BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1 Turunan Parsial

Didalam penaksiran nilai-nilai parameter model regresi logistik, digunakan turunan parsial.

Definisi 2.1

Jika Z = f(x,y) adalah fungsi dari variabel bebas x dan y maka :

turunan (pertama) parsial dari Z = f(x,y) terhadap x dimana y dianggap konstan adalah :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

turunan (pertama) parsial dari Z = f(x,y) terhadap y dimana x dianggap konstan adalah :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, \Delta y + y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Turunan parsial $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial Z}{\partial y}$ dari Z = f(x,y) dapat diturunkan lagi ke x dan y, akan menghasilkan turunan parsial kedua sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \text{ dan}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

Definisi 2.2

Apabila $Z = f(x,y)$ mempunyai turunan parsial pertama dan kedua dalam daerah tertentu yang memuat titik (x_o, y_o, z_o) dimana $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$ maka,

jika $\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ di P_o,

$Z = f(x,y)$ mempunyai :

minimum relatip di P_o, jika $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} > 0$

maksimum relatip di P_o, jika $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} < 0$

2.2 Penggunaan Operator Penjumlahan Dan Perkalian

Karena dalam analisis hubungan antara variabel tak bebas dan variabel bebas pada model regresi logistik banyak menggunakan data yang berupa angka-angka, maka disini akan ditinjau secara singkat tentang penggunaan operator penjumlahan dan perkalian. Biasanya notasi penjumlahan yang digunakan adalah Σ (dibaca sigma).

Definisi 2.3

Bila terdapat n data observasi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, maka jumlahan seluruh data tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\ldots+x_n$$

Beberapa sifat penting dari operator penjumlahan Σ adalah

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, dimana k adalah konstanta.
2. $\sum_{i=1}^{n} kx_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

Definisi 2.4

Operator perkalian yang di notasikan Π (dibaca pi), menyatakan perkalian dari segugus data $x_1, x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 . x_2 . \ldots . x_n$$

2.3 Beberapa Definisi Tentang Data Statistik

Dalam menganalisa hubungan antara variabel tak bebas dan variabel bebas pada model regresi logistik, perlu diketahui pengertian atau definisi-definisi mengenai data statistik, secara singkat definisi dari data statistik disajikan sebagai berikut :

Definisi 2.5

Populasi adalah keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian.

Definisi 2.6

Sampel adalah pengamatan yang merupakan himpunan bagian dari populasi.

Definisi 2.7

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_N$ adalah sekelompok data yang menyusun suatu populasi berhingga berukuran N dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata populasi adalah :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Definisi 2.8

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sekelompok data yang merupakan suatu sampel berhingga berukuran n dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata sampel adalah :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Definisi 2.9

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_N$ merupakan populasi berhingga dengan ukuran N, maka varians dari populasi adalah

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}$$

Definisi 2.10

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebarang sampel acak berukuran n, maka varians dari sampel populasi adalah :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n-1}$$

2.4 Variabel Acak, Ekspektasi, Varians Dan kovariansi

Beberapa pengertian tentang beberapa variabel, yaitu:

1. Variabel acak adalah suatu variabel yang nilainya merupakan suatu bilangan yang ditentukan oleh hasil pengamatan.
2. Variabel acak diskrit adalah variabel acak yang hanya dapat dinyatakan dengan nilai-nilai atau harga-harga yang terbatas jumlahnya.
3. Variabel acak kontinu adalah variabel acak yang mempunyai nilai-nilai atau harga-harga dalam suatu interval.

Definisi 2.11

Jika X adlah variabel acak diskrit yang mengambil nilai-nilai yang berbeda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maka fungsi,

$$f(x_i) = P(X = x_i) \ , \ i = 1,2,\ldots,n$$
$$= 0 \qquad , \text{ untuk } X \neq x_i$$

disebut fungsi kepadatan peluang diskrit dari X, dimana $P(X=x_i)$ berarti peluang bahwa variabel acak diskrit X mengambil nilai x_i

Definisi 2.12

Jika X adalah variabel acak kontinu, maka f(x) dikatakan fungsi kepadatan peluang variabel acak dari X jika memenuhi syarat berikut :

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = P(a \leq x \leq b)$$

dimana f(x) dx adalah elemen peluang yang berhubungan dengan interval kecil.

