

BAB II

PENDEKATAN TEORI PERMAINAN PEMASARAN DAN OLIGOPOLI

Seperti yang telah dipaparkan dalam abstraksi, bahwa setiap konsumen akan memaksimalkan fungsi utiliti yang dipunyai, maka pertama akan dibahas secara ringkas apa dan bagaimana fungsi utiliti itu.

2.1. FUNGSI UTILITI

Definisi 2.1

Fungsi Utiliti adalah tingkat kepuasan seorang konsumen jika ia mengkonsumsi komoditi I sebanyak a_1 , komoditi II sebanyak a_2 dan seterusnya sampai dengan a_n , sehingga dapat dibuat fungsi utiliti U adalah $U = U(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Memang pada dasarnya sungguh sulit untuk mengukur suatu tingkat kepuasan konsumen, tetapi ada beberapa asumsi tentang perilaku konsumen yang dapat dipakai untuk pendekatan masalah tersebut, yaitu :

1. Jika seorang konsumen menghadapi pilihan suatu komoditi mana yang harus ia pilih dan dalam jumlah berapa, maka ia dapat memutuskan apakah ia lebih menyukai yang satu dari pada yang lain .Dengan kata lain jika terdapat suatu himpunan kombinasi dari suatu komoditi yang memberikan tingkat kepuasan pada seorang konsumen, maka konsumen tersebut dapat memilih kombinasi mana yang lebih ia sukai atau kombinasi mana yang menghasilkan kepuasan yang sama.

2. Seorang konsumen dalam menentukan pilihannya harus konsisten dengan apa yang dipilihnya. Misalnya, jika seorang konsumen menunjukkan kesenangannya pada VW dari pada SUZUKI, dan jika dia lebih menyukai SUZUKI dari pada HONDA, maka secara konsisten ia harus menyukai VW dari pada HONDA.
3. "Kelebihan" lebih disukai dari pada "kekurangan", misalnya mempunyai dua buah HONDA lebih baik dari pada mempunyai satu buah HONDA.
4. Konsumen lebih suka menganekaragamkan konsumsinya, atau disebut konsumen mempunyai Prinsip Anekaragam Konsumsi.

Dari keempat asumsi ini sering dijabarkan dalam bentuk grafik yang dikenal dengan nama Kurva Indifferens. Kurva ini dikemukakan oleh Edgeworth yang mengasumsikan bahwa dalam pasar hanya terdapat dua komoditi yang diperdagangkan sehingga kurva indifferens didefinisikan sebagai ,

Definisi 2.2

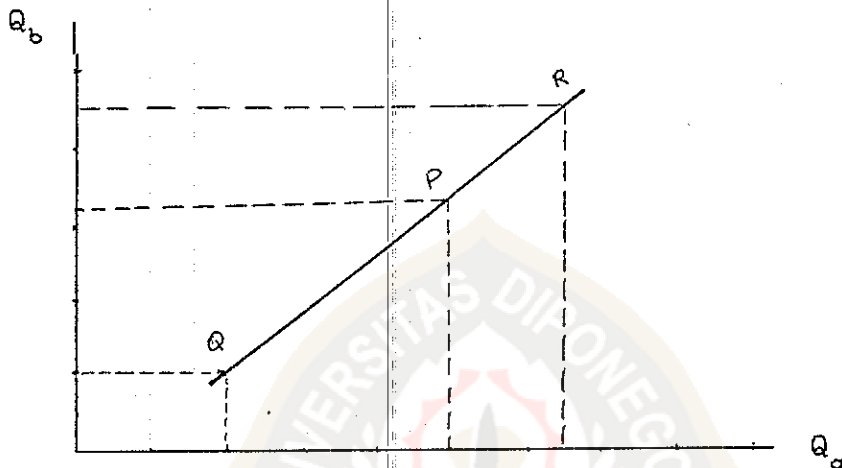
Kurva Indifferens adalah kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi dari dua komoditi yang dikonsumsi konsumen yang memberikan tingkat kepuasan yang sama.

Adapun sifat-sifat Kurva Indifferens adalah :

- (i) Mempunyai kemiringan negatif.
- (ii) Cembung terhadap titik nol.
- (iii) Tidak saling berpotongan.

Bukti (i)

Andaikan kurva indifferens mempunyai kemiringan yang positif seperti pada gambar dibawah ini.



Gambar 2, Kurva indifferens berarah positif

Kurva ini menunjukkan bahwa tingkat kepuasan konsumen pada titik P lebih tinggi dari pada titik Q, dan tingkat kepuasan konsumen pada titik R akan lebih tinggi dari pada titik P, sehingga dapat diartikan, bahwa tidak ada seorang konsumen yang mau berhenti pada tingkat kepuasan yang lebih rendah, (sesuai dengan asumsi ke 3), tetapi yang perlu diperhatikan, bahwa pendapatan seorang konsumen adalah terbatas, sehingga jika ia ingin mempertahankan tingkat kepuasannya dengan menambah jumlah komoditi yang satu, maka ia harus mengurangi jumlah komoditi yang lain. Jadi yang benar adalah tidak mungkin kurva indifferens berarah positif, tetapi harus berarah negatif.

