangan percobaan bertujuan untuk memperoleh atau mengumpulkan informasi sebanyak-banyaknya yang diperlukan dan berguna dalam melakukan penyelidikan persoalan yang akan dibahas. Meskipun demikian, dalam rangka usaha mendapatkan semua informasi yang berguna, hendaknya rancangan dibuat sesederhana mungkin. Penyelidikannya juga dilakukan seefisien mungkin mengingat waktu, biaya, tenaga dan bahan yang harus digunakan. Hal ini juga penting mengingat pada kenyataan bahwa rancangan yang sederhana akan mudah dianalisis serta lebih ekonomis. Jadi rancangan percobaan berusaha untuk memperoleh informasi yang maksimum dengan biaya minimum.

2.4.2. Pengertian Beberapa Istilah

a. Percobaan (Experiment)

Ialah suatu usaha yang terencana untuk mengungkapkan fakta-fakta baru, atau menguatkan, atau membantah hasil-hasil yang sud ah ada sebelumnya.

b. Rancangan Percobaan (Experiment Design)

Merupakan seperangkat pengetahuan yang mempelajari bentuk-bentuk rancangan, cara memilih dan membuat rancangan tersebut, juga mencakup prosedur analisa statistik dari data hasil percobaan, hingga pengambilan kesimpulan yang sah.

c. Unit Percobaan (Experimental Unit)

Ialah satu atau sekumpulan materi percobaan yang diamati yang dikenakan perlakuan dengan replikasi tunggal.

d. Perlakuan (Treatment)

Ialah macam-macam prosedur yang pengaruhnya diukur dan diperbandingkan satu sama lain.

e. Replikasi (Replication)

Ialah pengulangan percobaan dasar.

f. Block

Ialah sekumpulan unit untuk membentuk grup-grup yang homogen.

g. Pengacakan (Randomization)

Merupakan suatu cara untuk membuat korelasi antar kekeliruan (sesatan) sekecil-kecilnya dan juga untuk menghilangkan bias.

h. Sesatan Percobaan (Experiment Error)

Ialah ketidakmampuan materi-materi percobaan memberikan pengaruh yang sama terhadap perlakuan yang sama pula.

i. Penyeimbangan (Balanced)

Ialah usaha-usaha memperoleh unit-unit percobaan dalam block-block dan penggunaan perlakuan terhadap unit-unit percobaan sedemikian rupa, sehingga dihasilkan suatu formasi yang seimbang.

j. Analisa Varians (Analysis of Varians)

Ialah suatu prosedur atau metode yang memungkinkan untuk menguji nilai rata-rata sekaligus, dengan menguraikan variasi total dari data yang ada menjadi komponen-komponen.

2.4.3. Asumsi Tentang Model

Asumsi-asumsi yang dimaksud adalah asumsi yang harus dipenuhi agar pengujian dengan analisa variasn dapat dilakukan, asumsi-asumsi tersebut adalah sifat normalitas dari data, homogenitas varians, sifat aditifitas dari model dan sifat independensi dari sesatan. Asumsi-asumsi tersebut seharusnya diuji terlebih dulu sebelum analisa varians dilakukan, jika asumsi-asumsi tersebut tidak dipenuhi, jelas bahwa kesimpulan dari analisa varians tidak berlaku. Akan tetapi pada umumnya akibat yang ditimbulkan karena tidak dipenuhinya asumsi-asumsi tersebut tidaklah terlalu fatal. Misalnya apabila terjadi sedikit penyimpangan dari asumsi normalitas atau homogenitas varians, ternyata hanya akan berpengaruh sedikit sekali terhadap kesimpulan yang dihasilkan. Jadi hanya pelanggaran yang sangat menyolok dari asumsi-asumsi tersebut yang menyebabkan kesimpulan tidak berlaku. Di dalam prakteknya pengujian asumsi-asumsi tersebut di atas tidak harus dilakukan.

2.4.4. Rancangan Acak Kelompok

Apabila unit-unit percobaan sangat heterogen, maka perlu dilakukan pengelompokan-pengelompokan sehingga dalam tiap kelompok unit-unit percobaan relatif homogen. Dalam hal ini digunakan suatu rancangan percobaan dengan mengelompokkan unit-unit percobaan ke dalam kelompok-kelompok (block) yang relatif homogen, kemudian rancangan percobaannya dinamakn Rancangan Acak Kelompok (RAK).

