B A B III

MODEL REGRESI LINIER DENGAN METODE KWADRAT TERKECIL BERBOBOT

Metode kwadrat terkecil berbobot dipergunakan untuk menyelesaikan model regresi linier yang tidak memenuhi asumsi bahwa error memiliki varian konstan.

<u>Definisi 3.1 :</u>

Metode kwadrat terkecil berbobot adalah penyelesaian persamaan regresi dengan jalan mengalikan suatu bobot w_i dengan residu.

<u>Keterangan :</u>

w_i adalah bobot yang bersesuaian dengan kasus yang akan diselesaikan.

Ada dua macam metode dalam pengambilan bobot yaitu dengan metode sederhana dan metode *robust*.

3.1 *REGRESI LINIER*

Cara sederhana untuk mengetahui apakah error memiliki varian konstan, adalah dengan menggambarkan plot antara residu melawan $\hat{y}_i$ seperti yang telah dibahas pada Bab II. Apabila ternyata error memiliki varian tidak konstan maka untuk mengestimasi β_o dan β_1 dipergunakan metode kwadrat terkecil berbobot. Sesuai dengan Definisi 3.1 maka model regresi linier akan memiliki fungsi kwadrat terkecil berbobot :

$$S(\beta_o,\beta_1) = S\, w_i\, (e_i)^2 \qquad \text{..........(3.1)}$$
$$= \sum^n w_i \; (y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1\, x_i)^2$$

dengan w_i adalah bobotnya.

Untuk meminimalkan persamaan (3.1) maka dicari derivatif pertama $S(\beta_o,\beta_1)$ terhadap β_o dan β_1.

$$\frac{\delta S}{\delta \beta_o} = -2\sum_{i=1}^{n} w_i\, (y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1\, x_i) = 0$$
$$\text{..(3.2)}$$
$$\frac{\delta S}{\delta \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 x_i)\, x_i = 0$$

Selanjutnya diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \; (y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1\, x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, y_i - \hat{\beta}_o \sum_{i=1}^{n} w_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i = 0 \qquad \text{dan}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1\, x_i)\, x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i y_i x_i - \hat{\beta}_o \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 = 0$$

Sehingga persamaan normalnya adalah :

$$\hat{\beta}_o \sum_{i=1}^{n} w_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \qquad \text{...(3.3a)}$$

$$\hat{\beta}_o \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i x_i \qquad \text{...(3.3b)}$$

Penyelesaian persamaan (3.3a) dan (3.3b) akan menghasilkan harga $\hat{\beta}_o$ dan $\hat{\beta}_1$ untuk kwadrat terkecil berbobot. Dari persamaan (3.3a) diperoleh :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \quad \ldots\ldots(3.4)$$

Selanjutnya persamaan (3.4) disubstitusikan ke persamaan (3.3b) :

$$\frac{\Sigma\, w_i y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma\, w_i x_i}{\Sigma\, w_i} (\Sigma\, w_i x_i) + \hat{\beta}_1\, \Sigma\, w_i x_i^2 = \Sigma\, w_i x_i y_i$$

Ruas kanan dan kiri dikalikan dengan Σw_i

$$(\Sigma w_i y_i - \hat{\beta}_1\, \Sigma w_i x_i)\,(\Sigma w_i x_i) + \hat{\beta}_1 \Sigma w_i\ \Sigma w_i x_i^2 = \Sigma w_i\ \Sigma w_i y_i x_i$$

$$(\Sigma w_i y_i)(\Sigma w_i x_i) - \hat{\beta}_1 (\Sigma w_i x_i)^2 + \hat{\beta}_1 \Sigma w_i\ \Sigma w_i x_i^2 = \Sigma w_i\ \Sigma w_i y_i x_i$$

$$\hat{\beta}_1 (\Sigma w_i \Sigma w_i x_i^2 - (\Sigma w_i x_i)^2) = \Sigma w_i \Sigma w_i y_i x_i - \Sigma w_i y_i\ \Sigma w_i x_i$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma w_i\ \ \Sigma w_i y_i x_i - \Sigma w_i y_i\ \Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i \Sigma w_i x_i^2 - (\Sigma w_i x_i)^2} \quad \text{atau}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma w_i y_i x_i - \dfrac{\Sigma w_i y_i\ \ \Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}}{\Sigma w_i\ x_i^2 - \dfrac{(\Sigma w_i x_i)^2}{\Sigma w_i}} \quad \ldots\ldots(3.5)$$

Persamaan (3.4) dan (3.5) merupakan harga estimasi β_0 dan β_1 dengan metode kwadrat terkecil berbobot. Sesuai dengan persamaan (3.4) dan (3.5), sebelum menghitung harga $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ maka terlebih dahulu harus diketahui harga bobotnya (w_i).

Definisi 3.2 :

Pada metode kwadrat terkecil berbobot, pemilihan harga w_i adalah merupakan perbandingan terbalik terhadap varian y_i.

Contoh 3.1 :

Jika varian y_i adalah $Var(y_i) = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 / n_i$ dimana σ^2 adalah varian dari hasil perhitungan kwadrat terkecil, maka akan dipilih sebagai bobotnya adalah $w_i = \dfrac{1}{1/n_i} = n_i$.

