BAB II
KONSEP DASAR

2.1 Vektor

Definisi 1

m tupel bilangan riil (X_1, X_2, . . ., X_m) ditulis dalam satu kolom disebut vektor, diberi notasi huruf tebal atau " — " dibawahnya.

Contoh 1 :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektor dapat juga ditulis sebagai transposenya, yaitu :

$$\underline{X}' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & . & . & . & X_m \end{bmatrix}, \ \underline{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \underline{Y}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2

Suatu vektor $\underline{U}$ dikatakan kombinasi linier dari vektor $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & . & . & . & X_m \end{bmatrix}$ bila terdapat $\{a_1 \ a_2 \ . \ . \ . \ a_m\}$ sedemikian hingga $\underline{U} = a_1X_1 + a_2X_2 + . . . + a_mX_m$.

Definisi 3

Himpunan vektor X_1, X_2, . . ., X_m disebut dependent linier bila terdapat bilangan (a_1, a_2, . . .,a_n) tidak semua nol sedemikian hingga :

$$a_1X_1 + a_2X_2 + . . . + a_mX_m = 0$$

Apabila tidak, himpunan vektor tersebut disebut Independent linier.

2.2 Matrik Dan Determinant

Definisi 4

Matrik bertipe m×k ditulis dengan huruf tebal atau tanda " — " dibawahnya, seperti $\underline{E}$, $\underline{V}$, $\underline{I}$ dan sebagainya adalah daftar bilangan dengan m baris dan k kolom.

contoh 2 :

$$\underset{3\times 2}{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underset{2\times 3}{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi 5

Dimensi matrik m×k adalah pasangan bilangan (m,k) dengan m adalah dimensi baris dan k adalah dimensi kolom. Dimensi suatu matrik dapat dilihat di bawah huruf yang merupakan simbol dari matriknya.

Matrik $\underline{A}$ bertipe m×k ditulis $\underset{m\times k}{\underline{A}}$

Sembarang matrik $\underset{m\times k}{\underline{A}}$ ditulis :

$$\underset{m\times k}{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

atau dengan lebih singkat $\underset{m\times k}{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$ dengan a_{ij} adalah elemen baris ke-i, kolom ke-j dari matrik $\underline{A}$, i= 1,2, . . m

j=1,2, . . .k

Matrik m×1 merupakan vektor kolom (dimensi m).

Matrik 1×k merupakan vektor baris (dimensi k).

Definisi 6

Dua matrik $\underset{m\times k}{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$ dan $\underset{m\times k}{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$ disebut sama ditulis $\underline{A} = \underline{B}$ bila dan hanya bila $a_{ij} = b_{ij}$ $i=1,2,\ldots,m$

$j=1,2,\ldots,k$

Jadi dua matrik disebut sama bila dimensinya sama dan setiap elemen yang berkorespondensi sama.

Definisi 7 (Penjumlahan Matrik)

Matrik $\underline{A}$ dan $\underline{B}$ masing-masing berdimensi m×k dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}, $i=1,2,\ldots m$ dan $j=1,2,\ldots k$. Jumlah matrik $\underline{A}$ dan $\underline{B}$ adalah matrik $\underline{C}$ berdimensi m×k, ditulis :

$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ dengan elemen-elemen $\underline{C}$ adalah c_{ij} diberikan oleh $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definisi 8 (Perkalian Skalar)

Jika c skalar sembarang dan $\underset{m\times k}{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$,maka :

$c\underset{m\times k}{\underline{A}} = \underset{m\times k}{\underline{A}}c = \underset{m\times k}{\underline{B}} = b_{ij}$, dimana :

$b_{ij} = ca_{ij} + a_{ij}c$, $\quad i = 1,2,\ldots,m$

$j = 1,2,\ldots,k$

Definisi 9 (Pengurangan Matrik)

Dua matrik $\underset{m\times k}{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$ dan $\underset{m\times k}{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$ dengan dimensi sama, maka :

$\underline{A} - \underline{B} = \underset{m\times k}{\underline{C}}$ atau $\underset{m\times k}{\underline{C}} = \underline{A} - \underline{B}$, dengan $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$i = 1,2, \ldots, m$

$j = 1,2, \ldots, k$

Definisi 10

Matrik $\underset{m \times k}{\underline{A}}$ dengan elemen-elemen a_{ij}, $i = 1,2, \ldots, m$

$j = 1,2, \ldots, k$

Transpose dari matrik $\underline{A}$ diberi notasi $\underline{A}'$ adalah matrik berdimensi $k \times m$ dengan elemen-elemennya a_{ji}, $j = 1,2, \ldots, k$

$i = 1,2, \ldots, m$

Jadi $\underline{A}'$ didapat dari $\underline{A}$ dengan menukar baris dan kolom.

Definisi 11

Matrik sembarang $\underline{A}$ dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom disebut matrik bujur sangkar.