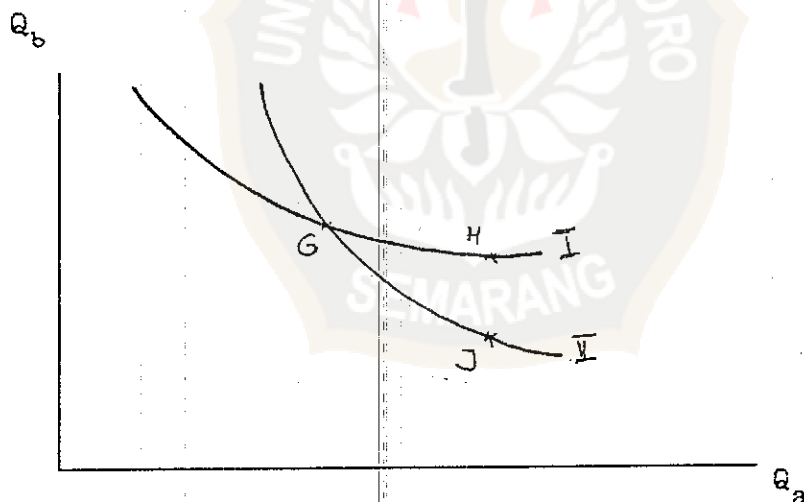
Bukti (ii)

Andaikan kurva indifferens berbentuk cekung terhadap titik nol, maka kurva tersebut akan memotong kedua sumbu

koordinat. Ini berarti bahwa konsumen juga suka mengonsumsi hanya satu komoditi saja dari dua komoditi yang ada dalam pasar. Kejadian ini bertentangan dengan asumsi keempat tentang perilaku konsumen, yang mengatakan bahwa konsumen lebih suka menganekaragamkan konsumsinya. Jadi yang benar, adalah bahwa kurva indiferens berbentuk cembung terhadap titik nol.

Bukti (iii)

Andaikan terdapat dua kurva Indiferens seorang konsumen yang saling berpotongan.



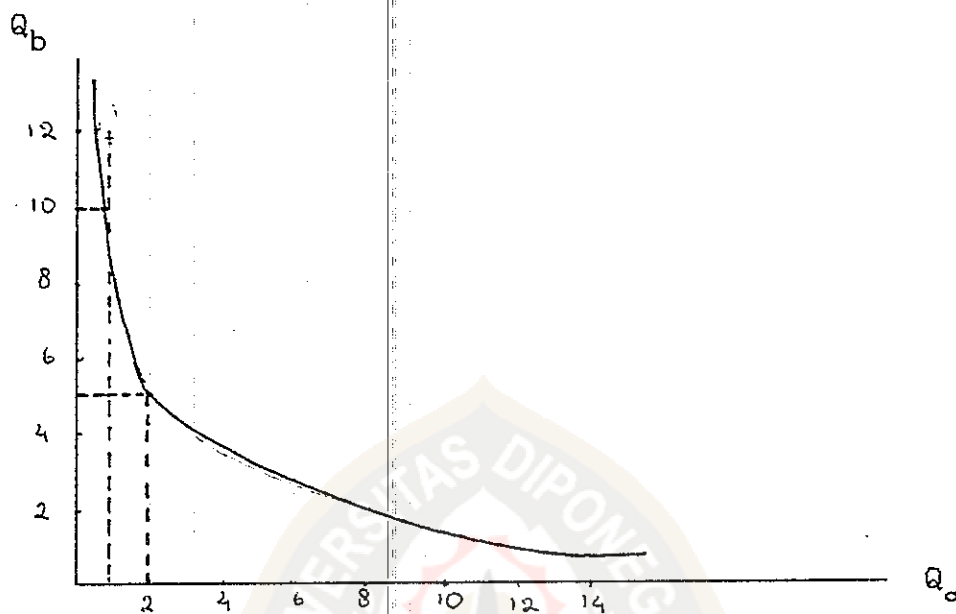
Gambar 3 Kurva Indiferens

Titik G dan H adalah dua titik pada kurva Indiferens I dan karenanya memberi kepuasan yang sama bagi konsumennya. Begitu pula G dan J merupakan dua titik pada Kurva Indiferens II, dan juga memberi kepuasan yang sama bagi konsumennya. Sehingga menurut definisi 2.2, kedua titik itu terletak pada Kurva Indiferens yang sama. Kontradiksi dengan pengandaian diatas, maka yang benar adalah tidak mungkin Kurva Indiferens akan saling berpotongan.

Sebagai contoh dalam pasar terdapat dua komoditi, yaitu komoditi tipe-A dan komoditi tipe-B. Q_a , Q_b menyatakan banyaknya komoditi yang dikonsumsi konsumen.

Q_a	Q_b
1	10
2	5
3	3
4	2.3
5	1.7
6	1.2
7	0.8
8	0.5
9	0.3
10	0.2

Dengan menggambarkan kembali pada dua sumbu yang sama akan menghasilkan kurva yang halus yaitu kurva kurva indifference dan semua titik pada kurva indifference ini memberikan tingkat kepuasan yang sama. Untuk menghaluskan kurva indifference ini pertama-tama harus diingat definisi 2.2 tentang kurva indifference, yang mengatakan bahwa kurva indifference akan memberikan tingkat kepuasan yang sama bagi konsumen atau dengan kata lain, bahwa setiap titik pada kurva indifference ini, akan mempunyai harga dari fungsi utiliti yang sama. Sehingga dengan memperkecil interval, pada kedua sumbu Q_a dan Q_b akan mendapatkan kurva indifference yang halus seperti dibawah ini.



Gambar 1 Kurva Indifferens

Titik C menunjukkan, individu tersebut mengkonsumsi 10 unit komoditi tipe-B dan 1 unit komoditi tipe-A, titik D menunjukkan, individu mengkonsumsi 5 unit komoditi tipe-B dan 2 unit komoditi tipe-A.

Sekarang bagaimana seorang konsumen dapat mencapai kepuasan yang maksimum (kondisi yang *Ekulibrum*). Seorang konsumen dikatakan dalam kondisi *Ekulibrum* atau keadaan setimbang, apabila dengan kendala pendapatan dan harga komoditi yang tertentu, konsumen tersebut dapat memaksimalkan utiliti atau tingkat kepuasan total dari pengeluaran. Dengan kata lain apabila dengan Garis anggaran tertentu, seorang konsumen dapat mencapai fungsi utiliti tertinggi yang mungkin diraihnya.