Definisi 2.13

f(x,y) disebut fungsi kepadatan peluang bersama untuk variabel acak diskrit bila :

$$f(x,y) = P(X = x \ , \ Y = y)$$
$$= 0 \ , \text{ jika } X \neq x \text{ dan } Y \neq y$$

Definisi 2.14

f(x,y) disebut fungsi kepadatan peluang bersama untuk variabel acak kontinu bila :

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x,y)\, dx\, dy = P(a \le x \le b,\ c \le y \le d)$$

Definisi 2.15

$f(x)$ dan $f(y)$ masing-masing disebut fungsi kepadatan peluang marginal x dan y untuk variabel acak diskrit bila :

$$f(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

$$f(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

Definisi 2.16

Fungsi kepadatan peluang marginal x dan y untuk variabel acak kontinu berturut turut adalah :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

Definisi 2.17

Fungsi kepadatan peluang bersyarat x adalah :

$$f(x|y) = P(X=x|Y=y)$$

artinya peluang bahwa x mengambil nilai x dengan syarat Y mengambil nilai y.

Definisi 2.18

Bila X variabel acak diskrit yang berdistribusi :

x	x_1	x_2	x_3	x_n
p	p_1	p_2	p_3	p_n

dengan $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ maka :

ekspektasi matematik dari X adalah :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; P_i$$

E(X) juga dapat ditulis μ_x dan disebut mean X atau mean populasi.

Definisi 2.19

Bila X variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang f(x) maka ekspektasi matematik dari X adalah $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x) \; dx$.

Definisi 2.20

E(X|Y=y) ekspektasi bersyarat X dengan syarat Y = y adalah :

$$E(X|Y=y) = \sum_{x} x \; f(X|Y=y) \text{ , diskrit}$$

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(X|Y = y) \text{ , kontinu}$$

Definisi 2.21

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabel acak X berukuran n dan $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari X maka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ independent (saling bebas) bhb :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Sifat-sifat dari ekspektasi :

1. $E(k) = k$, bila k adalah konstanta.
2. $E(kX + m) = k\,E(X) + m$, bila k dan m konstanta.
3. $E(\Sigma\, k_i X_i) = \Sigma\, k_i E(X_i)$
4. $E(XY) = E(X).E(Y)$, jika X dan Y saling bebas.

Definisi 2.22

Misalkan X variabel acak dengan ekspektasi μ_x maka variansi X adalah $var(X) = \sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2]$.

Definisi 2.23

Variansi bersyarat X dengan syarat Y = y adalah :

$Var(X \mid Y = y) = E[(X - E(X \mid Y = y))^2 \mid Y = y]$.

$= \Sigma\, [X - E(X \mid Y = y)]^2 f(X \mid Y = y)$, diskrit.

$= \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X \mid Y = y)]^2 f(X \mid Y = y)$, kontinu.

Sifat-sifat variansi :

1. $Var(k) = 0$, bila k konstanta.
2. $Var(kX + m) = k^2 Var(X)$, bila k dan m konstanta.
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$, bila X dan Y saling bebas.

Definisi 2.24

Kovariansi X dan Y dengan mean masing-masing μ_x dan μ_y adalah $kov(X,Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$.

Theorema 1.

$$\text{Kov}(X<Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\text{Kov }(X,Y) &= E[(X - \mu_x)\ (Y - \mu_y)] \\ &= E[XY - X\mu_y - \mu_x Y + \mu_x\mu_y] \\ &= E(XY) - E(X)\mu_y - \mu_x E(Y) + \mu_x\mu_y \\ &= E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y \\ &= E(XY) - \mu_x\mu_y.\end{aligned}$$

2.5 Beberapa Teori Distribusi Yang Penting

Beberapa distribusi yang digunakan dalam pembahasan ini adalah :

1. Distribusi binomial.
2. Distribusi normal.
3. Distribusi chi-kuadrat.

Definisi 2.25

Jika X variabel acak dengan fungsi probabilitas f(x), maka fungsi pembangkit momen dari X adalah :

$$E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)\ dx \text{ ; untuk X kontinu,}$$

$$E[e^{tx}] = \sum_{i=1}^{n} e^{tx}\ f(x) \text{ ; untuk X diskrit,}$$

dinotasikan dengan $M_x(t)$.

Theorema 2

Jika x_1 dan x_2 variabel acak independent dengan fungsi pembangkit momen $M_{x_1}(t)$ dan $M_{x_2}(t)$ serta $y=x_1+x_2$ maka :

$$M_y(t) = M_{x_1+x_2}(t) = M_{x_1}(t) \cdot M_{x_2}(t)$$

Bukti :

$$M_y(t) = E[e^{ty}] = E[e^{t(x_1+x_2)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x_1+x_2)} f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

menurut definisi 2.21, $f(x_1,x_2) = g(x_1) \cdot h(x_2)$ sehingga :

$$M_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x_1)} g(x_1)\, dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x_2)} h(x_2)\, dx_2$$

$$= M_{x_1}(t) \cdot M_{x_2}(t)$$

Definisi 2.26

Bentuk integral $\int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$ untuk $\alpha > 0$, disebut fungsi gamma dari α dan ditulis :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

Sifat fungsi gamma :

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$
2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$, jika α bilangan bulat positip.
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Definisi 2.27

Fungsi distribusi kumulatip dari variabel acak X dinyatakan dengan F(X) didefinisikan sebagai suatu fungsi dengan domain bilangan riil dan kodomain [0,1] yang memenuhi untuk setiap bilangan riil X maka $F(X) = p(X \le x_i)$.