Definisi 12

Matrik $\underline{A}$ adalah matrik bujur sangkar dengan dimensi $k \times k$. Matrik $\underline{A}$ disebut matrik simetris bila $\underline{A} = \underline{A}'$, yaitu $\underline{A}$ simetris bila $a_{ij} = a_{ji}$, $i = j = 1,2, \ldots, k$

Definisi 13

Matrik diagonal adalah matrik bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol.

contoh 3 :

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 14

Matrik Identitas adalah matrik diagonal yang elemen-elemen diagoanlnya adalah 1.

Contoh 4 :

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 15

Matrik skalar adalah matrik diagonal dengan semua elemen diagoanalnya sama, misal k yang tidak sama dengan 1.

Contoh 5 :

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 16 (Perkalian Matrik)

Hasil kali matrik $\underline{A}$ dan $\underline{B}$ dengan $\underset{m \times n}{\underline{A}} = \{a_{ij}\}$ dan $\underset{n \times k}{\underline{B}} = \{b_{ij}\}$ adalah matrik $\underset{m \times k}{\underline{C}} = \{c_{ij}\}$ dengan : $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, k$

Definisi 17

Harga suatu determinant derajat dua ditentukan dengan aturan sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definisi 18

Minor M_{ij} dari elemen a_{ij} adalah determinant dari A ditulis $\left| A \right| = \left| a_{ij} \right|$ dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Definisi 19

Kofaktor $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ adalah merupakan skalar.

Definisi 20

Harga suatu determinant sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya yang bersesuaian dari masing-masing elemennya. Dengan perkataan lain ;

$$\left| A \right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{dengan i sembarang}$$

disebut uraian baris ke-i

$$\left| A \right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{dengan j sembarang}$$

disebut uraian baris ke-j

Contoh 6 :

Hitung determinant ($\underline{A}$) dengan $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Jika diuraikan dengan menurut baris ke-1 didapat :

$$\left| A \right| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13}$$

$$= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{11} M_{13}$$

dengan $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

Sehingga didapat :

$$|\underline{A}| = 1\times1 - 2\times10 + 3\times7 = 1 - 20 + 21 = 2$$

Definisi 21

Rank baris suatu matrik adalah banyaknya maksimum baris yang Independent linier. Rank kolom suatu matrik adalah banyaknya maksimum kolom yang Independent linier. Rank baris =rank kolom.

Definisi 22

Suatu matrik bujur sangkar $\underline{A}$ disebut singular $|\underline{A}| = 0$, jika $|\underline{A}| \neq 0$ maka disebut matrik non singular.

Definisi 23

Matrik $\underline{b}$ sedemikian hingga $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = I$ disebut invers dari $\underline{A}$ diberi notasi $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$.

Definisi 24

Jika $\underline{A}$ adalah matrik simetris bertipe k×k, yang bersifat bahwa $\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X} > 0$ untuk setiap vektor $\underline{X}$ bertipe k×l yang bukan vektor nol maka $\underline{A}$ disebut Matrik Definit

Positip.

Definisi 25

Suatu matrik bujur sangkar $\underline{A}$ disebut Orthogonal bila hasil kali matrik $\underline{A}$ dan Transposenya adalah matrik I, yaitu : $\underline{A}\ \underline{A}' = I$.

Definisi 26

$\underline{A} = \{a_{ij}\}$ matrik bujur sangkar bertipe k×k. Trace dari matrik $\underline{A}$ ditulis tr($\underline{A}$) adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal, yaitu : $tr(\underline{A}) = \sum_{i=j=1}^{k} a_{ij}$.

2.3 Akar Dan Vektor Kerateristik

Definisi 27

$\underline{A}$ suatu matrik bujur sangkar, λ skalar yang memenuhi persamaan $\underline{A}\ \underline{V} = \lambda\ \underline{V}$, untuk suatu vektor kolom $\underline{V} \neq 0$, maka dikatakan λ adalah eigen value dari $\underline{A}$ dan $\underline{V}$ yang memenuhi persamaan $\underline{A}\ \underline{V} = \lambda\ \underline{V}$ itu disebut eigen vektor yang bersangkutan dengan λ.

Theorema 1

Misal $\underline{A}$ adalah matrik simetris k×k, $\underline{X}$ adalah vektor k×1, maka berlaku :

a. $\underline{X}'\underline{A}\ \underline{X} = tr(\underline{X}'\underline{A}\ \underline{X}) = tr(\underline{A}\ \underline{X}'\underline{X})$

b. $tr(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ dimana λ_i adalah eigen value matrik $\underline{A}$.