2.2. PERMAINAN BENTUK NORMAL

Definisi 2.3

Permainan dalam bentuk normal atau permainan n-Orang dinyatakan sebagai n himpunan Γ_i yang tidak kosong, yang merupakan himpunan strategi dari para pemain $1, 2, \dots, n$. Dan terdapat n buah fungsi keuntungan e_i yang bernilai real dengan $i = 1, 2, \dots, n$, yang didefinisikan pada $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3 \times \dots \times \Gamma_n$, yaitu semua himpunan strategi $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ dengan $x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2, \dots, x_n \in \Gamma_n$, sehingga permainan bentuk normal dinyatakan sebagai :

$$(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n; e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Definisi 2.4

Suatu permainan $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n; e_1, e_2, \dots, e_n)$ disebut permainan dengan jumlah konstan jika terdapat suatu jumlahan keuntungan pemain ke i jika setiap pemain ke i menggunakan strategi x_i yang bernilai c sehingga memenuhi :

$$\sum_{i=1}^n e_i(x_1, \dots, x_n) = c \text{ untuk semua } x_1 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n$$

Jika $c = 0$ maka akan disebut permainan dengan jumlah nol.

2.3. PERMAINAN TANPA KERJA SAMA

Dalam suatu permainan bentuk normal dikatakan tanpa kerja sama, jika diantara para pemain, sebelum dan selama permainan tidak terjadi suatu komunikasi, dan masing-masing pemain akan berusaha untuk memaksimalkan fungsi keuntungan e_i . Konsep untuk memaksimalkan fungsi keuntungan e_i dalam

teori permainan dikenal dengan cara, bagaimana mencari suatu Titik Keseimbangan dari suatu permainan, yang akan dijelaskan dengan beberapa definisi serta teorema dibawah ini.

2.3.1. Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah titik yang menyatakan setiap pemain akan mendapatkan keuntungan yang maksimal dengan menggunakan strategi yang optimal pula. Strategi optimal yang harus dimainkan oleh para pemain, dinyatakan dengan lambang x_i^* , yang berarti strategi optimal pemain ke i .

Definisi 2.5

Jika $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n; e_1, \dots, e_n)$ adalah suatu permainan dalam bentuk normal, dengan n pemain dan x_i^* menyatakan strategi optimal pemain ke i , maka (x_1^*, \dots, x_n^*) merupakan titik keseimbangan dari permainan, jika untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$, berlaku

$$e_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq e_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$$

Teorema 2.1.

Setiap permainan dalam bentuk normal tanpa kerja sama yang terbatas, paling sedikit mempunyai satu titik keseimbangan.

Bukti

Akan dibuktikan dengan adanya satu titik kesetimbangan $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pada pemain ke i . Menurut definisi 2.5, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ adalah suatu titik kesetimbangan pada permainan n -Orang, jika berlaku

$$e_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*) \geq$$

$$e_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i, \dots, x_n^*)$$

untuk $1 \leq i \leq n$

Karena permainan ini merupakan permainan n -Orang tanpa kerja sama, maka untuk setiap pemain ke i akan terdapat j permainan dengan $1 \leq j \leq r$, atau dengan kata lain setiap Γ_i mempunyai r buah strategi, sehingga dapat ditulis keuntungan pemain ke i adalah $e_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jika ia menggunakan strategi (x_1, x_2, \dots, x_n) dan $e_i^j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$, jika ia menggunakan strategi strategi yang lain pada permainan ke j . Maka menurut definisi 2.5 untuk $1 \leq i \leq n$ berlaku,

$$e_i^j(x_{1j}^*, \dots, x_{ij}^*, \dots, x_{nj}^*) \geq$$

$$e_i^j(x_{1j}^*, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nj}^*).$$

Pada pemain ke i ini, terdapat pula suatu nilai probabilitas dari permainan ke j yaitu :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r; \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1 \text{ dan } \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1.$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
 e_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*) &= \sum_{j=1}^r \lambda_j e_i^j(x_{1j}^*, \dots, x_{ij}^*, \dots, x_{nj}^*) \\
 &\geq \sum_{j=1}^r \lambda_j e_i^j(x_{1j}^*, \dots, x_{ij}^*, \dots, x_{nj}^*) \\
 &= e_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)
 \end{aligned}$$

jadi $e_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*) \geq e_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$
 sehingga $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ adalah suatu titik kesetimbangan dari suatu permainan.

Terbukti

Untuk memudahkan serta menyederhanakan perhitungan diambil Γ_i dengan $i = 1, 2$. Jika Γ_1 adalah himpunan strategi pemain I, dengan strategi (x_{11}, \dots, x_{1n}) dan Γ_2 himpunan strategi pemain II dengan strategi (x_{21}, \dots, x_{2n}) , maka untuk menentukan x_1^* dan x_2^* serta nilai permainan v adalah sebagai berikut.

Andaikan terdapat suatu matrik pembayaran penaian seperti dibawah ini :

$$\begin{array}{c}
 \text{Pemain II} \\
 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \\
 \text{Pemain I}
 \end{array}$$

maka

$$x_1^* = \left(\frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}}, \frac{x_{11} - x_{12}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}} \right)$$

$$x_2^* = \left(\frac{x_{22} - x_{12}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}}, \frac{x_{11} - x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}} \right)$$

$$v = \frac{x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}} \quad \dots\dots\dots 2.1$$

Definisi 2.6.

Suatu pasangan strategi optimal pemain I dan pemain II yang dinyatakan (x_1^*, x_2^*) , adalah pasangan keseimbangan, jika untuk setiap $x_1 \in \Gamma_1$ dan $x_2 \in \Gamma_2$, akan berlaku

$$e(x_1, x_2^*) \leq e(x_1^*, x_2^*) \leq e(x_1^*, x_2).$$

Jika pemain I menggunakan strategi x_1 dan pemain II menggunakan strategi optimal x_2^* maka keuntungan pemain I adalah $e_1(x_1, x_2^*)$. Sebaliknya jika pemain I menggunakan strategi optimal x_1^* dan pemain II menggunakan strategi x_2 maka keuntungan pemain II adalah $e_2(x_1^*, x_2)$, sehingga berlaku

$$(i) \quad e_1(x_1, x_2^*) \leq e_1(x_1^*, x_2^*) \quad \dots\dots 2.2$$

$$(ii) \quad e_2(x_1^*, x_2) \leq e_2(x_1^*, x_2^*)$$

Lemma 2.1

jika $(x_{11}, x_{21}); (x_{12}, x_{22})$ adalah suatu pasangan kesetimbangan maka $e(x_{11}, x_{21}) = e(x_{12}, x_{22})$