Perlakuan yang diamati dikenakan secara acak kepada unit-unit percobaan di dalam tiap block, namun hal ini menyebabkan variasi dari sesatan percobaan bertambah, sehingga menambah faktor pada sumber variasi, dengan RAK variasi sesatan tersebut dapat dikendalikan.

2.4.4.1. Model Linier dan Analisa Varians

Data hasil percobaan pada RAK dapat disusun sebagai berikut:

TABEL 1

DATA PENGAMATAN UNTUK RANCANGAN ACAK KELOMPOK

Block	Perlakuan				Jumlah Bj
	1	2	.....	v	
1	y_{11}	y_{21}	.....	y_{v1}	y.1
2	y_{12}	y_{22}	.....	y_{v2}	y.2
⋮					
r	y_{1r}	y_{2r}	.....	y_{vr}	y.r
JUMLAH T_i	$y_{1.}$	$y_{2.}$		$y_{v.}$	

Definisi 37

Model Matematis dari RAK

$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} = m + t_i + b_j + e_{ij}$

$i = 1, 2, \ldots, v$

$j = 1, 2, \ldots, r$

Dengan :

Y_{ij} = Hasil pengamatan yang dipengaruhi oleh pengaruh perlakuan ke-i dan pengaruh block ke-j.

μ = Rata-rata keseluruhan

τ_i = Pengaruh perlakuan ke-i

β_j = Pengaruh block ke-j

ε_{ij} = Sesatan percobaan

m, t_i, b_j, e_{ij} masing-masing merupakan penduga (estimasi) untuk μ, τ_i, β_j, ε_{ij}

Notasi-notasi pengamatan pada RAK adalah:

T_i = Total hasil pengamatan yang mendapat perlakuan ke-i.

$$T_i = \sum_j Y_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$\bar{T}_i$ = Rata-rata dari T_i

$$\bar{T}_i = \frac{\sum_j Y_{ij}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

B_j = Total hasil pengamatan pada block ke-j

$$B_j = \sum_i Y_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

G = Total seluruh pengamatan

$$G = \sum_i \sum_j Y_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$FK = \frac{G^2}{vr}$ = Faktor Koreksi

$$FK = \frac{\left(\sum_i \sum_j Y_{ij}\right)^2}{vr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Definisi 38

Untuk model tetap didefinisikan pengaruh perlakuan dan pengaruh block sebagai simpangan-simpangan terhadap rata-rata sedemikian hingga :

$$\sum_i \tau_i = 0 \quad \text{dan} \quad \sum_j \beta_j = 0$$

Sesatan percobaan diasumsikan berdistribusi normal independen dengan rata-rata 0 dan variasn σ^2 dan ditulis:

$$\varepsilon_{ij} \sim DNI\ (0, \sigma_v^2)$$

Dari model pada definisi 37 akan diperoleh penduga μ, τ_i, β_j, ε_{ij} dengan menggunakan metode Kuadrat terkecil, sebagai berikut:

$$Y_{ij} = m + t_i + b_j + e_{ij}$$

$$\sum_i \sum_j e_{ij}^2 = \sum_i \sum_j \left\{ Y_{ij} - m - t_i - b_j \right\}^2 \cdots (9)$$

Menurut sifat metode Kuadrat Terkecil:

$$\text{(i)} \quad \frac{\delta \sum_i \sum_j e_{ij}^2}{\delta m} = 0 = 2 \sum_i \sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j)(-1)$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\delta \sum_i \sum_j e_{ij}^2}{\delta t_i} = 0 = 2 \sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j)(-1)$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\delta \sum_i \sum_j e_{ij}^2}{\delta b_j} = 0 = 2 \sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j)(-1)$$

Dari (i) diperoleh:

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j) = 0$$

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} - vrm - r \sum_i t_i - v \sum_j b_j = 0$$

Dengan batasan $\sum_i \tau_i = 0$ dan $\sum_j \beta_j = 0$ maka $\sum_i \tau_i = 0$ dan $\sum_j \beta_j = 0$, sehingga