Bukti :

a. $\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X}$ adalah skalar, maka $\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X} = tr(\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X})$, sedang $tr(\underline{B}\,\underline{C}) = tr(\underline{C}\,\underline{B})$ dengan $\underline{B}$ bertipe m×k dan $\underline{C}$ bertipe k×m. Jadi $tr(\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X}) = tr(\underset{1\times k}{\underline{X}'}\ \underset{k\times 1}{\underline{A}\,\underline{X}}) = tr(\underline{A}\,\underline{X}\,\underline{X}')$

b. Karena λ_i eigen value dari $\underline{A}$ berlaku :

$$\underline{A}\,\underline{V} = \lambda\,\underline{V}$$

$$\underline{A}\,\underline{V}\,\underline{V}^{-1} = \lambda\,\underline{V}\,\underline{V}^{-1}$$

$$\underline{A} = \lambda \underset{k\times k}{I}$$

$$tr(\underline{A}) = tr(\lambda\, I) = tr(\underset{k\times k}{\underline{\lambda}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + \lambda_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

Theorema 2

Jika $\underline{A}$ matrik definit positip maka setiap eigen value dari $\underline{A} > 0$.

Bukti : Misal $\underline{X}$ adalah eigen vektor dari matrik $\underline{A}$, maka :

$$\underline{A}\,\underline{X} = \lambda\,\underline{X}$$

$$\underline{A}\,\underline{X}\,\underline{X}^{-1} = \lambda\,\underline{X}\,\underline{X}^{-1}$$

$$\underline{A} = \lambda$$

$$\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X} = \lambda\,\underline{X}'\,\underline{X}$$

$\underline{A}$ definit positip maka dari definisi 21 $\underline{X}'\underline{A}\,\underline{X} > 0$, dan karena $\underline{X}'\underline{X} > 0$ maka haruslah $\lambda > 0$.

Theorema 3

Jika $\underset{p\times p}{\underline{A}}$ mempunyai eigen value $\lambda_1, \lambda_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, \lambda_p$ maka $\left|\,\underline{A}\,\right| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$

Bukti : $\underline{A}\,\underline{P} = \lambda\,\underline{P}$

$$\underline{A}\,\underline{P}\,\underline{P}^{-1} = \lambda\,\underline{P}\,\underline{P}^{-1} = \lambda\,I$$

$$\left|\underline{A}\right| = \left|\lambda\,I\right| = \left|\underline{\lambda}\right| = \prod_{i=1}^{p}\lambda_i$$

2.4 Penggunaan Operator Penjumlahan dan Perkalian

Oleh karena banyaknya konsep-konsep dasar dalam analisis statisika untuk penelitian percobaan menggunakan penjumlahan angka-angka, maka akan lebih baik apabila dikemukakan tinjauan singkat tentang penggunaan operator penjumlahan. Biasanya notasi penjumlahan menggunakan huruf kapital Σ (baca sigma) dari abjad Yunani untuk menyatakan penjumlahan itu. Misal n buah data X_i, dimana X menunjukan variabel acak, sehingga ada $x_1, x_2, \ldots, x_n$; maka $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ dapat dinyatakan secara singkat sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Beberapa sifat penting dari operator penjumlahan Σ adalah:

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, dengana k adalah konstanta
2. $\sum_{i=1}^{n} kX_i = k\sum_{i=1}^{n} X_i$, dengan k adalah konstanta
3. $\sum_{i=1}^{n} (a+bX_i) = na + b\sum_{i=1}^{n} X_i$, dengan a dan b adalah konstanta
4. $\sum_{i=1}^{n} (X_i+Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Operator penjumlahan dapat juga diperluas untuk penjumlahan berganda, operator penjumlahan ganda adalah $\sum\sum$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{im})$$

$$= (X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1m}) + (X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2m}) + \ldots + (X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nm})$$

Beberapa sifat penting dari operator $\sum\sum$ adalah :

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ji}$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_i Y_j = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{m} Y_j$ salah
3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (X_{ij}+Y_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Y_{ij}$

Operator Perkalian menggunakan notasi $\prod$ (baca:phi) yang didefinisikan sebagai :

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

2.5 Ekspektasi atau Nilai Harapan

Definisi 28

Jika variabel acak X merupakan variabel diskrit, maka nilai harapan atau Ekspektasi didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_{x_i} x_i \; P(X=x_i)$$

dengan $\sum_{x_i}$ menunjukan penjumlahan dari semua nilai-nilai X dan $P(x_i)$ merupakan fungsi Probabilitas dari x_i

Definisi 29

Jika variabel acak X merupakan variabel kontinu, maka nilai harapan $\mathbb{E}(X)$, didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \int_{-\sim}^{\sim} x_i\ f(x_i)\ dx_i$$

dengan $f(x_i)$ fungsi kepadatan.

