BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. LIMIT SUATU FUNGSI

Definisi 2.1.1

Misalkan I selang terbuka, a elemen I. Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi di setiap x elemen I (di x = a boleh tidak terdefinisi).

Maka limit f(x) jika x menuju a akan sama dengan L, ditulis :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jika untuk setiap $\in > 0$, yang cukup kecil, terdapat suatu $\delta > 0$, sedemikian sehingga berlaku :

$$| f(x) - L | < \in , \quad \text{bila} \quad 0 < | x-a | < \delta$$

Dengan perkataan lain, *definisi 2.1.1* menyatakan bahwa nilai fungsi f(x) akan menuju (dekat) ke L, jika x menuju (dekat) ke a. Nilai mutlak dari perbedaan (selisih) dari f(x) dan a dapat dibuat kecil, dengan memilih x cukup dekat ke a, tapi $x \neq a$.

2.2. DIFFERENSIAL DAN INTEGRAL

Definisi 2.2.1

Turunan dari fungsi f, adalah suatu fungsi yang ditulis dengan "f′", sedemikian sehingga nilai fungsi untuk setiap x dalam daerah definisi f diberikan oleh persamaan :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jika limit ini ada, dengan Δx sembarang perubahan pada nilai x.

Definisi 2.2.2

Jika fungsi f didefinisikan $y = f(x)$, maka derivatif dari y, ditulis dengan dy, adalah :

$$dy = f'(x)\ dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dengan dx merupakan differensial dari x, $dx = \Delta x$.

Catatan :

Persamaan (3) sering ditulis $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ dan menyatakan turunan pertama dari y terhadap x. Demikian juga $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ menyatakan turunan kedua dari y terhadap x. Dan $\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$ menyatakan turunan ke-n dari y ke x.

Definisi 2.2.3

Fungsi F disebut integral dari fungsi f pada selang I, jika berlaku $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x di I dan ditulis :

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

dengan C suatu konstanta.

Definisi 2.2.4

Jika suatu fungsi terdefinisi pada selang tertutup [a,b], maka integral tentu dari f dari a ke b, ditulis sebagai $\int_a^b f(x)\ dx$ adalah :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta_i\ x$$

apabila limit di ruas kanan ada.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ dan $\|\Delta\|$ panjang terbesar dari partisi Δ_i

Catatan :

Pada notasi $\int_a^b f(x)\,dx$, a disebut batas bawah dan b disebut batas atas.

2.3. PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Definisi 2.3.1

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang mengandung differensial atau turunan.

2.3.1. Persamaan Differensial Biasa

Definisi 2.3.2

Persamaan differensial biasa adalah persamaan yang mengandung satu variabel tak bebas atau lebih, satu variabel bebas dan satu turunan atau lebih dari variabel tak bebas terhadap variabel bebasnya.

Contoh 1 :

Persamaan $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

merupakan sebuah persamaan differensial biasa y(t) dan x(t) merupakan variabel tak bebas dan t merupakan variabel bebasnya.

2.3.2. Persamaan-persamaan Differensial Berubah Waktu dan Tak Berubah Waktu

Definisi 2.3.3

Persamaan differensial berubah waktu adalah persamaan differensial yang mengandung suku dengan koefisien variabel waktu t yang bebas.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.3.4

Persamaan differensial tak berubah waktu adalah suatu persamaan differensial yang tidak mengandung suku dengan koefisien variabel waktu t.

Contoh 2 :

Setiap persamaan differensial yang berbentuk

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

, variabel t menyatakan waktu dengan koefisien-koefisien a_o, a_1, ... , a_n, b_o, b_1, ... , b_m merupakan konstanta adalah tak berubah waktu.

Contoh 3 :

Persamaan differensial $t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$, dengan t variabel waktu, adalah berubah waktu karena $t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ mempunyai koefisien variabel waktu t, yaitu t^2.

2.3.3. Persamaan-persamaan Differensial Linier dan Tak Linier

Definisi 2.3.5

Suku linier adalah sebuah suku berderajat pertama dalam variabel tak bebas dan turunan-turunannya .

Definisi 2.3.6

Persamaan differensial linier adalah sebuah persamaan differensial yang merupakan jumlah suku-suku linier. Semua yang lain dari ini adalah persaaman differensial tak linier.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 4 :

Persamaan differensial :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\,\frac{dx(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

adalah sebuah persamaan differensial linier, karena setiap sukunya berderajat pertama.

Contoh 5 :

Persamaan differensial $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y = 0$ adalah tak linier, karena $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ berderajat kedua.