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} = v\ r\ m$$

$$m = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij}}{vr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Dari (ii) diperoleh:

$$\sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j) = 0$$

$$\sum_j Y_{ij} - rm - r\ t_i - \sum_j b_j = 0$$

$$\sum_j Y_{ij} - rm - rt_i = 0$$

$$T_i - rm - rt_i = 0$$

$$t_i = \frac{T_i}{r} - m \qquad (11)$$

Dari (iii) diperoleh :

$$\sum_i (Y_{ij} - m - t_i - b_j) = 0$$

$$\sum_i Y_{ij} - vm - \sum_i t_i - v\, b_j = 0$$

$$B_j - vm - vb_j = 0$$

$$b_j = \frac{B_j}{v} - m \qquad (12)$$

Sehingga dari persamaan (10), (11), dan (12)

$$e_{ij} = Y_{ij} - m - t_i - b_j$$

$$= Y_{ij} - m - \left(\frac{T_i}{r} - m\right) - \left(\frac{B_j}{v} - m\right)$$

$$= Y_{ij} - \frac{T_i}{r} - \frac{B_j}{v} + m$$

Definisi 39

Pada RAK didefinisikan :

Jumlah Kuadrat Total disingkat JKT adalah selisih antara masing-masing hasil pengamatan (Y_{ij}) dengan rata-rata keseluruhan (m).

$$JKT = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - m)^2 \qquad (13)$$

Jumlah Kuadrat Perlakuan disingkat JKP

$$JKP = \sum_i \sum_j \left(\frac{T_i}{r} - m \right)^2 \qquad (14)$$

Jumlah Kuadrat Block disingkat JKB

$$JKB = \sum_i \sum_j \left(\frac{B_j}{V} - m \right)^2 \qquad (15)$$

Dari definisi 39

$$JKT = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - m)^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - 2m \sum_i \sum_j Y_{ij} + vrm^2$$

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - 2mG + mG$$

(sesuai persamaan (7))

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_i \sum_j Y_{ij} \right)^2}{v\ r}$$

(sesuai persamaan (8))

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - FK \qquad (16)$$

$$JKP = \sum_i \sum_j \left(\frac{T_i}{r} - m \right)^2 = \sum_i \sum_j \frac{T_i^2}{r^2} - 2m \sum_i \sum_j \frac{T_i}{r} + vrm^2$$

$$= \sum_i \frac{T_i^2}{r} - 2m \sum_i T_i + mG$$

$$= \sum_i \frac{T_i^2}{r} - 2mG + mG$$

$$= \sum_i \frac{T_i^2}{r} - FK \qquad (17)$$

$$JKB = \sum_i \sum_j \left(\frac{B_j}{v} - m \right)^2 = \sum_i \sum_j \frac{B_j^2}{v^2} - 2m \sum_i \sum_j \frac{B_j}{v} + vrm^2$$

$$= \sum_j \frac{B_j^2}{v} - 2m \sum_j B_j + mG$$

$$= \sum_j \frac{B_j^2}{v} - 2mG + mG$$

$$= \sum_j \frac{B_j^2}{v} - FK \qquad (18)$$

Definisi 40

Derajad bebas suatu Jumlah kuadrat (JK) adalah banyaknya elemen independen dalam JK tersebut.

Misal: $JK = \sum_i^n (Y_i - \overline{Y})^2$

JK tersebut terdiri dari n elemen, yaitu

$(Y_1-\overline{Y}),\ (Y_2-\overline{Y}),\ \ldots\ ,\ (Y_n-\overline{Y})$.

Elemen-elemen ini tidak semuanya independen karena

$\sum_i (Y_i-\overline{Y}) = 0$

Jadi ada (n-1) yang independen, sehingga JK tersebut mempunyai derajad bebas (n-1).

