BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. HIMPUNAN DAN FUNGSI

Himpunan adalah suatu koleksi dari obyek - obyek. Dapat berupa suatu koleksi dari orang-orang, buku-buku, warna-warna atau koleksi dari perintah-perintah dan sebagainya.

Sedang obyek yang berada dalam suatu himpunan disebut elemen atau anggota.

Bila x suatu anggota dari himpunan S, dapat ditulis sebagai $x \in S$. Dibaca x termasuk dalam himpunan S atau x ada didalam himpunan S.

Contoh :

1. Himpunan dari bilangan bulat positif.
2. Himpunan dari instruksi-instruksi Fortran.

Definisi 2.1.1.

Dua himpunan H dan K disebut sama atau berimpitan bila dan hanya bila setiap anggota dari H menjadi anggota dari K dan sebaliknya.

$$H = K \text{ bhb } (\forall x)\ x \in H \Longleftrightarrow x \in K$$

Contoh 2.1.1

1. H = { 1,3,5,7} dan K = {1,5,3,7}.
   maka H = K

Bila S suatu himpunan dan P suatu sifat (atau mungkin suatu kombinasi dari beberapa sifat) yang mungkin dimiliki atau tidak dimiliki oleh elemen X dari

S. Maka kita dapat menyatakan suatu himpunan baru dengan notasi.

$$\{ x \in S \mid P(x) \}$$

Notasi diatas menyatakan himpunan dari semua anggota yang berada dalam S dan mempunyai sifat P.

Contoh :

1. Himpunan dari semua bilangan bulat positif ditulis dengan notasi :

$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid x > 0 \} = \mathbb{P}$$

Definisi 2.1.2.

Himpunan H dikatakan menjadi himpunan bagian (subset) dari K dengan $H \subset K$, bila dan hanya bila setiap anggota dari H menjadi anggota dari K.

$$H \subset K \text{ bhb } (Ax)\ X \in H \longrightarrow x \in K.$$

Contoh 2.1.2.

1. $\mathbb{P}$ = {bilangan bulat positif}

   $\mathbb{Z}$ = {bilangan bulat negatif, nol, dan bilangan bulat positif}

   maka $\mathbb{P} \subset \mathbb{Z}$

2. $\mathbb{Q}$ = {bilangan rasional)

   $\mathbb{R}$ = {bilangan real}

   maka $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Definisi 2.1.3.

Hasil kali Kartesian dari himpunan H dan K, ditunjukkan dengan H x K, adalah himpunan dari semua pasangan berurutan (h,k) sedemikian hingga $h \in H$ dan $k \in K$ maka,

$$H \times K = \left\{ (h,k) \mid h \in H,\ k \in K \right\}$$

Hasil kali Kartesian dari n himpunan yaitu :

$\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3, \ldots\ldots\ldots \mathbb{B}_n$. adalah :

$$\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_3 \times \ldots\ldots \times \mathbb{B}_n = \left\{ (b_1, b_2, \ldots b_n) \mid b_i \in B \text{ , } i=1..n \right\}$$

Bila $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3 = \ldots\ldots = \mathbb{B}_n = \mathbb{B}$, maka hasil kali Kartesian diatas dapat ditulis sebagai $\mathbb{B}^n$.

Contoh :

1. $\mathbb{B}_1 = \{0,1\}$, $\mathbb{B}_2 = \{0,1\}$, $\mathbb{B}_3 = \{0,1\}$ maka

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_3 &= \{ (0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),\\ &\quad (1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1) \}\\ &= \mathbb{B}^3\end{aligned}$$

Definisi 2.1.4.

Himpunan $S_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{B}^n \mid d(x,y) \le r \right\}$ disebut bidang dari bola dengan jarak r dari $x \in \mathbb{B}^n$.

Definisi 2.1.5.

Suatu fungsi dari S ke T dimana S sebagai daerah sumber (dominan) dan T sebagai daerah kawan (co-domain) ialah suatu aturan yang pada setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dalam T.