Contoh 3.2 :

Jika varian y_i adalah fungsi dari regresor, misalnya $Var(y)_i = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i$ maka akan dipilih sebagai bobot adalah $w_i = \dfrac{1}{x_i}$

Pada beberapa masalah kadang-kadang bobotnya tidak dapat diketahui secara langsung. Pada keadaan seperti ini bobot diestimasi berdasarkan hasil perhitungan dengan metode kwadrat terkecil. Berikut ini akan diperlihatkan suatu permasalahan dalam melakukan pendekatan untuk mngestimasi bobotnya, sebagai berikut:

Suatu penelitian diadakan untuk mengetahui apakah ada hubungan linier antara pendapatan rata-rata perbulan dengan ongkos promosi yang dikeluarkan per tahun dari para penjual makanan.

Untuk itu telah dikumpulkan data dari 30 restoran seperti yang tercantum pada tabel (3.1) berikut :

Tabel 3.1 : *Data dari 30 restoran*

i	Pendapatan (a)	Ongkos (b)
1	81464	3000
2	72661	3150
3	72344	3085
4	90743	5225
5	98588	5350
6	96507	6090
7	126574	8925
8	114133	9015
9	115814	8885
10	123181	8950
11	131434	9000
12	140564	11345
13	151352	12275
14	146926	12400
15	130963	12525
16	144630	12310
17	147041	13700
18	179021	15000
19	166200	15175
20	180732	14995
21	178187	15050
22	185304	15200
23	155931	15150
24	172579	16800
25	188851	16500
26	192424	17830
27	203112	19500
28	192482	19200
29	218715	19000
30	214317	19350

Sumber : Introduction to Linear Regression Analysis

oleh : DC. Montgomery dan Elisabeth A. Peck

Diasumsikan model regresi linier :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

dimana y merupakan dependent variabel yaitu pendapatan rata-rata, x merupakan independent variabel yaitu ongkos promosi tahunan, β_0 dan β_1 adalah parameter-parameter yang akan diestimasi dan ε merupakan error.

Terlebih dahulu akan dicari persamaan regresi liniernya dengan pendekatan kwadrat terkecil. Dari hasil perhitungan dengan Lotus-123 diperoleh :

$$\hat{\beta}_0 = 49443{,}38381$$
$$\hat{\beta}_1 = 8{,}048443556$$

Sehingga didapatkan persamaan regresi :

$$\hat{y} = 49443{,}38381 + 8{,}048443556\ x$$

Selanjutnya dengan substitusi harga x dari masing-masing observasi akan diperoleh harga $\hat{y}_i$ yang merupakan estimasi dari y_i. Dan kemudian dicari residu dari masing-masing observasi, yaitu deviasi antara y_i dengan $\hat{y}_i$. Hasilnya seperti tercantum pada tabel (3.3) berikut :