Dengan demikian derajad bebas dari jK-jK pada RAK adalah :

$$JKT = \sum_i \sum_j (Y_{ij}-m)^2$$

JKT mempunyai v buah perlakuan dan r buah replikasi, maka JKT mempunyai vr buah elemen. Maka JKT mempunyai derajad bebas (vr-1).

$$JKP = \sum_i \sum_j \left(\frac{T_i}{r} - m\right)^2 = r \sum_i \left(\frac{T_i}{r} - m\right)^2$$

JKP mempunyai v buah elemen, yaitu v buah perlakuan, maka

JKP mempunyai derajad bebas (v - 1)

$$JKB = \sum_i \sum_j \left(\frac{B_j}{v} - m \right)^2 = v \sum_j \left(\frac{B_j}{v} - m \right)^2$$

JKB mempunyai r buah elemen, yaitu r buah replikasi, maka JKB mempunyai derajad bebas (r - 1).

Teorema 1

Jumlah Kuadrat Total = Jumlah Kuadrat Perlakuan + Jumlah Kuadrat Block + Jumlah Sesatan.

dan disingkat : JKT = JKP + JKB + JKS

Bukti :

Dari persamaan (9)

$$JKS = \sum_i \sum_j eij^2 = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j)^2$$

$$= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - m - t_i - b_j)(Y_{ij} - m - t_i - b_j)$$

$$= (\sum_i \sum_j Y_{ij} - \sum_i \sum_j m - r \sum_i t_i - v \sum_j b_j).$$

$$(Y_{ij} - m - t_i - b_j)$$

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij} (Y_{ij} - m - t_i - b_j) - \left(\sum_i \sum_j m\right)$$

$$(Y_{ij} - m - t_i - b_j) - 0$$

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - m \sum_i \sum_j Y_{ij} - \sum_i \sum_j Y_{ij} t_i$$

$$- \sum_i \sum_j Y_{ij} b_j - m \sum_i \sum_j Y_{ij} + vrm^2 + rm \sum_i t_i$$

$$+ vm \sum_j b_j$$

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^{\,2} - \frac{\left(\sum_i \sum_j Y_{ij}\right)^2}{vr} - \sum_i t_i T_i - \sum_j b_j B_j$$

$$- mG + mG + 0 + 0$$

$$\text{JKS} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \text{FK} - \sum_i t_i T_i - \sum_j b_j B_j$$

Dari persamaan (11) dan (12) maka

$$\text{JKS} = \sum_i \sum_j Y_{ij}^{\,2} - \text{FK} - \sum_i T_i \left(\frac{T_i}{r} - m\right) - \sum_j B_j \left(\frac{B_j}{v} - m\right)$$

$$= \sum_i \sum_j Y_{ij}^{\,2} - \text{FK} - \left(\sum_i \frac{T_i^{\,2}}{r} - m \sum_i T_i\right) - \left(\sum_j \frac{B_j^{\,2}}{v} - m \sum_j B_j\right)$$

$$= \left(\sum_i \sum_j Y_{ij}^{\,2} - \text{FK}\right) - \left(\sum_i \frac{T_i^{\,2}}{r} - \text{FK}\right) - \left(\sum_j \frac{B_j^{\,2}}{v} - \text{FK}\right)$$

Sesuai persamaan (16), (17) dan (18) maka :

JKS = JKT - JKP - JKB

JKT = JKP + JKB + JKS

Akibat dari teorema 1

db JKS = db JKT - db JKP - db JKB

= (vr - 1) - (v - 1) - (r - 1)

= (v -1)(r - 1)

Definisi 41

Rata-rata Jumlah Kuadrat (RJK) adalah perbandingan antara Jumlah Kuadrat (JK) dengan derajat bebasnya (db) dari JK tersebut.

Akibat definisi 40 dan 41

Rata-rata Jumlah Kuadrat Total disingkat RJKT :

$$RJKT = \frac{JKT}{vr - 1}$$

Rata-rata Jumlah Kuadrat Perlakuan disingkat RJKP :

$$RJKP = \frac{JKP}{v - 1}$$

Rata-rata Jumlah Kuadrat Block disingkat RJKB :

$$RJKB = \frac{JKB}{r - 1}$$

Rata-rata Jumlah Kuadrat Sesatan disingkat RJKS :

$$RJKS = \frac{JKS}{(v - 1)(r - 1)}$$

Analisis selanjutnya adalah mencari nilai harapan dari rata-rata Jumlah Kuadrat pada RAK dengan mengingat batasan $\sum_i \tau_i = 0$ dan $\sum_j \beta_j = 0$