Nilai harapan mempunyai beberapa sifat penting, antara lain :

1. Nilai harapan dari suatu konstanta a adalah konstanta itu sendiri. Sehingga jika b adalah konstanta maka $\mathbb{E}(b) = b$
2. Jika a dan b adalah konstanta, maka :

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$$

   demikian pula

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X) \text{ serta}$$

$$\mathbb{E}(aX)^2 = a^2\ \mathbb{E}(X^2)$$

3. Jika X dan Y adalah variabel acak , maka :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

4. Jika X dan Y adalah variabel acak yang bebas, maka :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Definisi 30

$$\mathbb{E}\{g(x)\} = \sum_{x} g(x_i)P(X=x_i) \qquad \text{jika X adalah diskrit}$$

$$\mathbb{E}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_i)P(X=x_i)\,dx_i \qquad \text{jika X adalah kontinu}$$

2.6 Varian dan Kovarian

Definisi 31

Jika X variabel acak dan $\mathbb{E}(X) = \mu$ maka varian (X) adalah sebagai berikut :

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_x^2 = \mathbb{E}[X-\mathbb{E}(X)]^2$$
$$= \sigma_x^2 = \mathbb{E}(X-\mu)^2$$

Akar pangkat dua dari σ_x^2 , yaitu σ_x didefinisikan sebagai simpangan baku.

Definisi 32

$$\text{Rata-rata} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Definisi 33

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Dalam pendekatan teori survey sampel malalui analisa varian digunakan notasi s^2, dengan ;

Definisi 34

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Selanjutnya jika X dan Y adalah dua variabel acak dengan masing-masing mempunyai nilai harapan μ_X dan μ_Y, maka kovarian antara dua variabel itu adalah sebagai berikut :

Definisi 35

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$
$$= \mathbb{E}(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Beberapa sifat penting dari varian dan kovarian antara lain :

1. $\mathbb{E}(X - \mu)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$
2. Varian dari suatu konstanta adalah nol, sehingga jika b konstanta maka $\mathrm{Var}(b) = \sigma_b^2 = 0$
3. Jika a dan b adalah konstanta, maka :
   $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\ \mathrm{Var}(X)$
   $\mathrm{Var}(aX) = a^2\ \mathrm{Var}(X)$
   $\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X)$
4. Jika X dan Y adalah variabel acak, serta a, b, c dan d adalah kostanta maka :
   $\mathrm{Cov}(a+bX,\ c+dY) = bd\ \mathrm{Cov}(X,Y)$
   $\mathrm{Cov}(bX,\ dY) = bd\ \mathrm{Cov}(X,Y)$
   $\mathrm{Cov}(a+X,\ c+Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)$
5. Jika X dan Y adalah variabel acak yang bebas, maka kovarian mareka adalah nol, hal ini dapat dlihat sebagai berikut :
   $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mu_X \mu_Y$$
   $$= \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y = 0$$

Theorema 4

Jika a dan b kostanta maka :

$$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\ \mathrm{Var}(X) + b^2\ \mathrm{Var}(Y) + 2ab\ \mathrm{Cov}(X,Y)$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
Var(aX + bY) &= \mathbb{E}[aX + bY - \mathbb{E}(aX + bY)]^2 \\
&= \mathbb{E}[aX + bY - a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)]^2 \\
&= \mathbb{E}[a(X - \mathbb{E}(X)) + b(Y - \mathbb{E}(Y)]^2 \\
&= \mathbb{E}[a^2(X - \mathbb{E}(X)^2 + 2ab(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y) + \\
&\quad b^2(Y - \mathbb{E}(Y))^2] \\
&= a^2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)^2 + 2ab\,\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y) + \\
&\quad b^2\,\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= a^2\,Var(X) + 2ab\,Cov(X,Y) + b^2 Var(Y) \\
&= a^2\,Var(X) + b^2\,Var(Y) + 2ab\,Cov(X,Y)
\end{aligned}$$

2.7 Koefisien Korelasi

Terdapat hubungan antara varian dan kovarian dengan koefisien korelasi populasi, yang dinotasikan dengan ρ (baca;rho), adalah sebagai berikut :

Definisi 36

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\ Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\ \sigma_y}$$

Theorema 5

Koefisien korelasi ρ_{xy} berlaku : $|\ \rho\ | \leq 1$

Bukti :

Misal $X^* = \dfrac{X-\mu_x}{\sigma_x}$ dan $Y^* = \dfrac{Y-\mu_y}{\sigma_y}$

$$Var(X^*) = Var\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} - \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right]\right]^2 = \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} - \left[\frac{\mathbb{E}(X)-\mu_x}{\sigma_x}\right]\right]^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{\mathbb{E}(X)-\mu_x}{\sigma_x}\right]^2 = \mathbb{E}\left[\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_x}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2}\,\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2}\,\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\sigma_x^2}\,\sigma_x^2 = 1$$

$$\mathrm{Var}(Y^*) = \mathrm{Var}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} - \mathbb{E}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right]\right]^2 = \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_y}{\sigma_y} - \left[\frac{\mathbb{E}(Y)-\mu_y}{\sigma_y}\right]\right]^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{\mathbb{E}(Y)-\mu_y}{\sigma_y}\right]^2 = \mathbb{E}\left[\frac{Y-\mathbb{E}(Y)}{\sigma_y}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_y^2}\,\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y)]^2$$

$$= \frac{1}{\sigma_y^2}\,\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\sigma_y^2}\,\sigma_y^2 = 1$$