2.3.4. Operator Differensial D dan Persamaan Karakteristik

Diberikan persamaan differensial linier dengan koefisien konstanta orde ke-n

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_o y = x \quad \ldots (6)$$

dengan $y = y(t)$, $x = x(t)$ dan $a_o, a_1, \ldots, a_n$ koefisien-koefisien konstanta.

Didefinisikan operator differensial $D = \frac{d}{dt}$ dan orde ke-n $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$

Persamaan differensial di atas ditulis kembali menjadi :

$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + a_1 D_y + a_o y = x$ atau

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_o)\, y = x \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Definisi 2.3.7

Polinom dalam D

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_o$$

disebut polinom karakteristik.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Definisi 2.3.8

Persamaan

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 = 0 \quad \ldots (8)$$

disebut persamaan karakteristik.

Contoh 6 :

Diberikan persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x(t)$$

Polinom karakteristiknya adalah $D^2 + 3D + 2$ dan persamaan karakteristiknya $D^2 + 3D + 2 = 0$ atau $(D + 1)(D + 2) = 0$ yang mempunyai 2 akar karakteristik yaitu $D = -1$ dan $D = -2$.

2.4. VARIABEL KOMPLEKS

Definisi 2.4.1

Variabel kompleks s dinyatakan dalam bentuk $s = \sigma + j\omega = Re(s) + j\,Im(s)$, dengan σ dan ω merupakan variabel-variabel riil, dan $j = \sqrt{-1}$. $Re(s) = \sigma$ menyatakan bagian riil dan $Im(s) = \omega$ menyatakan bagian imajiner dari variabel kompleks s.

Definisi 2.4.2

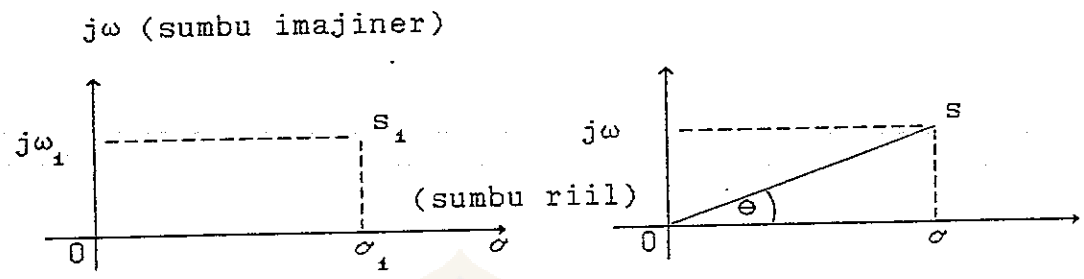
Konjugasi (sekawan) kompleks dari $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$, ditulis sebagai $\bar{s} = \sigma - j\omega$.

Definisi 2.4.3

Modulus atau harga mutlak suatu variabel kompleks $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$, ditulis $|s|$ diberikan oleh $|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ selalu positif atau nol.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Suatu variabel kompleks $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$; dapat dinyatakan dengan suatu titik pada bidang kompleks (bidang - s).



Gambar 2 Gambar 3

Gambar 2 melukiskan bidang-s dan suatu titik $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, $j = \sqrt{-1}$. Gambar 3 merupakan bidang-s dengan koordinat polar, dimana letak setiap titik pada bidang datarnya ditentukan secara tunggal oleh dua koordinat kutub σ dan θ. σ menyatakan besarnya s yang merupakan panjang vektor Os dan θ merupakan sudut yang terbentuk antara sumbu riil σ dengan vektor Os, dimana putaran yang berlawanan arah dengan arah jarum jam menyatakan sudut positif. σ dapat dinyatakan sebagai modulus s atau $\sigma = |s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega}{\sigma} \quad \text{atau} \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right).$$

Definisi 2.4.4

Sudut θ disebut argumen s, ditulis

$$\theta = \arg s = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

Sifat argumen : 1. $\operatorname{Arg}(s_1 . s_2) = \operatorname{Arg} s_1 + \operatorname{Arg} s_2$ ..... (9)

2. $\operatorname{Arg}\left(\frac{s_1}{s_2}\right) = \operatorname{Arg} s_1 - \operatorname{Arg} s_2$ ..... (10)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5. PERLUASAN PECAHAN PARSIAL

Diberikan fungsi rasional

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

dengan $n \geq m$ koefisien-koefisien a_0, a_1, ... , a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, ... , b_{m-1}, b_m merupakan konstanta.