Bukti

Karena (x_{11}, x_{21}) adalah suatu pasangan kesetimbangan maka menurut definisi 2.6 berlaku

$$e(x_{12}, x_{21}) \leq e(x_{11}, x_{21}) \leq e(x_{11}, x_{22}) \dots (i)$$

Begitu pula untuk (x_{12}, x_{22}) adalah suatu pasangan kesetimbangan, berlaku pula

$$e(x_{11}, x_{22}) \leq e(x_{12}, x_{22}) \leq e(x_{12}, x_{21}) \dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) maka jelas bahwa $e(x_{12}, x_{21})$ harus sama dengan $e(x_{11}, x_{22})$ dan $e(x_{11}, x_{21})$ harus sama dengan $e(x_{12}, x_{22})$

Terbukti

Pasangan kesetimbangan untuk permainan yang tidak nol adalah sama dengan yang telah dibicarakan pada definisi 2.6, yaitu

Definisi 2.7

Suatu pasangan strategi $x_1^* \in \Gamma_1, x_2^* \in \Gamma_2$ adalah pasangan kesetimbangan untuk permainan yang tidak nol jika untuk setiap $x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2$ berlaku

$$(i) \quad e_1(x_1, x_2^*) \leq e_1(x_1^*, x_2^*)$$

$$(ii) \quad e_2(x_1^*, x_2) \leq e_2(x_1^*, x_2^*)$$

Dan $e_1(x_1, x_2^*)$ adalah pembayaran pemain I, $e_2(x_1^*, x_2)$ adalah pembayaran pemain II

Teorema 2.2

Jika permainan 2-Orang, (baik dengan jumlah nol dan jumlah tidak nol) dan mempunyai strategi yang berhingga dari strategi murni, maka paling sedikit mempunyai satu pasangan kesetimbangan.

Bukti

Telah dibuktikan pada teorema 2.1 di muka. Yaitu pada teorema 2.1 telah dibuktikan bahwa suatu permainan n-orang mempunyai pasangan kesetimbangan. Jadi jika sekarang hanya terdapat dua orang, maka jelas permainan itu mempunyai pasangan kesetimbangan.

Terbukti

2.3.2. Mencari Pasangan Kesetimbangan (Metode Swatika)

Ada suatu cara yang dianggap cukup baik untuk mencari suatu pasangan kesetimbangan yaitu Metode Swatika. jadi Metode Swatika adalah suatu cara untuk mencari pasangan kesetimbangan dengan metode grafik. Sekarang diambil suatu contoh permainan dengan jumlah tidak nol dan mempunyai strategi 2×2 seperti pada matrik pembayaran dibawah ini.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (2, 1) & (4, 3) \\ (6, 2) & (3, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

Seperti pada mata kuliah Operasi Riset II diambil untuk pembayaran pemain ke 1 adalah $(e_1(x_1, x_2))$

$$\begin{array}{cc} & \text{II}_1 & \text{II}_2 \\ \text{I}_1 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \right) \\ \text{I}_2 & \left(\begin{array}{cc} 6 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

dan $x_1 = (x_1, 1 - x_1)$, $x_2 = (x_2, 1 - x_2)$ maka

$$\begin{array}{cc} & x_2 & 1 - x_2 \\ x_1 & \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \right) \\ 1 - x_1 & \left(\begin{array}{cc} 6 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} e_1(x_1, x_2) &= 2 \cdot x_1 x_2 + 6 \cdot x_2 (1 - x_1) + 4 \cdot x_1 (1 - x_2) + \\ & 3 \cdot (1 - x_1)(1 - x_2) \\ &= 3 + x_1 + 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 \quad \dots\dots(i) \end{aligned}$$

supaya x_1 maksimum maka $\frac{d(e_1(x_1, x_2))}{dx_1} = 0$

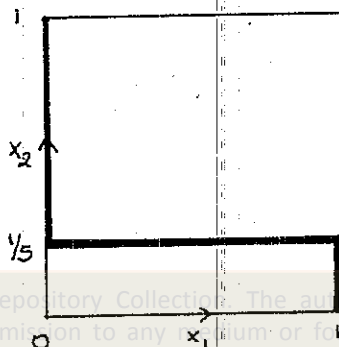
$$\begin{aligned} \frac{d(e_1(x_1, x_2))}{dx_1} &= 1 - 5x_2 = 0 \\ x_2 &= 1/5 \end{aligned}$$

didapat jika,

$x_2 < 1/5$, maka $e_1(x_1, x_2)$ maksimal di $x_1 = 1$

$x_2 = 1/5$, maka $e_1(x_1, x_2)$ maksimal di $0 \leq x_1 \leq 1$

$x_2 > 1/5$, maka $e_1(x_1, x_2)$ maksimal di $x_1 = 0$



Untuk pembayaran ke 2 ($e_2(x_1, x_2)$) diambil

$$\begin{array}{l} I_2 \\ II_1 \\ II_2 \end{array} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

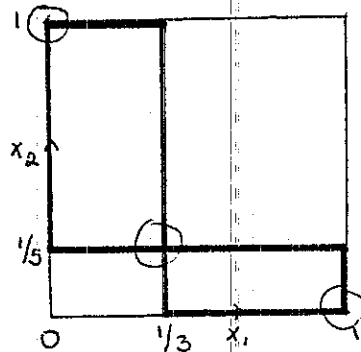
maka

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_2(x_1, x_2) &= 1 \cdot x_2 x_1 + 2 \cdot x_2(1-x_1) + 3 \cdot (1-x_2)x_1 + \\ & \quad 1 \cdot (1-x_2)(1-x_1) \\ &= 1 + x_2 + 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \quad \dots(ii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(e_2(x_1, x_2))}{dx_2} &= 0 \\ &= 1 - 3 \cdot x_1 = 0 \\ x_1 &= 1/3 \end{aligned}$$

