BAB II

EKUIPOLLENSI, SIMILARITAS DAN ORDINAL

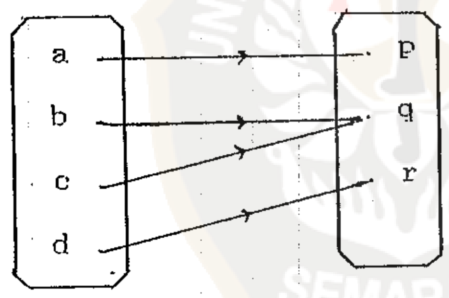
2.1. KARTESIAN PRODUCT (HASIL KALI KARTESIAN)

2.1.1 Fungsi dan Keluarga

Definisi 1 :

Fungsi Into (Fungsi) adalah suatu relasi dimana setiap elemen dari domain (daerah asal) dikawankan tepat satu di kodomain (daerah kawan) dan tidak harus untuk sebaliknya.

Contoh 1.



Dari gambar terlihat bahwa f^{-1} bukan fungsi, karena q mempunyai dua kawan (bayangan) yaitu b dan c.

$f(a) = p, \quad f(b) = q, \quad f(c) = q, \quad f(d) = r,$

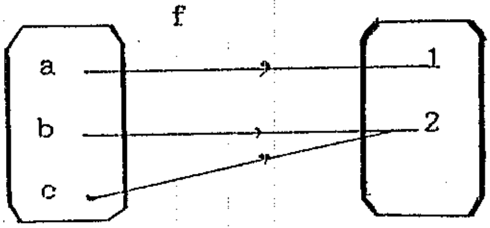
Jadi $f = \{(a,p), (b,q), (c,q), (d,r)\}$

Dengan demikian sebuah fungsi adalah himpunan pasangan berurutan dimana koordinat pertama dari setiap pasangan selalu berbeda.

Definisi 2 :

Fungsi Onto (kepada) adalah suatu fungsi, dimana setiap elemen domain dikawankan kepada elemen kodomain dan setiap elemen kodomain merupakan bayangan dari sedikitnya satu elemen domain.

Contoh 2.



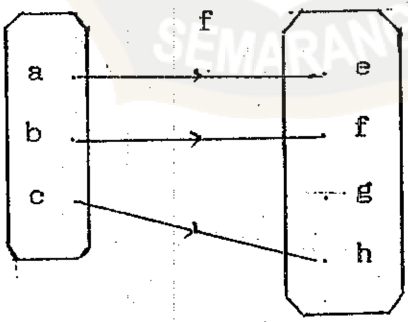
Definisi 3 :

Fungsi satu-satu adalah suatu fungsi, dimana setiap elemen domain dikawankan tepat satu di kodomain dan tidak ada dua elemen domain yang berbeda mempunyai bayangan yang sama.

Fungsi satu-satu belum tentu onto, sehingga setiap elemen dari kodomain tidak harus menjadi bayangan dari elemen-elemen domain.

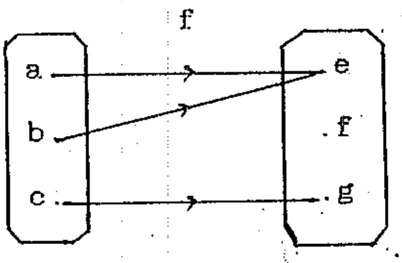
Contoh 3.

1.



f : fungsi satu-satu , terlihat bahwa g tidak menjadi bayangan.

2.



f : bukan fungsi satu-satu, karena $a \neq b$ mempunyai bayangan yang sama yaitu e.

Definisi 4 :

Korespondensi satu-satu (ekuipollensi) adalah suatu fungsi, dimana setiap elemen dominan dikawankan tepat satu di kodomain dan setiap kodomain merupakan bayangan dari satu elemen domain.

atau :

Ekuipollensi adalah fungsi satu-satu dan Onto, sehingga, jika f : fungsi maka f^{-1} juga fungsi.

Ekuipollensi biasa dinotasikan : $\cong$

Definisi 5 :

Dua himpunan A dan B disebut ekuivalen (ekuipoten), jhj A dan B ekuipollen dan dinotasikan : $A \sim B$.