2.5.1 Distribusi Binomial

Distribusi ini sangat penting dalam pembentukan model regresi logistik karena variabel responnya berskala biner sehingga memiliki sebaran binomial.

Definisi 2.28

Misalkan suatu eksperimen E diulangi n kali, setiap eksperimen hanya menghasilkan sukses dan gagal dengan p(sukses) = p dan p(gagal) = 1-p = q serta semua percobaan bebas satu sama yang lain maka E disebut percobaan Bernoulli atau binomial.

Definisi 2.29

Misalkan p(sukses) = p, q = p(gagal) dan X banyaknya sukses dalam n percobaan bernoulli, $R_x=\{0,1,2,\ldots,n\}$ maka $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{1-k}$ disebut distribusi binomial.

2.5.2 Distribusi Normal

Distribusi ini merupakan distribusi terpenting yang digunakan dalam regresi linier, karena banyak pengukuran mengikuti atau mendekati distribusi normal.Dimana regresi linier ini sebagai dasar atau perbandingan untuk melangkah ke regresi logistik.

Definisi 2.30

Variabel kontinu X dikatakan mengikuti distribusi normal bila bentuk fungsi kepadatan peluang sebagai berikut : $f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp -1/2(\frac{X-\mu}{\sigma})^2$, $-\infty \le X \le \infty$

dimana μ dan σ^2 merupakan parameter rata-rata dan varians dari distribusi normal, yang mengambil nilai $-\infty \le \mu \le \infty$, $0 \le \sigma^2 \le \infty$.

Pada umumnya apabila suatu variabel acak kontinu X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2 maka dapat ditulis $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Demikian pula untuk $X \sim N(0,1)$ maksudnya adalah variabel acak X berdistribusi normal standard dengan rata-rata 0 dan varians 1.

2.5.3 Distribusi Chi-kuadrat

Distribusi ini sangat berperan penting dalam uji signifikansi dari koefisien-koefisien pada model regresi logistik. Distribusi ini sering juga disebut

χ^2, dimana tabel berbagai nilai dari distribusi χ^2 diberikan pada lampiran.

Definisi 2.31

Suatu variabel acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)\ 2^{n/2}} X^{(n/2)-1} \quad e^{-(x/2)}, \quad 0 < X < \infty$$

dengan fungsi pembangkit momen $M_x(t) = (1-2t)^{-(n/2)}$, untuk $t < 1/2$ disebut berdistribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas n.

2.6 Model Regresi Linier Dengan Pendekatan Matrik

Penggunaan matrik dalam model regresi akan menyebabkan lebih efisien atau tidak bertele-tele dalam penulisan simbol. Model regresi linier secara umum dapat diberikan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}+\varepsilon_i \qquad (2.1)$$

dengan $i=1,2,\ldots,n$.

Dimana Y_i adalah variabel respon.

x_i adalah variabel bebas.

$\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ adalah parameter-parameter yang akan ditasir.

Persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.2}$$

dengan

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$(n\text{x}1)$ $\quad (n\text{x}(p+1))$ $\quad ((p+1)\text{x}1)$ $\quad (n\text{x}1)$

Dalam model regresi linier diasumsikan bahwa $E(\varepsilon_i)=0$, untuk setiap $i=1,2,\ldots,n$. Jika dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$E(\varepsilon) = 0$$

dengan,

$$E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_i) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dimana E = nilai akspektasi

ε_i = Kesalahan pengganggu

Matrik varians-kovarians(ε) dinyatakan dalam bentuk matrik adalah:

$$E(\varepsilon\,\varepsilon') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_n^2) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Dalam regresi linier ada asumsi tentang homoskedastisitas yaitu bahwa setiap kesalahan pengganggu mempunyai varians yang sama $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$, untuk semua i dan tidak ada korelasi serial, artinya antara kesalahan pengganggu yang satu dengan yang lain saling bebas atau $Kov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, maka:

$$E(\varepsilon\ \varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \sigma^2 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \quad \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \quad 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\ I$$

dimana I adalah matrik identitas.