Jika $x_1 < 1/3$, maka $e_2(x_1, x_2)$ maksimum di $x_2 = 1$
 Jika $x_1 = 1/3$, maka $e_2(x_1, x_2)$ maksimum di $0 \leq x_2 \leq 1$
 Jika $x_1 > 1/3$, maka $e_2(x_1, x_2)$ maksimum di $x_2 = 0$



Maka permainan diatas mempunyai tiga pasangan kesetimbangan yaitu :

1. Untuk $x_1 = 1, x_2 = 0$, disubstitusikan pada (i) dan (ii) mendapatkan pembayaran (3 , 1). Ini berkorespondensi dengan (I_2 , II_2) .
2. Untuk $x_1 = 0 , x_2 = 1$, disubstitusikan pada (i) dan (ii) mendapatkan pembayaran (6 , 2). Ini berkorespondensi dengan (I_2 , II_1) .
3. Untuk $x_1 = 1/3 , x_2 = 1/5$, disubstitusikan pada (i) dan (ii) berkorespondensi dengan $((1/3, 2/3) ; (1/5, 4/5))$ dengan pembayaran (3,6 ; 1,6)

Kemudian dicari pasangan maximin-maximin, dengan menggunakan persamaan 2.1, jika tidak ada dominansi.

Untuk matrik pembayaran

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} II_1 \\ II_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$V_1 = \frac{2 \cdot 3 - 6 \cdot 4}{2 + 3 - 6 - 4} = 3,6$$

$$x_1^* = \left(\frac{3 - 6}{2 + 3 - 6 - 4}, \frac{2 - 4}{2 + 3 - 6 - 4} \right) = (3/5 , 2/5)$$

Kemudian untuk matrik pembayaran

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} II_1 \\ II_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$V_2 = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{1 + 1 - 2 - 3} = 1.67$$

$$x_2^* = \left(\frac{1 - 3}{1 + 1 - 2 - 3}, \frac{1 - 2}{1 + 1 - 2 - 3} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Sehingga harga maksimin dari permainan diatas adalah (V_1, V_2) , yaitu $(3,6 ; 1,67)$ dan pasangan maksimin adalah, $x_1^* = (3/5 ; 2/5)$, $x_2^* = (2/3 ; 1/3)$.

2.3.3. Solusi Permainan Dalam Pengertian yang Sempurna

Solusi permainan seperti yang telah dibicarakan diatas dikatakan sempurna jika permainan tersebut mempunyai suatu optimal Pareto. Adapun untuk mengetahui adanya optimal pareto, harus memenuhi :

1. Tidak ada dominasi.
2. Mempunyai nilai pembayaran yang sama.

Untuk memenuhi syarat-syarat diatas dibentuk beberapa definisi, yaitu

Definisi 2.8

(x_{12}, x_{22}) mendominasi (x_{11}, x_{21}) jika

$$(i) \quad e_1(x_{12}, x_{22}) \geq e_1(x_{11}, x_{21})$$

$$(ii) \quad e_2(x_{12}, x_{22}) \geq e_2(x_{11}, x_{21})$$

Definisi 2.9

Suatu pasangan strategi (x_1, x_2) adalah optimal Pareto jika dalam permainan tersebut tidak ada

dominasi.

Definisi 2.10

Suatu permainan yang mempunyai solusi dalam pengertian yang sempurna, jika

1. Terdapat pasangan kesetimbangan diantara pasangan optimal Pareto.
2. Semua pasangan kesetimbangan optimal Pareto dapat dipertukarkan dan mempunyai pembayaran yang sama.

2.4. PERMAINAN DENGAN KERJA SAMA

2.4.1. Fungsi Karakteristik

Berbeda dengan bentuk permainan tanpa kerja sama yang telah dipaparkan pada seksi sebelumnya, yang menyatakan, bahwa tidak terjadi suatu komunikasi sebelum dan selama permainan antara para pemain. Jika dalam permainan terjadi suatu komunikasi antara para pemain, yaitu dengan membentuk suatu koalisi untuk memaksimalkan keuntungan yang mereka dapat. maka bentuk permainan ini disebut permainan dengan kerja sama.

Pandang suatu permainan bentuk normal atau permainan n-orang dengan $N = \{ 1, 2, \dots, n \}$ yang menyatakan himpunan dari para pemain. Dan setiap subset $S \subseteq N$ akan disebut suatu koalisi. Jadi setiap himpunan dari semua subset N adalah suatu koalisi yang mungkin terjadi. Sekarang bagaimana setiap koalisi ini akan memaksimalkan pendapatannya dinyatakan dengan beberapa definisi dibawah ini.

Definisi 2.11

Sebuah *Fungsi Karakteristik* dari permainan n -Orang, menunjukkan setiap subset S dari para pemain yang memaksimalkan harga $V(S)$, yaitu keuntungan koalisi S , dengan asumsi pemain lain tidak memaksimalkan harga tersebut. Untuk mendefinisikan harga karakteristik dari koalisi \emptyset adalah nol jadi $V(\emptyset) = 0$.

Jika Γ_S adalah himpunan strategi semua pemain dalam koalisi S , dengan himpunan strategi $x_1 = \{x_{11}, \dots, x_{1j}\}$ dan Γ_{N-S} adalah himpunan strategi semua pemain dalam koalisi $N-S$ dengan himpunan strategi $x_2 = \{x_{21}, \dots, x_{2j}\}$, maka

$$V(S) = \max_{x_1 \in \Gamma_S} \min_{x_2 \in \Gamma_{N-S}} \sum_{i \in S} e_i(x_1, x_2)$$

Dengan $e_i(x_1, x_2)$ adalah keuntungan untuk pemain ke i , untuk $i = 1, 2$, dan $x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2$ adalah strategi yang dimainkan para pemain.