Teorema 2

Jika Y_{ij} variabel-variabel acak dengan varians σ_v^2 maka :

$$\mathbb{E}\ (RJKT) = \frac{r}{vr - 1} \sum_i \tau_i^2 + \frac{v}{vr - 1} \sum_j \beta_j^2 + \sigma_v^2$$

$$\mathbb{E}\ (RJKP) = \frac{r}{v - 1} \sum_i \tau_i^2 + \sigma_v^2$$

$$\mathbb{E}\ (RJKB) = \frac{v}{r - 1} \sum_j \beta_j^2 + \sigma_v^2$$

dengan :

$\mathbb{E}$ (RJKT) = nilai harapan Rata-rata Jumlah Kuadrat Total

$\mathbb{E}$ (RJKP) = nilai harapan Rata-rata Jumlah Kuadrat Perlakuan

$\mathbb{E}$ (RJKB) = nilai harapan Rata-rata Jumlah Kuadrat Block

Bukti :

$$JKT = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - m)^2 \quad \text{(sesuai definisi 39 persamaan (13))}$$

$$= \sum_i \sum_j \{(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j (\mu + \tau_i + \beta_j\ \varepsilon_{ij})\}^2$$

$$= \sum_i \sum_j \{(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{vr} (vr\mu + r \sum_i \tau_i + v \sum_j \beta_j +$$

$$+ \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij})\}^2$$

$$= \sum_i \sum_j \{\tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}\}^2$$

$$\mathbb{E}\ (JKT) = \sum_i \sum_j (\tau_i^2 + \beta_j^2 + \sigma_v^2 + \frac{1}{v^2 r^2} \cdot vr \cdot \sigma_v^2 - 2\ \frac{1}{vr}\ \sigma_v^2$$

$$= \sum_i \sum_j (\tau_i^2 + \beta_j^2 + \sigma_v^2 - \frac{1}{vr}\ \sigma_v^2)$$

$$= r \sum_i \tau_i^2 + v \sum_j \beta_j^2 + (vr - 1)\ \sigma_v^2 \qquad (19)$$

$$\mathbb{E}\ (RJKT) = \frac{\mathbb{E}\ (JKT)}{vr - 1}$$

$$= \frac{r}{vr - 1} \sum_i \tau_i^2 + \frac{v}{vr-1} \sum_j \beta_j^2 + \sigma_v^2$$

Kemudian sesuai definisi 39 persamaan (14)

$$JKP = \sum_i \sum_j \left(\frac{T_i}{r} - m\right)^2$$

$$= r \sum_i \left\{ \frac{1}{r} \sum_j (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) \right\}^2$$

$$= r \sum_i \left\{ \mu + \tau_i + \frac{1}{r}\sum_j \beta_j + \frac{1}{r} \sum_j \varepsilon_{ij} - \mu \right.$$

$$\left. - \frac{1}{v} \sum_i \tau_i - \frac{1}{r}\sum_j \beta_j - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \right\}^2$$

$$= r\sum_i \left[\tau_i + \frac{1}{r} \sum_j \varepsilon_{ij} - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}\right]^2$$

$$\mathbb{E}\ (JKP) = r \sum_i \left\{ \tau_i^2 + \frac{1}{r^2} \cdot r\sigma_v^2 + \frac{1}{v^2 r^2} \cdot vr\ \sigma_v^2 - 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{1}{vr} \cdot r\ \sigma_v^2 \right\}$$

$$= r \sum_i \left\{ \tau_i^2 + \frac{1}{r} \sigma_v^2 - \frac{1}{vr}\ \sigma_v^2 \right\}$$

$$= r \sum_i \tau_i^2 + (v-1)\ \sigma_v^2 \tag{20}$$

$$\mathbb{E}'(RJKP) = \frac{\mathbb{E}\ (JKP)}{v-1}$$

$$= \frac{r}{v-1} \sum_i \tau_i^2 + \sigma_v^2$$

Kemudian sesuai definisi 39 persamaan (15)

$$JKB = \sum_i \sum_j \left(\frac{Bj}{v} - m\right)^2$$

$$= v \sum_j \left(\frac{B_j}{v} - m\right)^2$$

$$= v \sum_j \left\{ \frac{1}{v} \sum_i (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) \right\}^2$$