Misalkan persamaan polinom penyebutnya mempunyai n_i akar-akar yang sama dengan $-p_i$. Persamaan (11) dapat dituliskan sebagai :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i}{\prod_{i=1}^{r} (s + p_i)^{n_i}} \quad \text{dengan} \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n \quad \ldots \quad (12$$

Definisi 2.5.1

Pernyataan perluasan pecahan parsial dari fungsi rasional F(s) adalah pernyataan dalam bentuk

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s + p_i)^k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

dengan $b_n = 0$ kecuali untuk $m = n$

Koefisien-koefisien C_{ik} dalam perluasan pecahan parsial di atas diberikan oleh :

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left[(s + p_i)^{n_i} F(s) \right] \Big|_{s = p_i} \quad (14$$

Jika tak ada satupun akar-akar yang berulang, maka

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{ik}}{s + p_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan $C_{ik} = (s + p_i)\ F(s)\ |_{s = p_i}$

Contoh 7 :

Diberikan fungsi rasional dari $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2\ (s+2)}$

Perluasan pecahan parsial dari F(s) adalah :

$$F(s) = b_3 + \frac{C_{11}}{s+1} + \frac{C_{12}}{(s+1)^2} + \frac{C_{21}}{s+2}$$

Koefisien-koefisien b_3, C_{11}, C_{12}, C_{21}, diberikan oleh :

$b_3 = 0$, karena $m \neq n$

$$C_{11} = \frac{d}{ds}\ (s+1)^2\ F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\ \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$C_{12} = (s+1)^2\ F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$C_{21} = (s+2)\ F(s)\Big|_{s=-2} = 1$$

Jadi : $F(s) = -\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s+2}$

2.6. TRANSFORMASI LAPLACE

Definisi 2.6.1

Misalkan f(t) adalah suatu fungsi riil dari variabel riil t yang didefinisikan untuk t > 0 , maka

$$\mathcal{L}\ [f(t)] \equiv F(s) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \int_{\epsilon}^{T} f(t)\ e^{-st}\ dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} f(t)\ e^{-st}\ dt \quad , 0 < \epsilon < T \ldots\ldots \quad (16)$$

disebut transformasi Laplace dari f(t) dengan s suatu variabel kompleks dan variabel t menyatakan waktu.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 8 :

Transformasi Laplace dari e^{-t} adalah :

$$\mathfrak{L}\,(e^{-t}) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}\, e^{-st}\, dt = \frac{-1}{(s+1)}\; e^{-(s+1)t}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+1}$$

2.6.1. Transformasi Laplace Invers

Definisi 2.6.2

Jika transformasi Laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s), yaitu jika $\mathfrak{L}\,[\,f(t)\,] = F(s)$, maka f(t) disebut suatu transformasi Laplace invers dari F(s) dan secara simbolis ditulis :

$$f(t) \equiv \mathfrak{L}^{-1}\, F(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Contoh 9 :

Dari contoh 8, maka $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$

Sifat 1 :

Jika $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ masing-masing merupakan transformasi Laplace dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$, maka $a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$ adalah transformasi Laplace dari $a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ dengan a_1 dan a_2 merupakan konstanta sembarang.

Sifat 2 :

Jika $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ masing-masing merupakan transformasi Laplace invers dari $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka $b_1f_1(t) + b_2f_2(t)$ adalah transformasi Laplace invers dari $b_1F_1(s) + b_2F_2(s)$ dengan b_1 dan b_2 merupakan konstanta sembarang.

Berikut ini sebuah tabel dari transformasi Laplace yang akan membantu dalam teknik perluasan pecahan parsial.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Tabel 1*

FUNGSI WAKTU		TRANSFORMASI LAPLACE
Denyut Satuan	$\delta(t)$	1
Tangga Satuan	$U(t) = 1$	$1/s$
Tanjakan Satuan	t	$1/s^2$
Polinom	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Pangkat	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Gelombang Sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Gelombang Cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

(*) Dikutip dari buku Feedback and Control System, Joseph I.D. halaman 60.

2.6.2. Transformasi Laplace Invers dengan Menggunakan Perluasan Pecahan Parsial

Transformasi Laplace invers dapat digunakan di dalam menentukan jawaban dari penyelesaian sebuah persamaan differensial biasa linier dengan koefisien konstanta. Berikut ini bentuk umum transformasi Laplace invers dengan menggunakan perluasan pecahan parsial.

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k}\right]$$

$$= b_n\,\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{-p_i t} \qquad \ldots\ldots (17)$$

Contoh 10 :

Transformasi Laplace invers dari fungsi :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

diberikan oleh :

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[1+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right]$$
$$= \mathfrak{L}^{-1}[1] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]$$
$$= \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Contoh 11 :

Transformasi Laplace invers dari fungsi

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

diberikan oleh :

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right]$$
$$= \mathfrak{L}^{-}\left[-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+2}\right]$$
$$= -\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$
$$= -e^{t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

2.7. PENERAPAN TRANSFORMASI LAPLACE UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA LINIER DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA

Ada dua golongan persamaan umum yang akan dibicarakan, pertama mempunyai bentuk :

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

dengan $y = y(t)$, $x = x(t)$, koefisien-koefisien a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) merupakan konstanta.