Teorema 2.3

Untuk permainan yang terbatas dengan kerja sama $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$ untuk $S, T \subseteq N$, dan $S \cap T = \emptyset$

Bukti

Dari definisi 2.11 maka berlaku

$$V(S \cup T) = \max_{x_1 \in \Gamma_{S \cup T}} \min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in (S \cup T)} e_i(x_1, x_2)$$

Jika $\alpha \in \Gamma_S$ dan $\beta \in \Gamma_T$, yang merupakan strategi campuran yang independent (berdiri sendiri), maka

$$V(S \cup T) \geq \max_{\alpha \in \Gamma_S} \max_{\beta \in \Gamma_T} \min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in (S \cup T)} e_i(\alpha, \beta, x_2)$$

$$\begin{aligned} V(S \cup T) &\geq \min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in (S \cup T)} e_i(\alpha, \beta, x_2) \geq \\ &\min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} (\sum_{i \in S} e_i(\alpha, \beta, x_2) + \sum_{i \in T} e_i(\alpha, \beta, x_2)) \end{aligned}$$

Karena $S \cap T = \emptyset$

$$\begin{aligned} V(S \cup T) &\geq \min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in S} e_i(\alpha, \beta, x_2) + \\ &\min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in T} e_i(\alpha, \beta, x_2) \end{aligned}$$

Untuk semua $\alpha \in \Gamma_S$ dan $\beta \in \Gamma_T$

$$\begin{aligned} V(S \cup T) &\geq \min_{\beta \in \Gamma_T} \min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in S} e_i(\alpha, \beta, x_2) \\ &+ \min_{\alpha \in \Gamma_S} \min_{x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}} \sum_{i \in T} e_i(\alpha, \beta, x_2) \end{aligned}$$

Untuk strategi campuran $\beta \in \Gamma_T$, $x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}$,

maka pasangan $(\beta, x_2) \in \{\Gamma_T \times \Gamma_{N-(S \cup T)}\}$,

menurut definisi 2.3 semua strategi didalam Γ_{N-S} , berlaku,

$$\begin{aligned} \Gamma_T \times \Gamma_{N-(S \cup T)} &= [\Gamma_T] \times [\Gamma_{N-(S \cup T)}] \subseteq [\Gamma_{N-S}] \\ &= \Gamma_{N-S} \end{aligned}$$

Analog untuk $\alpha \in \Gamma_S$, $x_2 \in \Gamma_{N-(S \cup T)}$, mendapatkan strategi campuran didalam Γ_{N-T} jadi

$$V(S \cup T) \geq \min_{\gamma \in \Gamma_{N-S}} \sum_{i \in S} e_i(\alpha, \gamma) + \min_{\delta \in \Gamma_{N-T}} \sum_{i \in T} e_i(\beta, \delta)$$

karena $\alpha \in \Gamma_S$ dan $\beta \in \Gamma_T$, berlaku

$$V(S \cup T) \geq \max_{\alpha \in \Gamma_S} \min_{\gamma \in \Gamma_{N-S}} \sum_{i \in S} e_i(\alpha, \gamma) +$$

$$\max_{\beta \in \Gamma_T} \min_{\delta \in \Gamma_{N-T}} \sum_{i \in T} e_i(\beta, \delta)$$

maka menurut definisi 2.11 ketidaksamaan tersebut menjadi

$$V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$$

Terbukti.

Fungsi yang memenuhi teorema 2.3 diatas, maka mempunyai fungsi karakteristik yang *Superaditif* dan ini merupakan suatu hasil yang terbaik, karena pembayarannya bergantung kepada bentuk koalisi, dan bentuk pembayaran individu hanya bergantung pada variasi strategi. Jika fungsi yang memenuhi teorema 2.3 berbentuk seperti dibawah ini,

$$V(S \cup T) = V(S) + V(T) \quad \text{dengan}$$

$$S, T \subseteq N \quad \text{dan} \quad S \cap T = \emptyset \quad \dots\dots\dots 2.3$$

Maka permainan tersebut mempunyai fungsi Karakteristik yang *Aditif*.

Definisi 2.12

Suatu permainan dengan fungsi karakteristik yang aditif disebut *Inessential*. Sedangkan permainan yang tidak *Inessential* disebut *Essensial*.

Teorema 2.4

Suatu permainan n -orang dengan $i = 1, \dots, n$ adalah permainan yang *Inessential* jika dan hanya jika berlaku

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$$

Bukti (\implies)

Dari teorema 2.3

$$\begin{aligned} v(N) &\geq v(SUT) + v(N-(SUT)) \\ &\geq v(S) + v(T) + v(N-(SUT)) \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } v(N) \geq v(S) + v(T) + v(N-(SUT))$$

menurut 2.3 berlaku

$$v(N) = v(S) + v(T) + v(N-(SUT))$$

$$\text{Sehingga } v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$$

(\impliedby)

$$\text{Karena } v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$$

Maka menurut 2.3 fungsi diatas merupakan suatu fungsi karakteristik yang aditif, sehingga menurut definisi 2.12 permainan tersebut adalah *Inessential*.

Terbukti.

2.4.2. Imputasi/Pendistribusian

Dalam permainan n -Orang ini terdapat dua permasalahan yang sangat penting untuk dipecahkan, yaitu,

1. Permasalahan tentang bagaimana membentuk koalisi yang baik dan strategi apa yang sekiranya baik untuk dilaksanakan.
2. Permasalahan tentang bagaimana pendistribusian pembayaran antara sesama anggota dalam satu koalisi.

Dari kedua permasalahan diatas, maka perundingan awal memegang peranan penting dalam permainan ini, sehingga bentuk koalisi dan bentuk pembayaran harus dirundingkan secara baik. Karena pada kenyataannya pendistribusian pembayaran ini akan mempengaruhi bentuk koalisi, sebab beberapa pemain boleh menawarkan besarnya pembayaran kepada pemain lain untuk bekerja sama, dan setiap pemain akan berusaha mempertahankan kerja samanya dengan pemain lain atau dengan koalisinya. Jadi tidak mungkin terbentuk suatu koalisi tanpa didahului dengan perundingan pendistribusian pembayaran.