Menurut theorema 5

$$\mathrm{Var}(X^*+Y^*) = \mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) + 2\,\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)$$

$$= \mathrm{Var}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right] + \mathrm{Var}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right] + 2\,\mathrm{Cov}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}, \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right]$$

$$= 1 + 1 + 2\,\mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} - \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right]\right]\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} - \mathbb{E}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right]\right]$$

$$= 2 + 2\,\mathbb{E}\left\{\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\,\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\,\mathbb{E}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right]\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} + \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right]\mathbb{E}\left[\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right]\right\}$$

$$= 2 + 2\,\mathbb{E}\left\{\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\,\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\left[\frac{\mathbb{E}(Y)-\mu_y}{\sigma_y}\right] - \left[\frac{\mathbb{E}(X)-\mu_x}{\sigma_x}\right]\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} + \left[\frac{\mathbb{E}(X)-\mu_x}{\sigma_x}\right]\left[\frac{\mathbb{E}(Y)-\mu_y}{\sigma_y}\right]\right\}$$

karena $\mathbb{E}(X)-\mu_x = 0$ dan $\mathbb{E}(Y) - \mu_y = 0$ maka :

$$\mathrm{Var}(X^* + Y^*) = 2 + 2\left\{\frac{\mathbb{E}(X-\mu_x)}{\sigma_x}\frac{(Y-\mu_y)}{\sigma_y}\right\}$$

$$= 2 + 2\,\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$= 2 + 2\,\rho_{xy} = 2\,(1+\rho_{xy})$$

Karena $\mathrm{Var}(X^* + Y^*) \geq 0$, maka :

$2(1 + \rho_{xy}) \geq 0$ sehingga $1 + \rho_{xy} \geq 0$ dan didapat :

$\rho_{xy} \geq -1$

Selanjutnya dengan cara yang sama didapat :

$\mathrm{Var}(X^* - Y^*) = 2 - 2\,\rho_{xy}$, karena $\mathrm{Var}(X^*-Y^*) \geq 0$, maka didapat : $2 - 2\,\rho_{xy} = 2(1 - \rho_{xy}) \geq 0$ sehingga $1 - \rho_{xy} \geq 0$ dan didapat $\rho_{xy} \leq 1$

Dari hasil=hasil di atas didapat $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ atau $|\rho_{xy}| \leq 1$

Dengan demikian harga dari ρ adalah $-1 \leq \rho \leq 1$. ρ mengukur hubungan linier antara dua variabel, apabila $\rho = -1$ menunjukan hubungan negatip sempurna, sedangkan apabila ρ = 1 menunjukan hubungan positip sempurna.

2.8 Distribusi Normal

Suatu variabel acak X yang kontinu dikatakan berdistribusi normal. jika memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma(2\Pi)^{1/2}} e^{-1/2 \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad (1)$$

dengan μ dan σ^2 dikenal sebagai parameter rata-rata dan varian distribusi normal.

2.9 Vektor Random dan Matrik Random

Vektor Random adalah vektor yang elemen-elemennya variabel random, sedangkan matrik random adalah matrik yang elemen-elemennya variabel random. Nilai harapan matrik random adalah nilai harapan dari setiap elemennya. Misal $\underline{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matrik p×p, nilai harapan dari $\underline{X}$ ditulis $\mathbb{E}(\underline{X})$ adalah matrik p×n, yaitu :

$$\mathbb{E}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_{11}) & \mathbb{E}(X_{12}) & \cdots & \mathbb{E}(X_{1n}) \\ \mathbb{E}(X_{21}) & \mathbb{E}(X_{22}) & \cdots & \mathbb{E}(X_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{E}(X_{p1}) & \mathbb{E}(X_{p2}) & \cdots & \mathbb{E}(X_{pn}) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Definisi 37

$$\mathbb{E}(X_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{ij}\, f_{ij}(x_{ij})\, dx_{ij}\ , \text{ bila } X_{ij} \text{ variabel random}$$

kontinu dengan fungsi kepadatan $f_{ij}(x_{ij})$.

Definisi 38

$\mathbb{E}(X_{ij}) = \sum_{x_{ij}} X_{ij} \; P_{ij}(x_{ij})$, bila X_{ij} variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas $P_{ij}(x_{ij})$.

Definisi 39

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j) \; f_{ij}(X_i,X_j) \; dX_i \; dX_j$$

Bila X_i, X_j variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan $f_{ij}(X_i,X_j)$.

Definisi 40

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$$
$$= \sum_{X_i}\sum_{X_j}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j) \; P_{ij}(X_i,X_j)$$

Bila X_i, X_j variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas $P_{ij}(X_i,X_j)$.