Contoh 2.1.5.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

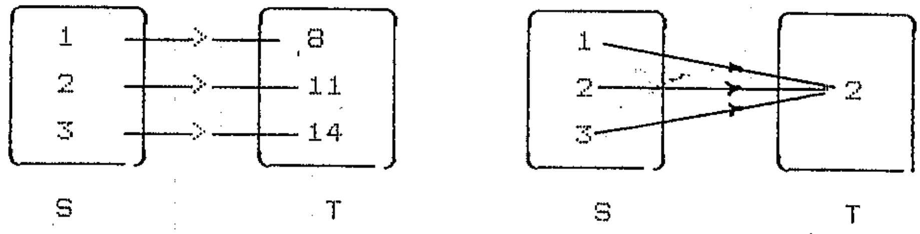
   $f(x) = 3x + 5$, untuk $x \in \{1,2,3\}$, maka

   $f(x) \in \{8,11,14\}$.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2$, untuk $x \in \{1,2,3\}$, maka

$f(x) = \{2\}$



Definisi 2.1.6..

Orde atau Kardinalitas dari suatu himpunan S adalah jumlah dari elemen-elemen dalam S dan ditulis $|\ S\ |$

Contoh 2.1.6.

1. Orde dari himpunan $\{1,3,...,2n-1\} = n$.
2. $A = \{\ x \in \mathbb{Z}\ |\ 0 < x < 100,\ x = 3n-2,\ n \in \mathbb{P}\ \}$, maka orde dari $A = |\ A\ | = 33$.

Definisi 2.1.7.

Suatu fungsi $f : S \longrightarrow T$ dikatakan satu-satu bila dan hanya bila untuk setiap $t \in T$ atau $f(s) \in T$, terdapat paling banyak satu $s \in S$ sedemikian sehingga $f(s) = t$, dengan kata lain bila untuk suatu elemen dari T yang diberikan, paling banyak memiliki satu kawan dari daerah asal S. Dari fungsi $f : S \longrightarrow T$ satu - satu disebut pula suatu injektif.

Contoh 2.1.7.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{P}$

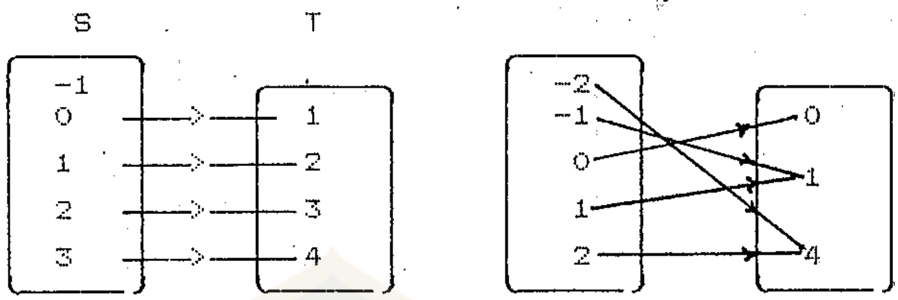
   $f(x) = x + 1$, untuk $x \in \{\ -1,0,1,2,3\}$

maka $f(x) = \{1,2,3,4\}$

2. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{P}$

$f(x) = x^2$ untuk $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$

maka $f(x) = \{0,1,4\}$



Contoh no. 1 adalah injektif sedangkan contoh no. 2 bukan injektif.

Definisi 2.1.8.

Suatu fungsi $f : S \longrightarrow T$ adalah onto bila dan hanya bila untuk setiap $t \in T$, terdapat paling sedikit $s \in S$ sedemikian hingga $f(s) = t$; dan fungsi onto disebut pula surjektif.