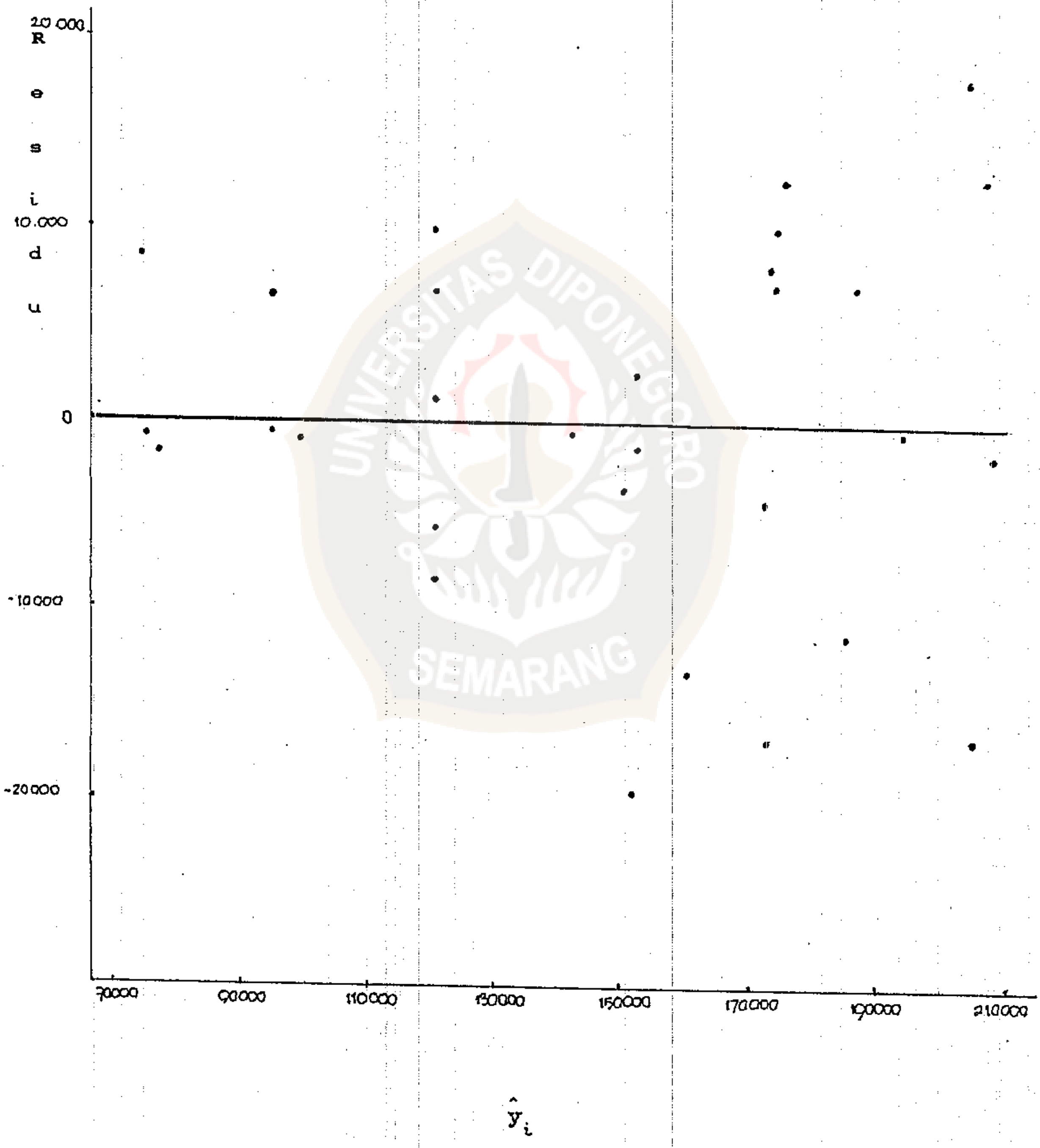
Tabel 3.2 : Hasil Perhitungan residu

(a)	(b)	(c)	(d)
81464	3000	73588.714478	7875.285522
72661	3150	74795.981011	-2134.9810114
72344	3085	74272.83218	-1928.8321803
90743	5225	91496.50139	-753.5013901
98588	5350	92502.556835	6085.4431654
96507	6090	98458.405066	-1951.405066
126574	8925	121275.742547	5298.2574527
114133	9015	122000.102467	-7867.1024673
115814	8885	120953.804805	-5139.8048051
123181	8950	121476.953636	1704.0463638
131434	9000	121879.375814	9554.624186
140564	11345	140752.97595	-188.97595282
151352	12275	148238.02846	3113.9715401
146926	12400	149244.0839	-2318.0839044
130963	12525	150250.13935	-19287.139349
144630	12310	148519.72398	-3889.7239844
147041	13700	159707.06053	-12666.0605272
179021	15000	170170.03715	8850.96285
166200	15175	171578.51477	-5378.5147723
180732	14995	170129.79493	10602.2050678
178187	15050	170572.45933	7614.5406722
185304	15200	171779.72586	13524.2741388
155931	15150	171377.30368	-15446.3036834
172579	16800	184657.23555	-12078.2355508
188851	16500	182242.70248	6608.297516
192424	17830	192947.13241	-523.13241348
203112	19500	206388.03315	-3276.033152
192482	19200	203973.50009	-11491.5000852
218715	19000	202363.81137	16351.188626
214317	19350	205180.76662	9136.2333814

Keterangan :
Kolom (a) : y observasi
Kolom (b) : x
Kolom (c) : y hasil perhitungan kwadrat terkecil
Kolom (d) : residu

Untuk mengetahui apakah error memenuhi asumsi varian konstans, maka dibuat plot antara y_i melawan residu. Hasilnya sebagai berikut.