Theorema 6

$\sigma_{ij} = \sigma_i^2$ bila $i = j$ dan $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ dengan $i \neq j$

Bukti :

Menurut Definisi 39

$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$ karena $i = j$ maka

$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i-\mu_i)(X_i-\mu_i)$

$$= \mathbb{E}(X_i-\mu_i)^2$$

menurut definisi 31

$$\mathbb{E}(X_i-\mu_i)^2 = \sigma_i^2$$

dan $\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j) = \mathbb{E}(X_j-\mu_j)(X_i-\mu_i) = \sigma_{ji}$

Theorema 6 Terbukti

Definisi 41

$$\overline{X}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{pi}$$

Untuk mempermudah perhitungan biasanya digunakan rumus di bawah ini :

Definisi 42

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_{pi}X_{qj}) - \mu_p\mu_q$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{pi} - \overline{X}_p)(X_{qj} - \overline{X}_q)$$

Bila digunakan pembagi (n-1) sebagai pengganti n variannya merupakan varian sampel penduga tak bias untuk varian populasi, yaitu ;

Definisi 43

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} (X_{pi}-\overline{X}_p)(X_{qj}-\overline{X}_q)$$

Theorema 7

$$S_{ij} = \frac{1}{n-1}\,\frac{n\sum\limits_{i,j=1}^{n} X_{pi}X_{qj} - \sum\limits_{i=1}^{n} X_{pi}\sum\limits_{j=1}^{n} X_{qj}}{n}$$

Bukti :

Menurut definisi 43

$$S_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{i,j=1}^{n}(X_{pi}-\overline{X}_p)(X_{qj}-\overline{X}_q)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i,j=1}^{n}(X_{pi}X_{qj} - X_{pi}\,\overline{X}_q - X_{qj}\,\overline{X}_p + \overline{X}_p\,\overline{X}_q)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i,j=1}^{n}\left[X_{pi}X_{qj} - X_{pi}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{qj} - X_{qj}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{pi} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_{pi}\sum_{j=1}^{n} X_{qj}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{pi}X_{qj} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{pi}\sum_{j=1}^{n} X_{qj} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{qj}\sum_{i=1}^{n} X_{pi} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{pi}\sum_{j=1}^{n} X_{qj}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{pi}X_{qj} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{pi}\sum_{j=1}^{n} X_{qj} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{pi}\sum_{j=1}^{n} X_{qj}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{pi}\,X_{qj} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{pi}\sum_{j=1}^{n} X_{qj}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\,\frac{n\sum\limits_{i,j=1}^{n} X_{pi}\,X_{qj} - \sum\limits_{i=1}^{n} X_{pi}\sum\limits_{j=1}^{n} X_{qj}}{n}$$

$$S_{ij} = \frac{n\sum\limits_{i,j=1}^{n} X_{pi}\,X_{qj} - \sum\limits_{i=1}^{n} X_{pi}\sum\limits_{j=1}^{n} X_{qj}}{n(n-1)}$$

Nilai Harapan dari vektor random $\underset{p\times 1}{\underline{X}}$ dapat ditulis :

$$\mathbb{E}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbb{E}(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_p \end{bmatrix} = \underline{\mu} \qquad (3)$$

Varian dari vektor random $\underset{p\times 1}{\underline{X}}$ dapat ditulis sebagai matrik ,yaitu :

Definisi 44

$$\mathrm{Var}(\underline{X}) = \mathbb{E}\{(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'\}$$

$$= \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 & X_2 - \mu_2 & \cdot & \cdot & \cdot & X_p - \mu_p \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mathbb{E}\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1) & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & (X_p-\mu_p)(X_p-\mu_p) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1) & \mathbb{E}(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \mathbb{E}(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ \mathbb{E}(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & \mathbb{E}(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \mathbb{E}(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{E}(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & \mathbb{E}(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdot\ \cdot\ \cdot & \mathbb{E}(X_p-\mu_p)(X_p-\mu_p) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} = \underline{\Sigma}$$

karena $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ maka :

$$\mathrm{Var}(\underline{X}) = \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

yang merupakan matrik simetris.

$\underline{\mu}$ dan $\underline{\Sigma}$ adalah mean dan varian kovarian populasi.

Dan karena $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$, maka persamaan (4) dapat ditulis menjadi :

$$\underline{\Sigma} = \mathrm{Var}(X_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_p) \\ \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \mathrm{Var}(X_2) & & \mathrm{Cov}(X_2,X_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_1,X_p) & \mathrm{Cov}(X_2,X_p) & \cdots & \mathrm{Var}(X_p) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\text{Jika } \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} \qquad (6)$$

masing- masing adalah vektor random, maka matrik

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(X_1,Y_1) & \mathrm{Cov}(X_1,Y_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,Y_q) \\ \mathrm{Cov}(X_2,Y_1) & \mathrm{Cov}(X_2,Y_2) & & \mathrm{Cov}(X_2,Y_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_p,Y_1) & \mathrm{Cov}(X_p,Y_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_p,Y_q) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

dimana X_i adalah komponen ke-i dari $\underline{X}$ dan Y_j adalah komponen ke-j dari $\underline{Y}$, disebut matrik kovarian dari $\underline{X}$ dan $\underline{Y}$ dan dinyatakan dengan Cov($\underline{X}$,$\underline{Y}$).