Contoh 2.1.8.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

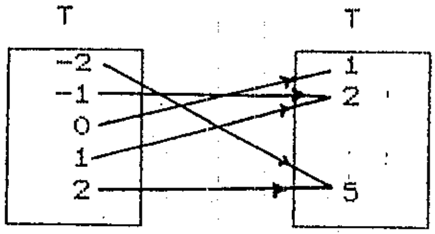
$f(x) = x^2 + 1$ untuk $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$

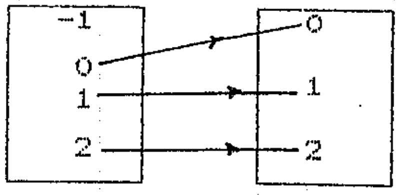
maka $f(x) = \{1,2,5\}$

2. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = x$ untuk $x \in \{-1,0,1,2\}$

maka $f(x) = \{0,1,2\}$





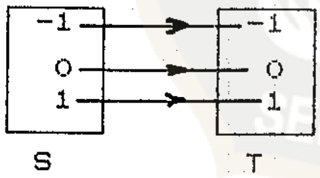
Contoh No.1 merupakan Surjektif dan contoh no.2 bukan merupakan Surjektif.

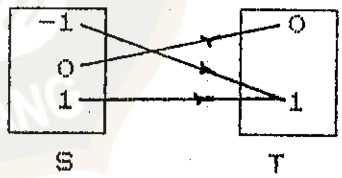
Definisi 2.1.9.

Suatu fungsi $f : S \longrightarrow T$ diakatakan bijektif atau korespondensi satu-satu, bila f satu-satu dan onto atau bila f injektif dan surjektif

Contoh 2.1.9.

1. $f : x = x$ untuk $x \in \{-1,0,1\}$
   maka $f(x) \in \{-1,0,1\}$
2. $f : x \longrightarrow X^2$ untuk $X \in \{-1,0,1\}$
   maka $f(x) \in \{0,1\}$





Contoh no 1 merupakan bijektif dan no.2 bukan merupakan bijektif.

Definisi 2.1.10.

Relasi biner pada suatu himpunan A dikatakan suatu relasi ekuivalensi pada A bila untuk semua a,b,c $\in$ A berlaku

1. a R b (sifat refleksif)
2. Bila a R b, maka b R a (sifat simetris)

3. Bila a R b dan b R c, maka a R c (sifat transitif)

Definisi 2.1.11.

Bila A suatu himpunan dan bila R suatu relasi ekuivalensi pada A, maka klas ekuivalensi dari $a \in A$ adalah himpunan $[a] = \{x \in A \mid a\ R\ x\}$. Yang memuat a

Contoh :

1. Misal $\mathbb{Z}$ himpunan dari semua bilangan bulat, diberikan $a, b, \in \mathbb{Z}$ dan didefinisikan relasi a R b bila a − b suatu bilangan bulat genap. Maka relasi R adalah relasi ekuivalensi.
   a. Karena 0 = a−a suatu genap, maka a R a
   b. Bila a R b, sedemikian sehingga, bila a−b genap maka b − a = − (a−b) juga genap, dengan demikian maka b R a.
   c. Bila a R b dan b R c maka keduanya a R b dan b R c genap.
   Dengan demikian a − c = (a−b) + (b−c) juga genap, terbukti bahwa a R c.
   Dalam hal ini $\mathbb{N}$ = {bilangan bulat non negatif} merupakan klas ekuivalensi dari $\mathbb{Z}$.

2.2. MATRIKS

Definisi 2.2.1.

Suatu matriks m x n adalah suatu susunan empat persegi panjang dari mn elemen, dengan m baris dan n kolom serta dinyatakan dengan :

$$\left[s_{ij}\right]_{m \times n} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana s_{ij} adalah elemen-elemen matriks pada baris ke i dan kolom ke j

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks 3 x 4

2. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks 4 x 5

Definisi 2.2.2.

Suatu matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dimana banyaknya baris dan banyaknya kolom sama. Dan elemen-elemen yang berada pada garis lurus dari pojok atau sudut kiri atas sampai pojok kanan kanan bawah secara silang dikatakan bahwa elemen-elemen tersebut berada pada diagonal utama.

Contoh 2.2.2.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

elemen 2.1.2. terada pada diagonal utama.

Definisi 2.2.3.

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar, dimana elemen-elemen pada diagonal utamanya adalah 1, dan elemen lainnya adalah 0.

Contoh 2.2.3.

1. Matriks identitas 3 x 3 adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks identitas 4 x 4 adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.4.