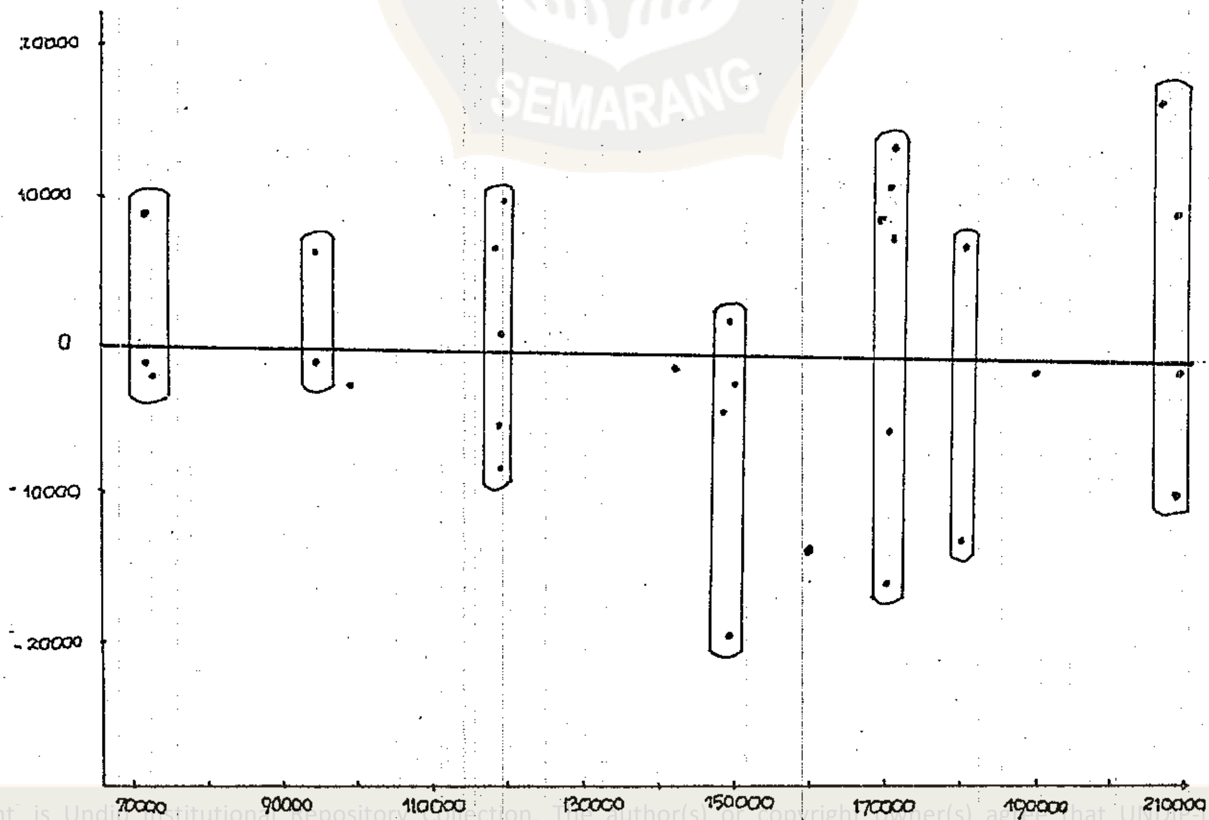
Gambar 3.1 : *Plot y_i melawan residu*



Jika plot tersebut dibandingkan dengan bentuk plot probabilitas normal pada Bab II, maka bentuknya cenderung mengarah pada bentuk *Funel*. Ini menunjukkan bahwa varian error tidak konstan, maka untuk memperbaiki keadaan ini dipergunakan pendekatan kwadrat terkecil berbobot. Untuk itu akan dicari terlebih dahulu bobot untuk masing-masing observasi yang akan dilakukan dengan cara demikian :

Data dari tabel (3.1) akan dikelompokkan menurut harga $\hat{y}_i$ yang saling berdekatan, dengan alasan jika harga $\hat{y}_i$ berdekatan maka diharapkan akan mempunyai varian error yang saling berdekatan pula, adapun pengelompokkan dilakukan melalui gambar plot $\hat{y}_i$ melawan residu, seperti pada gambar 3.2 berikut :

<u>Gambar 3.2 :</u> *Pengelompokan data melalui gambar*



Setelah data dikelompokkan selanjutnya dihitung harga rata-rata x untuk tiap-tiap kelompok ($\bar{x}$), harga rata-rata y tiap kelompok ($\bar{y}$) dan juga varian sampelnya dengan rumus :

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$$

Keterangan :

S_y^2 adalah varian sampel untuk tiap kelompok

y_i adalah harga y yang bersesuaian, i = 1,...,n

$\bar{y}$ adalah rata-rata y tiap kelompok

n adalah banyaknya sampel tiap kelompok

Tabel 3.4 akan memperlihatkan pengelompokkan data yang telah dibuat. Kolom (a) merupakan y_i, kolom (b) memuat harga rata-rata y tiap kelompok , kolom (c) merupakan x_i, kolom (d) memuat harga rata-rata y tiap kelompok, sedangkan kolom (e) merupakan varian sampel untuk tiap kelompok.

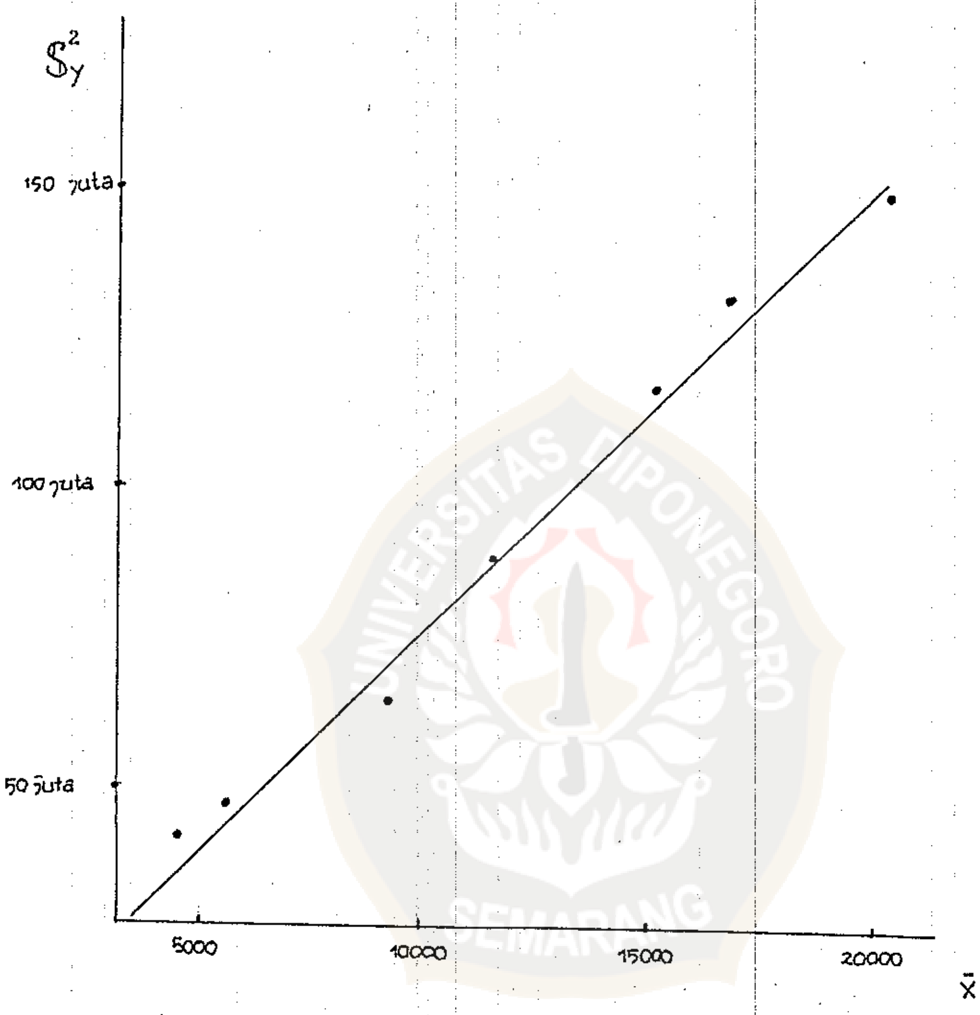
Setelah itu akan diselidiki hubungan antara $\bar{x}$ dan varian sampel S_y^2 . Untuk lebih jelasnya akan diperlihatkan hubungan tersebut melalui plot $\bar{x}$ melawan S_y^2 , seperti yang diperlihatkan pada Gambar 3.3.