$$= v \sum_j \left\{ \mu + \frac{1}{v} \sum_i \tau_i + \beta_j + \frac{1}{v} \sum_i \varepsilon_{ij} - \mu - \frac{1}{v}\sum_i \tau_i - \frac{1}{r}\sum_j \beta_j \right.$$

$$\left. - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \right\}^2$$

$$= v \sum_j \left\{ \beta_j + \frac{1}{v} \sum_i \varepsilon_{ij} - \frac{1}{vr} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \right\}^2$$

$$\mathbb{E}\ (JKB) = v \sum_j \left\{ \beta_j^{\ 2} + \frac{1}{v^2} \cdot v\sigma_v^{\ 2} + \frac{1}{v^2 r^2} \cdot vr\ \sigma_v^{\ 2} \right.$$

$$\left. - 2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{vr} \cdot v\ \sigma_v^{\ 2} \right\}$$

$$= v \sum_j \left\{ \beta_j^{\ 2} + \frac{1}{v} \sigma_v^{\ 2} - \frac{1}{vr} \sigma_v^{\ 2} \right\}$$

$$= v \sum_j \beta_j^{\ 2} + (r - 1)\ \sigma_v^{\ 2} \qquad (21)$$

$$\mathbb{E}\ (RJKB) = \frac{\mathbb{E}\ (JKB)}{r-1}$$

$$= \frac{v}{r-1} \sum_j \beta_j^{\ 2} + \sigma_v^{\ 2}$$

Teorema 3

Nilai harapan Rata-rata Jumlah Kuadrat Sesatan, adalah varians σ_v^2 atau

$\mathbb{E}\ (RJKS) = \sigma_v^2$

Bukti :

Dari teorema 1 telah dibuktikan bahwa :

JKS = JKT - JKP - JKB

$\mathbb{E}$ (JKS) = $\mathbb{E}$ (JKT - JKP - JKB)

= $\mathbb{E}$ (JKT) - $\mathbb{E}$ (JKP) - $\mathbb{E}$ (JKB)

Dan sesuai teorema 2 persamaan (19), (20) dan (21)

$$\mathbb{E}\ (JKS) = r \sum_i \tau_i^2 + v \sum_j \beta_j^2 + (vr-1)\ \sigma_v^2 - \left\{ r \sum_i \tau_i^2 + (v-1). \right.$$

$$\sigma_v^2 \Big\} - \Big\{ v \sum_j \beta_j^2 + (r-1)\, \sigma_v^2 \Big\}$$

$$= (vr - v - r + 1)\, \sigma_v^2$$

$$= (v-1)(r-1)\, \sigma_v^2$$

$$\mathbb{E}\,(RJKS) = \frac{\mathbb{E}(JKS)}{(v-1)(r-1)}$$

$$= \sigma_v^2$$

Teorema 4

Varians dari selisih 2 rata-rata perlakuan adalah :

$$\mathrm{var}\,(t_i - t_m) = \frac{2\sigma_v^2}{r}$$

dengan :

t_i = Rata-rata perlakuan ke-i

t_m = Rata-rata perlakuan ke-m

Bukti :

Dari persamaan (11)

$$ti - tm = \Big(\frac{T_i}{r} - m\Big) - \Big(\frac{T_m}{r} - m\Big)$$

$$= \frac{T_i}{r} - \frac{T_m}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_j (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) - \frac{1}{r}\sum_j (\mu + \tau_m + \beta_j + \varepsilon_{mj})$$

$$= \mu + \tau_i + \frac{1}{r}\sum_j \beta_j + \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{ij} - \mu - \tau_m - \frac{1}{r}\sum_j \beta_j$$

$$- \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{mj}$$

$$= \tau_i - \tau_m + \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{ij} - \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{mj}$$

Dari definisi 38

Pengaruh perlakuan τ_i bersifat tetap, sehingga :

$\mathbb{E}\ (\tau_i) = \tau_i$

Sedangkan ε_{ij} tidak berkorelasi, sehingga :