Theorema 8

Jika $\underline{A}$ suatu matrik konstanta maka berlaku :

$\text{Var}(\underline{A}\,\underline{X}) = \underline{A}\,\underline{\Sigma}\,\underline{A}'$

Bukti :

Menurut Definisi 44

$$\begin{aligned}\text{Var}(\underline{A}\,\underline{X}) &= \mathbb{E}\left[[\underline{A}\,\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{A}\,\underline{X})][\underline{A}\,\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{A}\,\underline{X})]'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[[\underline{A}\,(\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})][\underline{A}\,(\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\underline{A}\,[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})][\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]'\underline{A}'\right] \\ &= \underline{A}\,\mathbb{E}\left[[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})][\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]'\right]\underline{A}' \\ &= \underline{A}\,\underline{\Sigma}\,\underline{A}'\end{aligned}$$

Theorema 9

Jika $\underline{a}'\underline{X} = a_1X_1 + a_2X_2 + \ . \ . \ . + a_pX_p$ maka berlaku :

$\text{Var}(\underline{a}'\underline{X}) = \underline{a}'\underline{\Sigma}\,\underline{a}$.

Bukti :

Menurut Definisi 44

$$\begin{aligned}\text{Var}(\underline{a}'\underline{X}) &= \mathbb{E}\left[[\underline{a}'\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{a}'\underline{X})]\ [\underline{a}'\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{a}'\underline{X})]'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\underline{a}'[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]\ [\underline{a}'[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\underline{a}'[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]\ [\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]'\underline{a}\right] \\ &= \underline{a}'\,\mathbb{E}\left[[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]\ [\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]'\right]\underline{a}\end{aligned}$$

$$= \underline{a}' \; \underline{\Sigma} \; \underline{a}$$

Theorema 10

Jika $\underline{A}$ dan $\underline{B}$ matrik konstanta berlaku :

$$\mathrm{Cov}(\underline{A}\,\underline{X},\ \underline{B}\,\underline{Y}) = \underline{A}\ \mathrm{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\ \underline{B}'$$

Bukti :

Menurut Definisi 44

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\underline{AX},\underline{BY}) &= \mathbb{E}\left[[\underline{A}\,\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{A}\,\underline{X})]\ [\underline{B}\,\underline{Y} - \mathbb{E}(\underline{B}\,\underline{Y})]'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\underline{A}\,[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]\ [\underline{B}\,(\underline{Y} - \mathbb{E}(\underline{Y}))]'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\underline{A}\,[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]\,[(\underline{Y} - \mathbb{E}(\underline{Y})]'\,\underline{B}'\right] \\ &= \underline{A}\ \mathbb{E}\left[[\underline{X} - \mathbb{E}(\underline{X})]\ [(\underline{Y} - \mathbb{E}(\underline{Y})]'\right]\underline{B}' \\ &= \underline{A}\ \mathrm{Cov}(\underline{X},\underline{Y})\ \underline{B}'\end{aligned}$$

Ukuran keeratan hubungan antara variabel random X_i dan X_j adalah koefisien korelasi ρ_{ij} dengan :

Definisi 45

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathrm{Cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}}$$

Maka matrik $P = [\rho_{ij}]$ $\qquad j = i = 1,2,\ .\ .\ .,p$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{12}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2p} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \cdots & \rho_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \rho_{p3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

disebut matrik korelasi P dari $\underline{X}$.

2.10 Distribusi Normal Multivariat

Sebaiknya diingat dahulu bahwa distribusi normal univariat dengan mean μ dan varian σ^2 mempunyai densitas probabilitas :

$$f(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{1/2}\,\sigma}\, e^{-1/2\left[\frac{(X-\mu)}{\sigma}\right]^2}$$

Fungsi densitas dengan mean μ dan varian σ^2 ditulis dengan notasi $N(\mu,\sigma^2)$. Notasi akan diperluas dengan untuk kasus multivariat, yaitu :

Kuantitas $\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^2 = (X-\mu)\ \sigma^{-2}\ (X-\mu)$ diperluas untuk vektor $\underline{X}$ dengan dimensi p, menjadi $(\underline{X} - \underline{\mu})\ \Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$

di mana : $\underline{\mu} \quad = \mathbb{E}(\underline{X})$

$\Sigma^{-1} = \text{Cov}(\underline{X})$, Σ diasumsikan definit positip.

Dengan demikian densitas multivariat normal p dimensi untuk vektor random $\underline{X}' = \left[X_1\ X_2\ .\ .\ .\ X_p\right]$ mempunyai bentuk:

$$f(x) = \frac{1}{(2\Pi)\,|\Sigma|^{1/2}}\, e^{-1/2\ (\underline{X} - \mu)'\underline{\Sigma}^{-1}(\underline{X} - \mu)}$$

diberi notasi $N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$.