Tabel 3.4 : Pengelompokan data

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
81464	3000			
72661	3150	3078,3	75489.666667	26794616,33
72344	3085			
90743	5225	5287,5	94665.5	30772012,5
98588	5350			
96507	6090			
126574	8925			
114133	9015			
115814	8885	8955,0	122227.2	52803694,7
123181	8950			
131434	9000			
140564	11345			
151352	12275			
146926	12400	12377,5	143467.75	77280162,917
130963	12525			
144630	12310			
147041	13700			
179021	15000			
166200	15175			
180732	14995	15095,0	174229.16667	120571061,4
178187	15050			
185304	15200			
155931	15150			
172579	16800	16650	180715	132388992
188851	16500			
192424	17830			
203112	19500			
192482	19200	19262,5	207156.5	138856871
218715	19000			
214317	19350			

KETERANGAN
Kolom (a) : y observasi
Kolom (b) : x
Kolom (c) : x rata-rata tiap kelompok
Kolom (d) : y rata-rata tiap kelompok
Kolom (e) : varian sampel tiap kelompok (S_y^2)

Gambar 3.3 : *Plot* S_y^2 melawan $\bar{x}$



Dari gambar diatas tampak bahwa antara $\bar{x}$ dan S_y^2 memiliki hubungan linier yang berarti persamaannya adalah :

$$\hat{S}_y^2 = \hat{a} + \hat{b}\,\bar{x}$$

Untuk mengestimasi harga $\hat{a}$ dan $\hat{b}$, dilakukan perhitungan dengan *Lotus*-123, diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\hat{a} = -7359595{,}21$$
$$\hat{b} = 7878{,}33$$

Sehingga didapatkan persamaan untuk mengestimasi varian sampel yaitu :

$$\hat{S}_y^2 = -7359595{,}21 + 7878{,}33\ \bar{x} \quad \ldots(3.6)$$

Dengan memasukkan harga x dari masing-masing observasi ke persamaan (3.6) maka akan didapatkan varian sampel untuk masing-masing observasi. Dan harga kebalikan dari varian sampel inilah yang diambil sebagai bobot (w_i)

Hasil selengkapnya dari perhitungan bobot untuk masing-masing observasi, akan disajikan dalam Tabel (3.6). Setelah bobot diketahui maka akan dilakukan perhitungan dengan metode kwadrat terkecil berbobot seperti pada persamaan (3.4) dan (3.5). Dan sebelumnya akan dihitung terlebih dahulu perkalian antara bobot (w_i) dengan residu. Tabel hasil perkalian residu dengan bobot(w_i) tercantum dalam Tabel 3.7 yang terdapat dalam Lampiran.

Tabel 3.6 : Hasil Perhitungan bobot

Obs	(a)	(b)	(c)
i	X_i	S_y^2	W_i
1	3000	$1,609539 . 10^7$	$6,2129 . 10^{-8}$
2	3150	$1,726814 . 10^7$	$5,7910 . 10^{-8}$
3	3085	$1,675990 . 10^7$	$5,9660 . 10^{-8}$
4	5225	$3,349110 . 10^7$	$2,9858 . 10^{-8}$
5	5350	$3,446840 . 10^7$	$2,9012 . 10^{-8}$
6	6090	$4,02540 . 10^7$	$2,4842 . 10^{-8}$
7	8925	$6,2419 . 10^7$	$1,6020 . 10^{-8}$
8	9015	$6,3123 . 10^7$	$1,5842 . 10^{-8}$
9	8885	$6,21063 . 10^7$	$1,6101 . 10^{-8}$
10	8950	$6,26145 . 10^7$	$1,5971 . 10^{-8}$
11	9000	$6,3005 . 10^7$	$1,5872 . 10^{-8}$
12	11345	$8,1399 . 10^7$	$1,2294 . 10^{-8}$
13	12275	$8,8610 . 10^7$	$1,1285 . 10^{-8}$
14	12400	$8,9588 . 10^7$	$1,1162 . 10^{-8}$
15	12525	$9,0565 . 10^7$	$1,1042 . 10^{-8}$
16	12310	$8,8884 . 10^7$	$1,1251 . 10^{-8}$
17	13700	$9,9752 . 10^7$	$1,0025 . 10^{-8}$
18	15000	$1,0992 . 10^8$	$9,0979 . 10^{-9}$
19	15175	$1,1128 . 10^8$	$8,9861 . 10^{-9}$
20	14995	$1,0988 . 10^8$	$9,1012 . 10^{-9}$
21	15050	$1,1031 . 10^8$	$9,0657 . 10^{-9}$
22	15200	$1,1148 . 10^8$	$8,9703 . 10^{-9}$
23	15150	$1,11088 . 10^8$	$9,0019 . 10^{-9}$
24	16800	$1,23988 . 10^8$	$8,0652 . 10^{-9}$
25	16500	$1,21643 . 10^8$	$8,2207 . 10^{-9}$
26	17830	$1,32041 . 10^8$	$7,5734 . 10^{-9}$
27	19500	$1,45098 . 10^8$	$6,8919 . 10^{-9}$
28	19200	$1,4275 . 10^8$	$7,0051 . 10^{-9}$
29	19000	$1,41188 . 10^8$	$7,0827 . 10^{-9}$
30	19350	$1,43925 . 10^8$	$6,9480 . 10^{-9}$