Pada dasarnya pendistribusian pembayaran ini dapat dirundingkan sebagaimana yang disukai oleh para anggota, tetapi dapat pula diperhitungkan bagaimana imputasi/pendistribusian yang baik dilakukan.

Definisi 2.13

Suatu imputasi dalam Permainan n-Orang dengan fungsi karakteristik V adalah suatu vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ dengan x_i menyatakan pembayaran pemain ke i . Dan memenuhi

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n x_i = V(N)$$

$$(ii) \quad x_i \geq V(\{i\}) \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

Keadaan pada (i) adalah kondisi yang optimal, karena $V(N)$ adalah suatu koalisi dari N pemain yang bekerja sama dan x_i adalah pembayaran pemain ke i . Sedangkan pada keadaan (ii) dikatakan bahwa setiap pemain akan mendapatkan pembayaran yang lebih jika mereka memainkan permainan bersama-sama. Imputasi/Pendistribusian dalam permainan dinyatakan dengan $E(V)$.

Definisi 2.14

Pandang x, y adalah dua imputasi dalam suatu permainan, dan x mendominasi y didalam S , jika

$$(i) \quad x_i > y_i \text{ untuk semua } i \in S$$

$$(ii) \quad \sum_{i \in S} x_i \leq V(S)$$

$x \succ y$, dinyatakan sebagai x mendominasi y .

Teorema 2.5

Suatu permainan-orang dengan kerja sama yang mempunyai fungsi Karakteristik V dan imputasi x , jika terdapat suatu jumlah a_i , dengan $i \in N$, berlaku

$$(i) \quad x_i = V(\{i\}) + a_i, \text{ untuk } a_i \geq 0 \quad \dots\dots 2.4$$

$$(ii) \quad \sum_{i \in N} a_i = V(N) - \sum_{i \in N} V(\{i\}) \quad \dots\dots 2.5$$

Bukti (i)

Pertama-tama diasumsikan a_i ada, maka $a_i \geq 0$, dari 2.4, akan memenuhi definisi 2.13 (ii),

yaitu

$$x_i \geq V(\{i\}), \text{ maka } x_i = V(\{i\}) + a_i \\ a_i \geq 0$$

sehingga $x_i = V(\{i\}) + a_i$, untuk $a_i \geq 0$.

Terbukti.

Bukti (ii)

Karena telah terbukti bahwa $x_i = V(\{i\}) + a_i$, maka

$a_i = x_i - V(\{i\})$, sehingga

$$\sum_{i \in N} a_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N} V(\{i\}).$$

Karena menurut definisi 2.13 (i) $\sum_{i \in N} x_i = V(N)$ maka,

$$\sum_{i \in N} a_i = V(N) - \sum_{i \in N} V(\{i\})$$

Terbukti.

Teorema 2.6

Dalam permainan yang inessential mempunyai imputasi $x = (V(1), V(2), \dots, V(N))$

Pada keadaan lain jika permainan itu essential, dengan pemain paling sedikit dua, memiliki imputasi yang terbatas.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa permainan yang inessential akan mempunyai imputasi $x = (V(1), V(2), \dots, V(N))$.
Jika terdapat imputasi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka dari teorema 2.5 diperoleh

$$x = (V(1) + a_1, V(2) + a_2, \dots, V(N) + a_n)$$

Dari teorema 2.4 bahwa suatu permainan adalah inessential jika dan hanya jika $\sum_{i \in N} V(i) = V(N)$, maka dari persamaan 2.5 didapat

$$\sum_{i \in N} a_i = V(N) - \sum_{i \in N} V(i)$$

$$\sum_{i \in N} a_i = 0$$

Karena $a_i \geq 0$ maka a_i harus bernilai nol untuk setiap $i \in N$, berlaku $x = (V(1), V(2), \dots, V(N))$

Terbukti.

Kemudian akan dibuktikan bahwa untuk permainan yang essential akan mempunyai imputasi yang terbatas.

Untuk permainan yang essential, maka akan berlaku,

$V(N) \geq \sum_{i \in N} V(\{i\})$ sehingga

$$\sum_{i \in N} a_i = V(N) - \sum_{i \in N} V(i) \geq 0.$$

Karena jumlah a_i adalah positif maka $a_i \geq 0$, sehingga imputasinya terbatas.

Terbukti.

2.4.3. Inti Permainan

Inti dari suatu permainan merupakan suatu cara yang mudah untuk mendapatkan solusi.

Definisi 2.15

Inti dari suatu permainan V yang dinyatakan dengan $C(V)$, merupakan himpunan dari imputasi yang tidak mempunyai dominasi untuk setiap koalisi.

Jika x didalam inti setiap koalisi, maka x adalah suatu imputasi yang terbaik. Untuk itu diasumsikan dalam permainan terdapat lebih dari satu imputasi dalam inti sehingga terdapat beberapa alternatif dari suatu inti.

Teorema 2.7

x adalah suatu inti jika dan hanya jika

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n x_i = V(N)$$

$$(ii) \quad \sum_{i \in S} x_i \geq V(S) \text{ untuk semua } S \subseteq N$$

Bukti (\implies)

Ambil x memenuhi (i), (ii) dan S berturut-turut $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$, kondisi (i) dan (ii) merupakan suatu imputasi x , Jika ini benar merupakan imputasi maka akan dibuktikan dengan tidak adanya dominasi.

Andaikan y mendominasi x , ($y \succ x$) sehingga $y_i > x_i$ untuk semua $i \in S$, maka dengan mengingat (ii) akan berlaku $\sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq V(S)$, tetapi menurut definisi 2.14 (i), jika y mendominasi x dalam S berlaku $\sum_{i \in S} y_i \leq V(S)$, kontradiksi dengan pengandaian diatas, sehingga yang benar y tidak mendominasi x , dan x juga tidak mendominasi y , sehingga menurut definisi 2.15, x berada dalam inti.