2.11 Turunan Parsiil

Definisi 46

Jika Z = f(x,y) adalah fungsi dari variabel bebas X dan Y maka :

Turunan Parsiil pertama dari Z = f(x,y) ke x dengan y konstan adalah :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Turunan Parsiil pertama dari Z = f(x,y) ke y dengan x konstan adalah :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Turunan Parsiil $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari z = f(x,y) dapat diturunkan parsiil lagi ke x dan y, menghasilkan turunan parsiil kedua sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] \text{ dan } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

Definisi 47

Apabila $z = f(x,y)$ mempunyai turunan parsiil pertama dan kedua dalam daerah tertentu yang memuat titik (x_o, y_o, z_o) dengan $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Maka, jika

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] \cdot \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 > 0 \text{ di } P_o,\ Z = f(x,y) \text{ mempunyai:}$$

minimum relatif di P_o jika $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$

maksimum relatif di P_o jika $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$

2.12 Bentuk Multiple Langrange

Misalkan ingin didapatkan nilai-nilai dari sebuah fungsi $f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ dari m variabel $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ dengan kendala θ_i misalnya $g_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = 0$ dengan $j = 1, 2, \ldots q$.

Bentuklah fungsi :

$$F = f - \sum_{i=1}^{q} \lambda_j\, g_j \tag{9}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tidak diketahui.

Diferensialkan parsiil persamaan (10) terhadap θ_i dan hasilnya disamakan dengan nol. Maka diperoleh m persamaan:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f}{\partial \theta_i} - \sum_{i=1}^{q} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \theta_i} = 0 \tag{10}$$

m persamaan ini dengan penambahan q persamaan $g_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, q$ menghasilkan $(q+m)$ persamaan yang dapat diselesaikan untuk $q+m$ parameter yang tidak diketahui $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$. Kuantitas λ_j disebut Pengali Langrange.

2.13 Taksiran Kuadrat Terkecil

Model persamaan Regresi Linier Multivariat secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$Y_{ij} = \beta_{1j} + \beta_{2j}X_{i1} + \ldots + \beta_{qj}X_{iq} + \epsilon_{ij} \qquad (11)$$

dengan :

Y_{ij} adalah variabel tak bebas

$X_1, X_2, \ldots, X_q$ adalah variabel bebas

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ adalah parameter yang akan ditaksir

ϵ_{ij} adalah kesalahan (error)

Persamaan (11) dapat pula dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\underset{n\times p}{\underline{Y}} = \underset{n\times q}{\underline{X}}\ \underset{q\times p}{\underline{\beta}} + \underset{n\times p}{\underline{\epsilon}} \qquad (12)$$

dengan :

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{np} \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1q} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nq} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \cdots & \beta_{qp} \end{bmatrix}, \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \cdots & \epsilon_{1p} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \cdots & \epsilon_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{n1} & \epsilon_{n2} & \cdots & \epsilon_{np} \end{bmatrix}$$

Matrik parameter $\underline{\beta}$ yang belum diketahui dapat ditaksir dari persamaan (11) atau persamaan (12).

Namun untuk mempermudah pembahasan selanjutnya digunakan persamaan (12).

$$\underline{Y} = \underline{X}\ \underline{\beta} + \underline{\epsilon}$$

Misalkan $\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} & \cdots & \hat{\beta}_{1p} \\ \hat{\beta}_{21} & \hat{\beta}_{22} & \cdots & \hat{\beta}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\beta}_{q1} & \hat{\beta}_{q2} & \cdots & \hat{\beta}_{qp} \end{bmatrix}$ menunjukkan matrik dari

taksiran $\underline{\beta}$, maka persamaan (12) dapat ditulis :

$$\underline{Y} = \underline{X}\,\underline{\hat{\beta}} + \underline{e} \qquad (13)$$

dengan $\underline{e}$ adalah matrik dari n residual $(\underline{Y} - \underline{X\hat{\beta}})$.

Dari persamaan (13) jumlah kuadrat residual dalah :

$$\sum_{i=1}^{n} e_{ij}^{2} = e'e$$

$$= (\underline{Y} - \underline{X\hat{\beta}})'(\underline{Y} - \underline{X\hat{\beta}})$$

$$= \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} - \underline{Y}'\underline{X}\,\underline{\hat{\beta}} + \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{X}\,\underline{\hat{\beta}}$$

$$= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} + \underline{\hat{\beta}}'\underline{X}'\underline{X}\,\underline{\hat{\beta}} \qquad (14)$$

Taksiran kuadrat terkecil $\hat{\beta}$ diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat residual, dimana harus memenuhi :

$$\frac{\partial(e'e)}{\partial\hat{\beta}} = -2\underline{X}'\underline{Y} + 2\,\underline{X}'\underline{X}\,\underline{\hat{\beta}} = 0$$

sehingga diperoleh :

$$\underline{X}'\underline{X}\,\underline{\hat{\beta}} = \underline{X}'\underline{Y}$$

$$\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y} \qquad (15)$$