Didapatkan hasil estimasi untuk β_o dan β_1 :

$$\hat{\beta}_o = 50990,95238$$

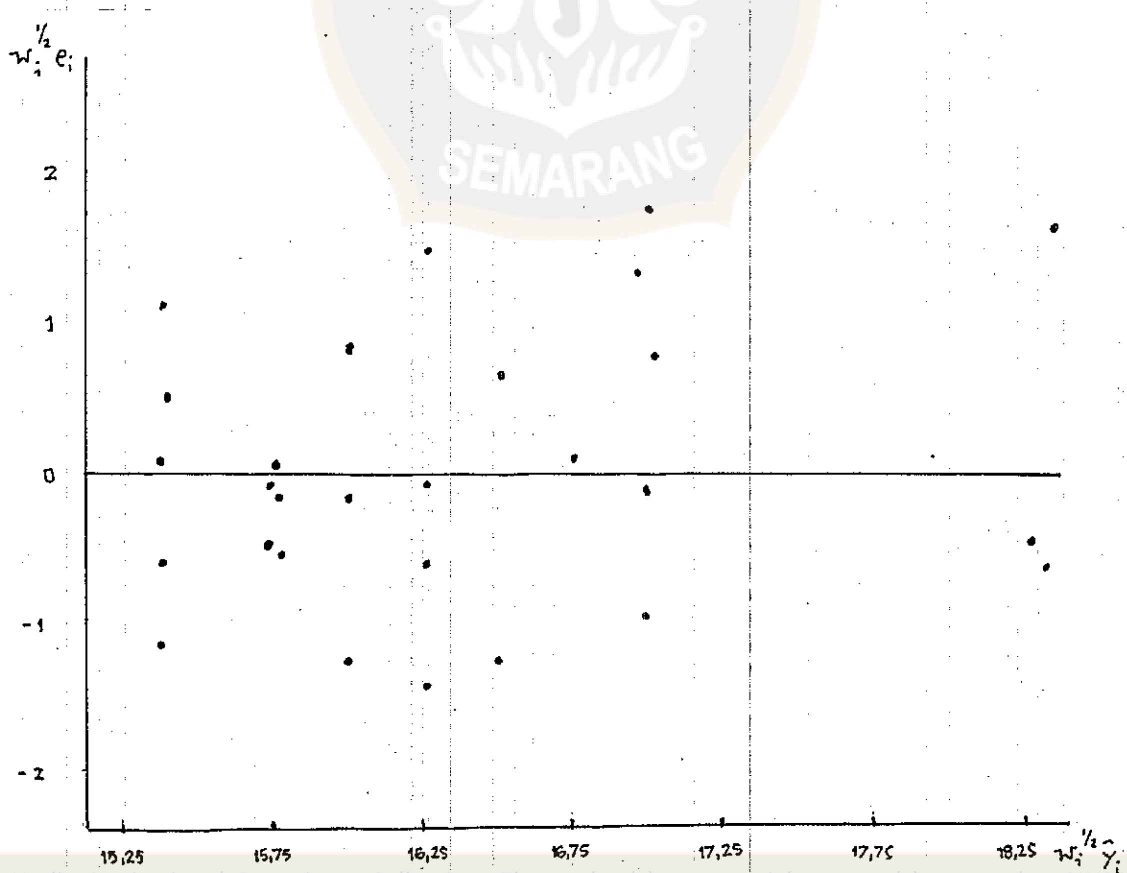
$$\hat{\beta}_1 = 7,9208426$$

Sehingga diperoleh persamaan regresi yang baru, yaitu :

$$\hat{y} = 5990,95238 + 7,9208426\ x$$

Untuk menguji apakah persamaan regresi yang baru ini sudah memenuhi asumsi varian konstan maka akan digambarkan plot residu melawan $\hat{y}_i$. Pada metode kwadrat terkecil berbobot, sumbu horisontal adalah $\hat{y}_i$ berbobot yaitu $w_i^{1/2}\ \hat{y}_i$, sedang sumbu vertikal adalah $w_i^{1/2} e_i$. Diperlihatkan pada gambar berikut :

<u>Gambar 3.4:</u> *Plot* residu melawan $\hat{y}_i$



Jika gambar 3.4 dibandingkan dengan bentuk plot residu melawan $\hat{y}_i$ pada Bab II maka cenderung untuk mengikuti bentuk (a), sehingga dapat dianggap bahwa error telah mempunyai varian konstan.. Dengan demikian berarti perhitungan dengan metode kwadrat terkecil berbobot telah memperbaiki permasalahan ketidaksamaan varian.