Parameter-parameter yang belum diketahui $\beta = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p\}$dapat ditaksir dari persamaan (2.1) atau (2.2). Untuk lebih mudahnya digunakan persamaan (2.2)

$$Y = X\ \beta + \varepsilon$$

misal $\hat{\beta} = \{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p\}$menunjukan vektor kolom dari taksiran β maka persamaan (2.2) dapat ditulis,

$$Y = X\ \hat{\beta} + e \qquad (2.4)$$

dimana e adalah vektor kolom dari n residual $(Y - X\hat{\beta})$, dari (2.4) jumlah kuadrat residual adalah:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$$

$$= (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$

$$= Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$= Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \qquad (2.5)$$

Taksiran kuadrat terkecil $\hat{\beta}$diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat terkecil, dimana harus memenuhi:

$$\frac{\partial(e'e)}{\partial\hat{\beta}} = -2X'Y + X'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X$$

$$= -2X'Y + X'X\hat{\beta} + X'X\hat{\beta}$$

$$= -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}$$

kemudian disamakan dengan nol maka akan didapat $\hat{\beta}$.

2.7. Metoda Maximum Likelihood (Kemungkinan Maximum)

Metoda maximum likelihood ialah suatu cara untuk mendapatkan taksiran dari parameter-parameter yang tidak diketahui dari populasi dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood. Misalkan pengamatan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel acak dari distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(X_i, \beta)$, dengan $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ adalah vektor parameter yang belum diketahui. Maka fungsi Likelihood untuk β didefinisikan sebagai berikut:

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \beta)$$

Untuk menaksir β yang menyebabkan $l(\beta)$ maksimum, maka $\hat{\beta}$ disebut taksiran maksimum Likelihood untuk β. Untuk lebih mudahnya dalam memaksimumkan $l(\beta)$ maka dapat dilakukan dengan memaksimumkan Ln $l(\beta)$, yang juga maksimum pada $\hat{\beta}$. Dan $\hat{\beta}$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaaan maksimum Likelihood. Menurut hitung defferensial persamaan maksimum Likelihood didapat dari turunan parsial pertama dari Ln $l(\beta)$ terhadap β, yang kemudian disamakan dengan nol, yakni:

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} l(\beta)}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,p$$

Karena Ln $l(\beta)$ = Ln $\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ln} f(X_i, \beta)$ dan $\hat{\beta}$ adalah penaksir maksimum Likelihood, maka matrik varians-kovariansnya $\Sigma(\hat{\beta})$, dapat diperoleh dari invers matrik informasi $I(\beta)$, dimana matriks informasi adalah negatip dari matrik turunan parsial kedua dari Ln $l(\beta)$ terhadap β, yaitu:

$$I_{ij}(\beta) = -\frac{\partial^2 \operatorname{Ln} l(\beta)}{\partial \beta_i \, \partial \beta_j}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots,p$$

2.8 Metoda Iterasi Newton-Raphson

Metoda ini digunakan untuk mendapatkan suatu taksiran dari parameter yang tidak diketahui dari populasi pada model regresi logistik. Dari fungsi Likelihood yang berbentuk,

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \beta)$$

dan untuk memaksimumkan $l(\beta)$ dapat dilakukan dengan memaksimumkan Ln $l(\beta)$ yaitu dengan jalan mendefferensialkan secara parsial fungsi Ln $l(\beta)$ terhadap β, kemudian disamakan dengan nol,

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} l(\beta)}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,p$$

misalkan $S_i(\beta) = \dfrac{\partial \operatorname{Ln} l(\beta)}{\partial \beta_i}$ dan $T_{ij}(\beta) = \dfrac{\partial^2 \operatorname{Ln} l(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$

$$i,j = 0,1,2,\ldots,p$$

untuk menaksir digunakan taksiran awal β_o dan dilakukan ekspansi deret taylor disekitar β_o sehingga diperoleh,

$$S(\hat{\beta}) = S(\beta_o) + (\hat{\beta} - \beta_o)\, T(\beta_o)$$

jika $\hat{\beta}$ memenuhi $S(\hat{\beta}) = 0$ maka persamaan diatas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$0 = S(\beta_o) + (\hat{\beta} - \beta_o)\, T(\beta_o)$$

$$-\, S(\beta_o) = (\hat{\beta} - \beta_o)\, T(\beta_o)$$

$$(\hat{\beta} - \beta_o) = T^{-1}(\beta_o)\,(-\, S(\beta_o))$$

$$(\hat{\beta} - \beta_o) = - T^{-1}(\beta_o)\ S(\beta_o)$$

$$\hat{\beta} = \beta_o - T^{-1}(\beta_o)\ S(\beta_o)$$

Adapun algoritma metoda Iterasi Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

1. Menentukan taksiran awal β_o.
2. Menghitung $S(\beta_o)$ dan $T^{-1}(\beta_o)$
3. menghitung $\hat{\beta} = \beta_o - T^{-1}(\beta_o)\ S(\beta_o)$
4. Mengulangi (2) dan (3) sampai $\hat{\beta}_{i+1} \approx \hat{\beta}_i$