Dua matriks A dan B disebut sama, bila

a. A dan B sejenis atau sama ukuran/ordonya

b. Setiap unsur seletak sama

Contoh 2.2.4.

1.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Dikatakan bahwa A = B

2.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dikatakan bahwa A = B

Definisi 2.2.5.

Jumlah dua matriks $[A_{ij}]_{mxn}$ dengan matrik $[B_{ij}]_{mxn}$ menghasilkan suatu matriks baru $[C_{ij}]_{mxn}$. Dimana ukuran/ordo ketiga matriks tersebut sama dan C_{ij} adalah penjumlahan dari A_{ij} dengan B_{ij}.

Contoh : 2.2.5

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat dari penjumlahan matriks :

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B+C) = (A+B) + C$

Catatan.

1. Penjumlahan dua buah matriks hanya didefinisikan pada dua buah matriks yang sejenis saja.
2. Jumlah dua matriks yang sejenis merupakan matriks baru dengan ukuran yang sama.

Definisi 2.2.6.

Perkalian dua matriks A_{mxn} dengan B_{pxq}, jika $n = p$ menghasilkan matriks baru C_{mxq} dengan unsur-unsur :

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

$$C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{kj}$$

Catatan

1. Perkalian matriks AB dapat didefinisikan, bila banyaknya kolom matriks A = banyaknya baris matriks B.
2. Hasil kali dua matriks AB adalah suatu matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya baris A, dan banyaknya kolom = banyaknya kolom B.
3. Umumnya $AB \neq BA$

Sifat-sifat perkalian matriks

1. $(AB)\,C = A\,(BC)$
2. $A\,(B + C) = AB + AC$

Contoh 2.2.6.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Definisi 2.2.7.

Matriks B disebut matriks transpose dari matriks A yang berukuran m x n bila ukuran B adalah n x m dan untuk setiap i dan j berlaku $b_{ij} = a_{ji}$ ditulis $B = A^T$

Contoh 2.2.7.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat matriks transpose

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A+B)^T = B^T + A^T$
3. $(A^T)^T = A^{TT} = A$

2.3. KOMBINASI DAN DISTRIBUSI BINOMIUM

Definisi 2.3.1.

Kombinasi adalah cara memilih k unsur dari suatu himpunan yang terdiri dari n unsur dengan tidak memperhatikan urutannya, dan $k \le n$

Ditulis $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$ dimana

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times n.$

Contoh 2.3.1.

1. Ada 4 orang bernama A,B,C dan D. Kita hendak memilih 2 orang dari ke 4 orang tersebut. Ada berapa pilihan ?

Jawab : $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times1\times2} = 6$

Yaitu : AB, AC, AD, BC, BD, dan CD

Definisi 2.3.2.

Peluang adalah suatu kejadian dari n percobaan atau usaha yang menghasilkan s dari percobaan itu yang sukses dan yang lainnya gagal dan ditulis dengan :

$$P = \frac{s}{n}$$

Contoh 2.3.2.

1. Dalam pelemparan sebuah dadu, peluang keluarnya mata genap adalah :

$$p\ (\text{Genap}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ada dua prinsip tentang peluang yang akan digunakan yaitu :

1. Kejadian yang saling bebas

   Dua kejadian A dan B disebut kejadian-kejadian yang saling bebas jika proses terjadinya A tidak mempengaruhi proses terjadinya atau tidak terjadinya kejadian B.

   Sehingga $P\ (A \cap B) = P\ (A) \times P\ (B)$

2. Kejadian yang saling lepas

   Dua kejadian A dan B disebut kejadian-kejadian yang saling lepas, jika himpunan A dan B saling asing atau tidak ada hasil yang menjadi anggota kedua himpunan ($A \cap B = \phi$)

Contoh

1. Bila dalam suatu pelemparan dua buah dadu , hitam dan putih, peluang dari keduanya keluar angka 6 adalah :

$$P\ (6 \cap 6) = P\ (6) \times P\ (6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

2. Sedang peluang dari jumlah 10 adalah :

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

(Disini hitam 4 putih 6, keduanya 5, hitam 6 putih 4).