Syarat-syarat awal untuk persamaan ini dituliskan sebagai

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0} \underline{\underline{df}} \; y_o^{\,k} \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots , n-1$$

dengan $y_o^{\,k}$ merupakan konstanta.

Transformasi Laplace dari turunan $\frac{d^i y}{dt^i}$ adalah :

$$\mathfrak{L}\left(\frac{d^i y}{dt^i}\right) = s^i\, Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\, y_o^{\,k} \;, \text{ untuk } i > 0 \ldots (19)$$

dengan $Y(s) = \mathfrak{L}\,[y(t)]$ dan $y_o^{\,k} = \left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t\,=\,o^+}$

Maka transformasi Laplace dari persamaan (18) diberikan oleh :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^i\, Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\, y_o^{\,k}\right)\right] = X(s) \ldots\ldots\ldots (20)$$

Dan diperoleh :

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i\, s^{i-1-k}\, y_o^{\,k}}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} \ldots\ldots\ldots (21)$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan (18) adalah :

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\,[\,Y(s)\,]$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i\, s^{i-1-k}\, y_o^{\,k}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]$$

$$= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i\, s^{i-1-k}\, y_o^{\,k}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Contoh 12 :

Diberikan sebuah persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = U(t) = \text{Tangga Satuan}$$

dengan syarat-syarat awal $y(0^+) = -1$ dan $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 2$ dan $y = y(t)$.

Penyelesaian persamaan differensial ini adalah sebagai berikut :

Diketahui $n = 2$, $y_0^0 = -1$, $y_0^1 = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, dan $a_2 = 1$. Maka transformasi Laplace dari persamaan differensial tersebut dengan menggunakan persamaan (20) adalah :

$$2\,Y(s) + 3\,[s\,Y(s) + 1] + 1\,[s^2\,Y(s) + s - 2] = \frac{1}{s} \quad \text{atau}$$

$$(s^2 + 3s + 2)\,Y(s) = \frac{-(s^2 + s - 1)}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-(s^2 + s - 1)}{s\,(s^2 + 3s + 2)}$$

Dengan perluasan pecahan parsial didapat :

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2\,(s+2)}$$

Sehingga penyelesaian persamaan differensialnya adalah :

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\,[Y(s)]$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 - 2e^{-t} - e^{-2t}),\ t > 0$$

Golongan persamaan yang kedua adalah persamaan dengan koefisien konstanta dalam bentuk :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan $y = y(t)$, $x = x(t)$ dan $m \leq n$

Transformasi Laplace dari persamaan (23) diberikan oleh :

$$\sum_{i=0}^{n} \left[a_i \left(s^i \, Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y_0^{\,k} \right) \right] =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \left[b_i \left(s^i \, X(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \, x_0^k \right) \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

dengan $x_0^k = \left. \dfrac{d^k x}{dt^k} \right|_{t=0^+}$, maka

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \right] X(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} b_i \, s^{i-1-k} \, x_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} +$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i \, s^{i-1-k} \, y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan (23) adalah :

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \, x(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} b_i \, s^{i-1-k} \, x_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \right] +$$

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i \, s^{i-1-k} \, y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Contoh 13 :

Diberikan sebuah persamaan differensial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{dx}{dt} + 3x$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dengan syarat-syarat awal $y_o^o = 1$, $y_o^1 = 0$ dan diberikan $x(t) = e^{-4t}$.

Penyelesaian persamaan differensial ini ditentukan sebagai berikut :

Dari persamaan differensial tersebut diketahui n = 2, a_o = 2, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, m = 1, $b_o = 3$, $b_1 = 1$, dan $x_o^o = \lim_{t \to o} e^{-4t} = 1$

Dengan menggunakan persamaan (25) diperoleh :

$$Y(s) = \left[\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right]\left[\frac{1}{s+4}\right] + \frac{s+3}{s^2+3s+2} + \frac{1}{s^2+3s+2}$$

selanjutnya dengan teknik perluasan pecahan parsial didapat :

$$Y(s) = \frac{11}{3\,(s+1)} - \frac{5}{2\,(s+2)} - \frac{1}{6\,(s+4)}$$

Sehingga penyelesaian persamaan differensialnya adalah :