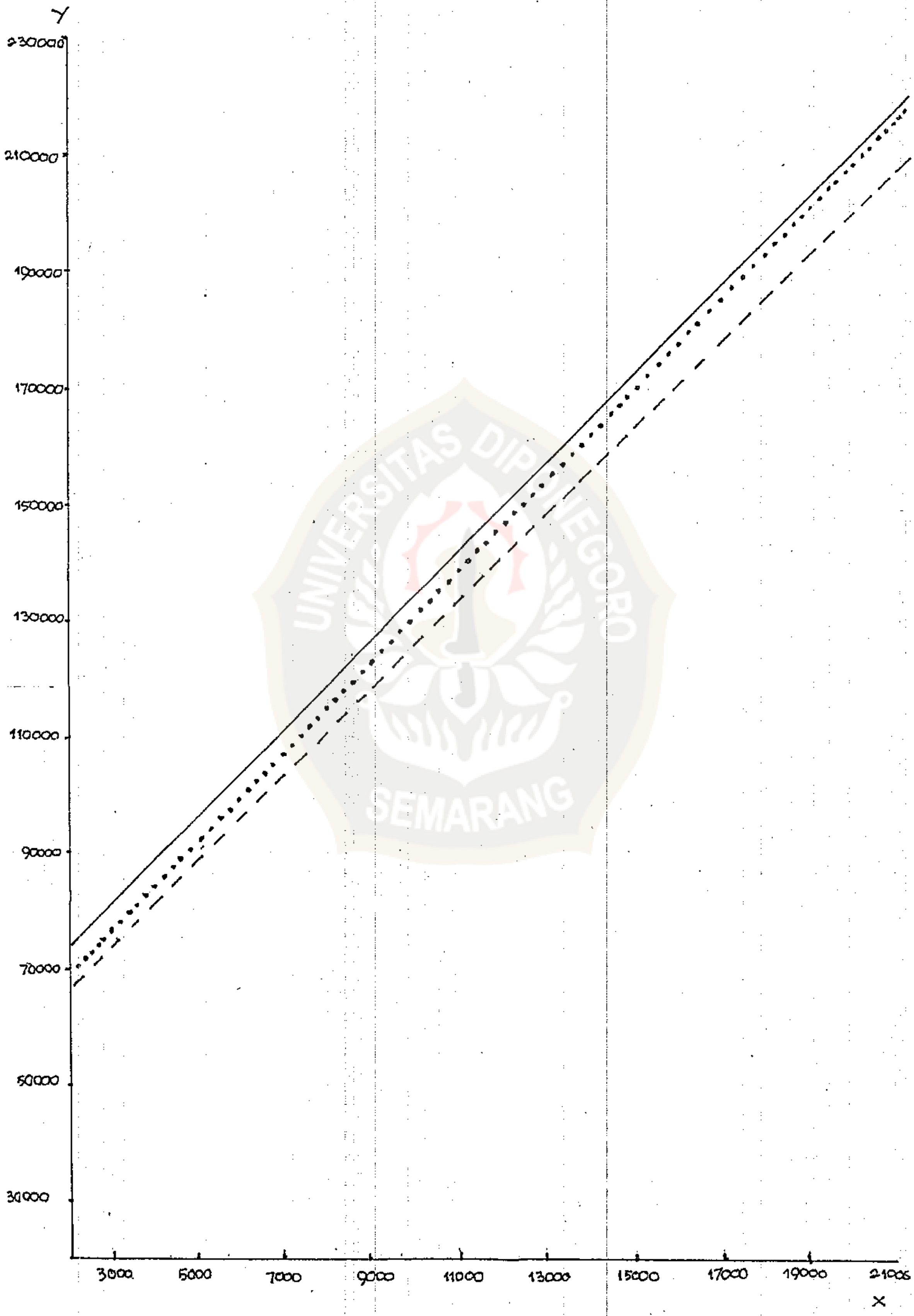
Selanjutnya akan diperlihatkan hasil perhitungan dari metode kwadrat terkecil dan metode kwadrat terkecil berbobot, berikut perbandingan residu-residunya, yang disajikan pada tabel (3.8) yang terdapat dalam lampiran. Dan kemudian akan diperlihatkan pula garis-garis regresinya yang disajikan pada gambar 3.5. Pada gambar akan tampak tiga buah garis regresi yaitu :

1. ———— menunjukkan garis regresi observasi
2. .... menunjukkan garis regresi hasil pendekatan kwadrat terkecil berbobot.
3. -------- menunjukkan garis regresi hasil pendekatan kwadrat terkecil.

Selanjutnya kedua garis regresi akan dibandingkan dengan garis regresi observasi.

Pada gambar garis regresi akan tampak bahwa garis regresi dari pendekatan kwadrat terkecil berbobot terletak lebih dekat terhadap garis regresi observasi, dibandingkan dengan garis regresi hasil pendekatan kwadrat terkecil terhadap garis regresi observasi.

Gambar 3.5 : *Gambar garis regresi*



3.2 *REGRESI LINIER BERGANDA*

Pada model regresi liner berganda dengan bentuk:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

dimana

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ adalah vektor observasi (n x 1), elemennya merupakan dependent variabel y_i

$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$ yaitu matrik (n x p) merupakan matrik dari regresor-regresor dengan $p = k + 1$

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$ yaitu vektor (p x 1) yang elemen-elemennya merupakan koefisien-koefisien yang akan diestimasi

$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ yaitu vektor (n x 1) dari error

Pada model regresi berganda haruslah memenuhi asumsi bahwa $E(\varepsilon) = 0$ dan $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Namun adakalanya terjadi bahwa varian error tidak sama atau dengan kata lain bahwa matrik covarian tidak berbentuk $\sigma^2 I$, melainkan suatu matrik diagonal dengan elemen diagonal utama tidak sama.

Bila hal itu terjadi maka pendekatan kwadrat terkecil dengan rumus :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

tidak lagi berlaku. Sehingga perlu diubah prosedur untuk mendapatkan rumus pendugaan yang baru. Gagasan dasarnya adalah mentransformasikan matrik observasi y menjadi variabel lain, misalkan Z yang memenuhi asumsi-asumsi regresi linier berganda.

Jika matrik covarian error adalah $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V$, dimana V adalah matrik non singular (n x n). Terdapat matrik K yang termuat dalam V dan memenuhi:

$$K' K = K K = V$$

K sering disebut sebagai akar kwadrat dari V.