Definisi 2.3.3.

Bila suatu usaha/percobaan Binomial dapat menghasilkan percobaan yang sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang q = 1 - p.

Maka distribusi peluang perubahan acak binomial x, yaitu banyaknya sukses dalam n kali percobaan ialah :

$$B\ (x;\ n, p) = \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} p^x\ q^{n-x}$$

Contoh 2,3,3

1. Suatu suku cadang dapat menahan uji goncangan tertentu dengan peluang 3/4. Hitunglah peluang bahwa tepat dua dari empat suku cadang yang diuji tidak akan rusak

Jawab

Disini $P = \frac{3}{4}$; $x = 2$; $n = 4$ dan $q = 1 - p = \frac{1}{4}$

$$B\ (2;\ 4,\ 3/4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \end{bmatrix}^2$$

- Untuk setiap 2,3 dan 4 $\in \mathbb{P}$ maka :

$(2.3).4 = 2.(3.4)$

$6 . 4 = 2 . 12 = 24$

2. $\mathbb{Z}$ = Himpunan semua bilangan bulat dengan operasi perkalian merupakan monoid.

   - Karena untuk ke bilangan -2 dan $3 \in \mathbb{Z}$, maka

     $-2.3 = -6 \in \mathbb{Z}$

   - Untuk bilangan $-2,3$ dan $4 \in \mathbb{Z}$, maka

     $(-2.3).4 = -2\ (3.4)$

     $-6 . 4 = -2 . 12 = -12$

     $-12 \in \mathbb{Z}$

   - Untuk bilangan $8 \in \mathbb{Z}$ terdapat bilangan $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $1. 8 = 8 \in \mathbb{Z}$

3. R = himpunan semua bilangan real dengan operasi perkalian merupakan suatu grup.

   - Karena untuk -2 dan $3 \in \mathbb{R}$, maka $-2.3 = -6 \in \mathbb{R}$

   - Untuk bilangan -2, 3 dan $4 \in \mathbb{R}$ maka,

     $(-2.3).4 = -2\ (3.4)$

     $-6 . 4 = -2 . 12 = -24 \in \mathbb{R}$,

   - Untuk bilangan $5 \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan $1 \in \mathbb{R}$ sehingga : $5 . 1 = 1.5 = 5 \in \mathbb{R}$

   - Untuk bilangan $3 \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ sehingga : $3 . \frac{1}{3} = \frac{1}{3} . 3 = 1 \in \mathbb{R}$.

   <u>Catatan</u>

   - Suatu grup dikatakan abelian bila setiap $a, b \in G$ maka $a . b = b.a$

Definisi 2.4.4.

Suatu himpunan bagian tak kosong H dari suatu grup G, disebut suatu sub grup dari G. Bila dengan operasi yang ada pada G, maka H juga merupakan grup.

Contoh 2.4.4.

1. $\mathbb{Z}$ = himpunan semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan merupakan sub grup dari $\mathbb{R}$.
   - Karena untuk bilangan −2, dan −3 $\in \mathbb{Z}$, maka

     $(-2 + (-3)) + (-4) = -2 + (-3 + (-4))$

     $-5 + (-4) = -2 + (-7) = -9 \in \mathbb{Z}$
   - Untuk bilangan $-2 \in \mathbb{Z}$ terdapat bilangan $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga : $(-2) + 0 = 0 + (-2) = -2 \in \mathbb{Z}$
   - Untuk bilangan $-2 \in \mathbb{Z}$ terdapat bilangan $2 \in \mathbb{Z}$ sehingga : $(-2) + 2 = 2 + (-2) = 0 \in \mathbb{Z}$

Definisi 2.4.5.

Koset dari H dalam G

Misal G suatu grup dan H suatu Sub grup dari G untuk suatu a $\in$ G, maka himpunan aH = { ah | h $\in$ H } disebut koset kiri dari H dalam G. Analog dengan cara diatas maka Ha = { ha | h $\in$ H } disebut koset kanan dari H dalam G.

Contoh 2.4.5.