(\impliedby)

Karena x dalam inti maka jelas menurut definisi 2.13

(i) berlaku $\sum_{i=1}^n x_i = V(N)$.

Untuk (ii), andaikan x dalam inti dan x tidak memenuhi (ii), sehingga berlaku $\sum_{i \in S} x_i < V(S)$, maka terdapat nilai ϵ yang tidak nol sehingga berlaku $V(S) = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon$, ϵ adalah jumlah pemain dalam koalisi S , didefinisikan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, imputasi lain

$$y_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon \\ V(i) + \frac{(V(N) - V(S) - \sum_{i \in S} V(i))}{\# N-S} \end{cases} ; i \notin S \quad 2.6$$

maka persamaan diatas akan memenuhi $\sum y_i = V(N)$ dan $y_i \geq V(i)$, untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$, juga $y_i > x_i$ untuk semua $i \in S$ dan $\sum_{i \in S} y_i = V(S)$ maka y mendominasi x . Sehingga x tidak didalam inti, kontradiksi dengan pengandaian diatas, jadi yang benar adalah x harus memenuhi (ii).

Terbukti.

Lemma 2.2

Jika V adalah Fungsi Karakteristik dari persamaan essensial dengan jumlah konstan, maka $C(V) = \emptyset$.

Bukti

Dengan mengingat kembali pengertian essensial, yaitu $V(N) > \sum_{i=1}^n V(i)$ dan definisi 2.13, maka

$$V(N-S) + V(S) = V(N)$$

Untuk semua koalisi S . Diasumsikan x merupakan imputasi dalam inti sehingga berlaku teorema 2.7 bagian (ii), yaitu

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq V(2, 3, \dots, n) = V(N) - V(1) \text{ atau}$$

$$x_1 + \sum_{i=2}^n x_i = V(N) \text{ sehingga } x_1 \leq V(1)$$

Dengan alasan yang sama, maka dari bentuk $x_i \leq V(i)$ dengan $i = 2, \dots, n$, maka permainan tersebut adalah essensial, sehingga berlaku $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n V(i) < V(N)$. Kontradiksi dengan x yang merupakan suatu imputasi, sehingga titik tersebut haruslah kosong.

Terbukti

2.5. CONTOH SOAL

Terdapat suatu Negara (sebut Negara-1) yang merupakan penghasil minyak bumi, jika minyak tersebut digunakan sendiri untuk menjalankan sistem transportasinya akan memberi keuntungan a per barel, tetapi jika minyak tersebut dijual ke Negara-2 untuk menjalankan industri rumah tangganya, ini akan memberi keuntungan b per barel. Dan jika minyak tersebut dijual kepada Negara-3 akan memberi keuntungan c per barel, sehingga berlaku $a < b \leq c$. Cari fungsi karakteristik, imputasi permainan dan inti permainan.

Jawab

$V(\emptyset) = 0$ ini sesuai dengan definisi.

$V(1) = a$ sebab, jika negara-1 dan negara-2 membentuk suatu koalisi, mereka tidak mempunyai kekuatan untuk menjual minyak tersebut.

$$V(2) = V(3) = V(2,3) = 0$$

sebab setiap koalisi ini tidak dapat membeli
b minyak tersebut.

$V(1,2) = b$ sebab jika negara-1 menjual minyaknya ke
negara-2 akan mendapatkan keuntungan b,
sehingga negara-3 harus membeli minyak dengan
harga yang memberi keuntungan sedikit-dikitnya
c untuk mendapatkan minyak tersebut.

$$V(1,3) = V(1,2,3) = c$$

sebab negara-1 menjual minyaknya ke negara-3
dan memberikan keuntungan c per barel.

Jadi Fungsi Karakteristik dari soal ini adalah : $V(\emptyset) = 0$,
 $V(1) = a$, $V(2) = V(3) = V(2,3) = 0$, $V(1,2) = b$, serta
 $V(1,3) = V(1,2,3) = c$.

Imputasi permainan $E(V)$ adalah

$$E(V) = \{ (x_1, x_2, x_3); x_1 \geq a, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = c \}$$

Inti permainan $C(V)$ adalah

Dari fungsi karakteristik diatas, jika x_1, x_2, x_3 dalam
inti, dan $x_1 + x_2 + x_3 = c$ dengan mengikuti teorema 2.8 maka

$$\begin{aligned} \text{Untuk } S = 1 & \longrightarrow x_1 \geq a \\ S = 2 & \longrightarrow x_2 \geq 0 \\ S = 3 & \longrightarrow x_3 \geq 0 \\ S = (1,2) & \longrightarrow x_1 + x_2 \geq b \\ S = (2,3) & \longrightarrow x_2 + x_3 \geq 0 \\ S = (1,3) & \longrightarrow x_1 + x_3 \geq c \end{aligned}$$

Dari $x_1 + x_3 \geq c$, $x_2 \geq 0$ dan $x_1 + x_2 + x_3 = c$, maka x_2 harus sama dengan nol ($x_2 = 0$), sehingga $x_1 + x_3 = c$. Kemudian $x_2 = 0$ disubstitusikan pada $x_1 + x_2 \geq b$, maka $x_1 \geq b$ sehingga didapat

$$C(V) = \{ (x, 0, c-x) ; b \leq x \leq c \}$$

Ini dapat diartikan sebagai berikut, diasumsikan negara-1 dan negara-3 membentuk suatu koalisi, sehingga negara-1 akan menjual minyaknya ke negara-3. Negara-3 akan membayar ke negara-1 yang memberi keuntungan x per barel, dengan catatan sedikit-dikitnya harus memberikan keuntungan b per barel. Untuk keadaan lain, bisa saja negara-1 menjual minyaknya ke negara-2 dengan harga yang tidak lebih dari harga yang memberi keuntungan sebesar c per barel, sehingga negara-3 tidak dapat membayar harga yang lebih dari yang dibayarkan oleh negara-2, sehingga itu merupakan kekalahan negara-3.