Didefinisikan variabel-variabel :

$$Z = K^{-1}y \quad , \quad Q = K^{-1}X \quad \text{dan} \quad g = K^{-1}\varepsilon \quad ..(3.10)$$

Model regresi linier $y = X\beta + \varepsilon$ yang memiliki $E(\varepsilon)=0$ dan $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V$ diubah menjadi :

$$K^{-1} y = K^{-1} X\beta + K^{-1} \varepsilon \quad ....(3.11)$$

Bentuk baru ini memiliki

$$\begin{aligned} E(g) &= E(K^{-1} \varepsilon) \\ &= K^{-1} E(\varepsilon) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Cov(g) &= E\{(g - E(g)) (g - E(g))'\} \\ &= E(gg') \\ &= E(K^{-1} \varepsilon . \varepsilon' K^{-1}) \\ &= K^{-1} E(\varepsilon\varepsilon') K^{-1} \qquad , E(\varepsilon\varepsilon') = Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V \end{aligned}$$

$$= K^{-1} \ \sigma^2 \ V \ K^{-1}$$
$$= \sigma^2 \ K^{-1} V \ K^{-1}$$
$$= \sigma^2 \ K^{-1} K \ K \ K^{-1}$$
$$= \sigma^2 \ I$$

Karena persamaan (3.11) sudah memenuhi asumsi E(g) = 0 dan Cov(g) = $\sigma^2 I$ maka sekarang metode kwadrat terkecil dapat diterapkan. Fungsi kwadrat terkecil sekarang menjadi :

$$S(\beta) = g'g = (K^{-1} \ \varepsilon)' \ (K^{-1} \ \varepsilon)$$
$$= \varepsilon' \ K^{-1} \ K^{-1} \ \varepsilon$$
$$= \varepsilon' \ V^{-1} \ \varepsilon$$
$$= (y - X\hat{\beta})' \ V^{-1} \ (y - X\hat{\beta}) \qquad \ldots(3.12)$$

Dengan cara yang sama seperti pada metode kwadrat terkecil, maka diperoleh persamaan normal sebagai penjabaran dari persamaan (3.12), sebagqi berikut :

$$S(\beta) = y'V^{-1} \ y - \hat{\beta}'X'V^{-1} \ y - y'V^{-1} \ X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'V^{-1} \ X\hat{\beta}$$
$$= y'V^{-1} \ y - \hat{\beta}X'V^{-1} \ y - \hat{\beta}'X'V^{-1} \ y + X'V^{-1} \ X\hat{\beta}^2$$
$$= y'V^{-1} \ y - 2 \ \hat{\beta}'X'V^{-1} \ y + X'V^{-1} \ X\hat{\beta}^2 \qquad \ldots\ldots(3.13)$$

Untuk meminimalkan persamaan (3.13) dicari derivatif pertama dari S(β) ke β :

$$\frac{\delta S}{\delta \beta} = -2 \ X'V^{-1} \ y + 2 \ X'V^{-1} \ \hat{X}\hat{\beta} = 0$$

$$X'V^{-1} \ y + X'V^{-1} \ X\hat{\beta} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan normal :

$$X'V^{-1}\hat{\beta} = X'V^{-1} y \quad \text{.......(3.14)}$$

Selanjutnya ruas kiri dan kanan dikalikan dengan invers dari $X'V^{-1}X$:

$$(X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} y$$

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} y \quad \text{.......(3.15)}$$

$\hat{\beta}$ adalah estimator kwadrat terkecil berbobot dari β. Akan ditunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimator tak bias dari β :

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\{(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}y)\} \\ &= E\{(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}(X\beta + \varepsilon)\} \\ &= E\{(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}X\beta + (X'V^{-1}X)^{-1} \\ &\qquad X'V^{-1}e\} \\ &= E(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X)\beta) + \\ &\qquad (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}E(\varepsilon) \end{aligned}$$

Oleh karena $(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}X) = 1$ dan $E(\varepsilon) = 0$ maka didapatkan hasil : $E(\hat{\beta}) = \beta$

sehingga $\hat{\beta}$ adalah estimator tak bias dari β.

Jika pada kwadrat terkecil biasa diberikan matrik covarian $\hat{\beta}$:

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

maka pada kwadrat terkecil berbobot memiliki matrik covarian $\hat{\beta}$:

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}) &= \sigma^2(Q'Q)^{-1} \\ &= \sigma^2((K^{-1}X)'(K^{-1}X))^{-1} \\ &= \sigma^2(X'K^{-1}K^{-1}X)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \ (X' \ V^{-1} \ X)^{-1} \qquad \text{........(3.16)}$$

Jika diberikan model regresi linier :

$$y = X\beta + \varepsilon$$

dimana diketahui bahwa error memiliki varian tidak konstan, dan misalkan matrik covariannya memiliki bentuk :

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \ V$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1/v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1/v_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/v_n \end{bmatrix} \text{..(3.17)}$$

dalam hal ini w_i adalah bobot yang harus ditentukan lebih dahulu. Dari (3.17) diperoleh bahwa :

$$V = \begin{bmatrix} 1/v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/v_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/v_n \end{bmatrix} \quad \text{atau}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Apabila diambil $V^{-1} = W$, dimana W adalah matrik diagonal dengan elemen diagonal w_1 , w_2 , ... , w_n maka persamaan normal (3.14) akan berubah menjadi :

$$X'W\,X\,\hat{\beta} = X'W\,y$$

$$(X'W\,X)^{-1}\,(X'W\,X)\,\hat{\beta} = (X'W\,X)^{-1}\,X'W\,y$$

$$\hat{\beta} = (X'W\,X)^{-1}\,X'W\,y \qquad \text{......(3.18)}$$

Persamaan (3.18) merupakan estimator kwadrat terkecil berbobot dengan W sebagai matrik bobot yang diketahui.