1. Misal H = { 0,3,6 } dalam Z_9 dengan operasi penjumlahan. Dalam hal ini operasi grupnya adalah penjumlahan, dan digunakan notasi a + h untuk mengganti aH

   Maka koset dari H dalam Z_9 adalah :

$$0 + H = \{0,3,6\} = 3 + H = 6 + H$$
$$1 + H = \{1,4,7\} = 4 + H = 7 + H$$
$$2 + H = \{2,5,8\} = 5 + H = 8 + H.$$

2.5. HOMO MORFISMA GRUP DAN ISOMORFISMA

Definisi 2.5.1.

Suatu fungsi $f : G \longrightarrow \overline{G}$ adalah homomorfisma dari suatu grup G, sedemikian sehingga

$$f(a.b) = f(a).f(b), \text{ untuk semua } a,b \in G$$

Contoh 2.5.1.

1. Misal G grup dari bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan misal $\overline{G} = G$. Untuk setiap $x \in G$ didefinisikan $\phi(x) = 2x$, maka ϕ adalah suatu homomorfisma grup, karena :

$$\phi(x + Y) = 2(x + y)$$
$$= 2x + 2y$$
$$= \phi(x) + \phi(y)$$

Definisi 2.5.2.

Isomorfisma grup adalah suatu isomorfisma ϕ dari suatu grup G ke suatu grup $\overline{G}$, yaitu fungsi bijektif dari G ke $\overline{G}$ sehingga

$$\phi(a.b) = \phi(a) . \phi(b)$$

Untuk semua $a,b \in G$.

Bila ada suatu isomorfisma dari G ke $\overline{G}$, maka dikatakan bahwa G dan $\overline{G}$ isomorfisma ditulis G $\overline{G}$

Contoh 2.5.2.

1. Misal G adalah grup dari bilangan Real positif dengan operasi perkalian, dan $\overline{G}$ grup dari semua

bilangan Real dengan operasi penjumlahan.

Didefinisikan f : G $\longrightarrow$ $\bar{G}$ dengan f (x) $= {}^{10}$ Log x

- Misal f(x) = f(y), maka

$$^{10}\log x = {}^{10}\log y$$

sehingga x = y

Dengan demikian f adalah satu-satu (injektif).

- Misal x,y $\in \bar{G}$, maka

$$f(x) + f(y) = {}^{10}\log + {}^{10}\log y$$

$$= {}^{10}\log xy$$

$$= f\ (xy) = f\ (x)\ .\ f\ (y)$$

Dengan demikian f adalah onto (Surjektif).

Karena fsatu-satu dan onto, maka f adalah bijektif.

Sehingga f merupakan isomorfisma.

Jadi G isomorfis dengan $\bar{G}$

Teorema 2.5.1.

Asumsikan bahwa f : S $\longrightarrow$ T suatu homomorfisma dan misalkan f (s) = { f (s) $\in$T | s $\in$S} menunjukkan bayangan dari f.

a. Bila S suatu semigrup, maka f (s) semigrup juga

b. Bila S suatu monoid dengan elemen identitas e, maka f (s) juga suatu monoid dengan elemen identitas f (e).

c. Bila S suatu grup, maka f (s) juga suatu grup dan f $(x)^{-1}$ = f (x^{-1}) untuk semua x $\in$ S.

2.6. GRUP - GRUP ADDITIF ABELIAN.

Definisi 2.6.1.

Suatu grup G disebut abelian (atau komutatif) bila untuk setiap $a,b \in G$,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Operasi biner yang dilambangkan dengan tanda " + " disebut penjumlahan (addisi), dengan elemen identitasnya 0 dan elemen invers dari x adalah −x. Semua grup disini adalah abelian; dan memenuhi

$$x + y = y + x$$

Didalam permasalahan sandi, elemen-elemen dari $\mathbb{B}^n$ ditulis tanpa tanda kurung dan tanda koma.

Contoh :

1 (1,0,1,1,0,0) + (0,1,1,0,1,0) = (1,1,0,1,1,0)

ditulis sebagai

101100 + 011010 = 110110.