$\mathbb{E}\ (\varepsilon_{ij}) = 0$

Maka

$$\mathbb{E}\ (ti - tm) = \mathbb{E}\left\{\tau_i - \tau_m + \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{ij} - \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{mj}\right\}$$

$$= \tau_i - \tau_m$$

Sesuai definisi 24

$$Var\ (ti - tm) = \mathbb{E}\ \{(ti - tm) - \mathbb{E}\ (ti - tm)\}^2$$

$$= \mathbb{E}\ \{\ \tau_i - \tau_m + \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{ij} - \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{mj} - (\tau_i - \tau_m)\}^2$$

$$= \mathbb{E}\ \{\ \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{ij} - \frac{1}{r}\sum_j \varepsilon_{ij}\}^2$$

$$= \frac{1}{r^2}\ r\ \sigma_v^2 + \frac{1}{r^2}\ r.\ \sigma_v^2 - 2.0$$

$$= \frac{2\sigma_v^2}{r}$$

2.4.4.2. Uji Hipotesa

Apabila akan diselidiki apakah perlakuan berbeda nyata atau tidak, maka diambil :

$$F = \frac{\mathbb{E}\ (RJKP)}{\mathbb{E}\ (RJKS)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Hipotesa nol(Ho) dan hipotesa tandingannya (H1) untuk RAK didefinisikan :

Ho : $\tau_i = 0$, dengan $i = 1, 2, \ \ldots\ , v$

H_1 : minimal ada salah satu dari τ_i tidak sama dengan 0

Atau dengan kata lain :

Ho : Pengaruh perlakuan tidak berbeda nyata

H_1 : Pengaruh Perlakuan berbeda nyata

Karena $\mathbb{E}$ (RJKP) dan $\mathbb{E}$ (RJKS) dapat diduga dengan RJKP dan RJKS, dan sesuai definisi 41, maka persamaan (22) menjadi

$$F = \frac{RJKP}{RJKS} = \frac{JKP/(v-1)}{JKS/(v-1)(r-1)} \quad (23)$$

Sesuai definisi 37 maka pengamatan-pengamatan Y_{ij} akan berdistribusi normal independen dengan rata-rata $\mu + \tau_i$ dan varians σ_v^2.. Sehingga jika Ho benar yang mana $\tau_i = 0$ maka Y_{ij} berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varians σ_v^2, yang berakibat JKT,JKP,JKB dan JKS merupakan jumlah dari kuadrat variabel-variabel yang berdistribusi normal.Sesuai definisi 28 jika Ho:τ_i=0 benar maka:

$\frac{JKP}{\sigma_v^2} = \frac{(v-1)\ RJKP}{\sigma_v^2}$ akan berdistribusi khi -kuadrat dengan db = (v-1)..............................(24)

$\frac{JKS}{\sigma_v^2} = \frac{(v-1)(r-1)\ RJKS}{\sigma_v^2}$ akan berdistribusi khi -kuadrat

dengan db = (v-1) (r-1) (25)

Dari persamaan (24) dan (25) dan sesuai definisi 29, maka

$$F = \frac{RJKP}{RJKS} = \frac{JKP/(v-1)}{JKS/(v-1)(r-1)}$$

akan berdistribusi F dengan db = [(v-1),(v-1)(r-1)] dan dinamakan F hitung dan disingkat F hit. F hit ini akan dibandingkan dengan F tabel dengan derajad bebas [(v-1),(v-1)(r-1)] dengan tingkat kepercayaan $F\alpha$ [(v-1),(v-1)(r-1)]

dengan :

Ho ditolak jika F hit > $F\ \alpha$ [(v-1),(v-1)(r-1)]

Berdasarkan definsi-definisi dan analisis yang telah dilakukan maka dapat disusun tabel analisis varians untuk RAK.

TABEL 2

ANALISA VARIANS RANCANGAN ACAK KELOMPOK

Sumber Varians (SV)	Derajad bebas (db)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rata-rat JK (RJK)	F
Block	r-1	$\sum_j \frac{B_j^2}{v} - FK$	$\frac{JKB}{r-1}$	
Perlakuan	v-1	$\sum_i \frac{T_i^2}{r} - FK$	$\frac{JKP}{v-1}$	$\frac{RJKP}{RJKS}$
Satuan	(v-1)(r-1)	JKT-JKP-JKB	$\frac{JKS}{(v-1)(r-1)}$	
Total	vr-1	$\sum_i \sum_j Y_{ij} - FK$		