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\,[Y(s)]$$

$$= \frac{11}{3}\,\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{5}{2}\,\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \frac{1}{6}\,\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]$$

$$= \frac{11}{1}\,e^{-t} - \frac{5}{2}\,e^{-2t} - \frac{1}{6}\,e^{-4t}$$

2.8. PETA KUTUB NOL

Fungsi-fungsi rasional F(s) dapat ditulis kembali sebagai :

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=o}^{m} \frac{b_i}{b_m}\, s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i\, s^i} = \frac{b_m \prod_{i=o}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=o}^{n} (s + p_i)} \quad \ldots\ldots (27)$$

dengan suku-suku $s + z_i$ merupakan faktor-faktor dari

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

polinom pembilang dan suku-suku $s + p_i$ merupakan faktor-faktor dari polinom penyebut dan s merupakan variabel kompleks

Definisi 2.8.1

Harga-harga variabel kompleks s untuk mana $|F(s)|$ (harga mutlak dari F(s)) menjadi nol disebut nol-nol dari F(s), yaitu $s = - z_i$ untuk i = 1, 2, ... , m.

Definisi 2.8.2

Harga-harga variabel kompleks s untuk mana $|F(s)|$ menjadi tak terhingga disebut kutub-kutub dari F(s), yaitu $s = - p_i$ untuk i = 1, 2, ... ,n.

Contoh 14 :

Misalnya F(s) diberikan oleh :

$$F(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6}$$

yangdapat ditulis kembali :

$$F(s) : \frac{2(s + 1)(s - 2)}{(s + 3)(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

maka F(s) mempunyai nol-nol berhingga di s = -1 dan s = 2 dan sebuah nol di $s = \infty$ ∴ F(s) mempunyai kutub-kutub berhingga di s = -3, s = -1 - j dan s = -1 + j.

Definisi 2.8.3

Tempat sebuah kutub di bidang -s ditandai sebuah lambang (x) dan tempat sebuah nol di bidang -s ditandai oleh sebuah lambang lingkaran kecil (o). Bidang s yang meliputi kutub-kutub dan nol-nol berhingga dari F(s) disebut Peta kutub nol dari F(s).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

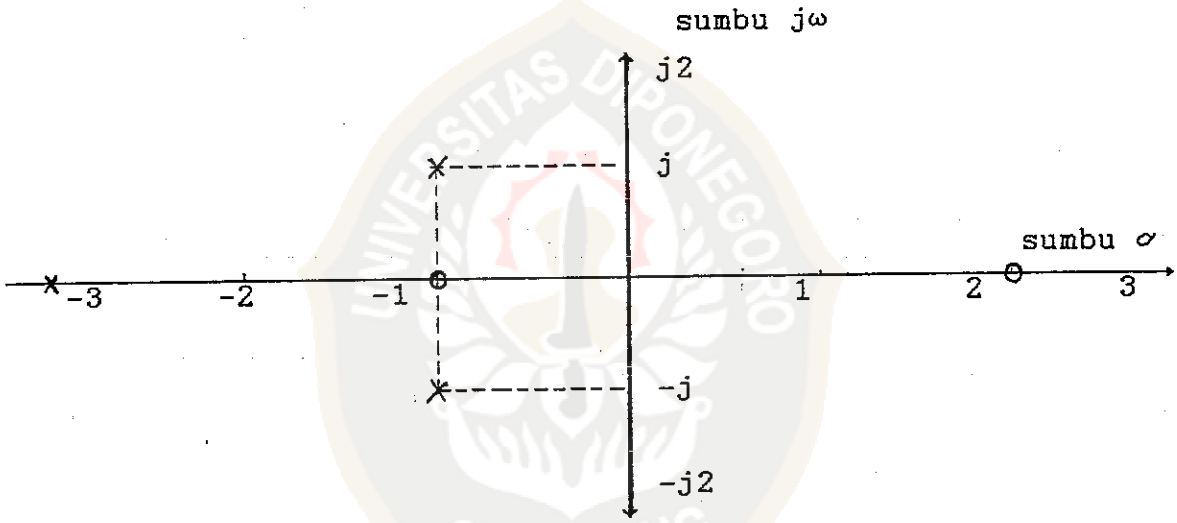
Contoh 15 :

Fungsi rasional

$$F(s) = \frac{(s + 1)\ (s - 2)}{(s + 3)\ (s + 1 + j)\ (s + 1 - j)}$$

mempunyai kutub-kutub berhingga s = -3, s = - 1 - j dan s = - 1 + j dan nol-nol berhingga s = - 1 dan s = 2.

Peta kutub-nol dari F(s) diperlihatkan dalam gambar di bawah ini.



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)