Definisi 6 :

Keluarga dari himpunan-himpunan (keluarga) adalah himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan atau : sebuah fungsi yang disajikan dalam bentuk indeks.

Contoh 4.

$F = \{(a,m),(b,m),(c,m),(e,p)\}$

$F_a = F(a) = m,\ F_b = n,\ F_c = m,\ F_e = p.$

Jadi $F = \{(a,F_a),(b,F_b),(c,F_c),(e,F_e)\}$ adalah keluarga.

Domain F disebut juga himpunan indeks dan elemen-elemennya disebut indeks.

Range F disebut juga term dan dinotasikan F_i, dimana $i \in$ dom F.

Jadi :

Dom F = $\{a,b,c,e\}$, Rng F = $\{m,n,p\}$

Definisi 7 :

Sebuah keluarga F yang mempunyai himpunan indeks (domain) I dinotasikan $(F_i)_{i \in I} = \{(i, F_i) \mid i \in I\}$ dan gabungan dari $(F_i)_{i \in I}$ dinotasikan $\bigcup_{i \in I} F_i$ yang merupakan gabungan dari range keluarga.

Jadi : $\bigcup_{i \in I} F_i = \{ x \mid (\exists i) [(i \in I) \wedge (x \in F_i)],$
$F_i = F(i), \forall i \in I \}.$

Contoh 5.

$I = \{0,1,2\}$, $F_0 = \{a,b,c\}$, $F_1 = \{a,m,n,\}$, $F_2 = \{a,u,v\}$

$\bigcup_{i \in I} F_i = \{a,b,c,m,n,u,v\}.$

2.1.2. Aksioma Infinity :

Dalam perkembangan teory himpunan dan aritmetika transfinite, terdapat simbol-simbol :

$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, N, \ldots$

sebagai suatu rangkaian yang masing-masing merupakan sebuah himpunan sekaligus sebuah bilangan.

Jadi masing-masing simbol bisa menjadi elemen dari atau subset dari simbol-simbol di depannya.

Contoh 6.

$0 \in 1$, $1 \in 2$, $3 \in 6$ atau $0 \subset 1$, $1 \subset 2$, $3 \subset 6$ dst.

Aksioma Infinity :

Untuk sebuah himpunan W,

$\phi \in W$ dan $x \in W \Longrightarrow [\, x \cup \{x\}] \in W$ 1)

atau :

$\exists\, W\, [\, (\phi \in W) \wedge (x \in W)] \Longrightarrow [x \cup \{x\}] \in W.$

Dari aksioma tersebut, maka elemen-elemen W adalah :

ϕ

$\phi \cup \{\phi\} = \{\phi\}$

$\{\phi\} \cup \{ \{\phi\} \} = \{\phi, \{\phi\} \}$

$\{\phi, \{\phi\} \} \cup \{ \{\phi, \{\phi\} \} \} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\} \} \}$

dan seterusnya.

dimana berturut-turut mempunyai elemen-elemen : 0,1,2, ... Himpuna W pada aksioma tersebut biasa dinotasikan ω dan disebut himpunan dari semua bilangan alam, dalam pengertian bahwa bilangan 0 (zero) didefinisikan sebagai null set (ϕ), bilangan 1 sebagai {0}, bilangan 2 sebagai $\{\phi, \{\phi\} \} = 1 \cup \{1\} = \{0,1\}$ dan seterusnya.

Jadi $\omega = \{0,1,2,3, \ldots\}$, dimana :

$0 = \phi$

$1 = \{\phi\} = \{0\}$

$2 = \{\phi, \{\phi\} \} = 1 \cup \{1\} = \{0,1\}$

$3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\} \} \} = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\}$

analog maka :

$4 = 3 \cup \{3\} = \{0,1,2,3\}$

$5 = 4 \cup \{4\} = \{0,1,2,3,4\}$

dan seterusnya.

Dari aksioma tersebut maka $W = \omega$ adalah sebuah keluarga. Dalam bab selanjutnya ω juga disebut himpunan semua bilangan ordinal finite dan himpunan semua kardinal finite.

Definisi 8:

Setiap elemen dari ω disebut bilangan alam dan setiap bilangan alam adalah sebuah himpunan dan sekaligus sebuah keluarga, sehingga ω adalah sebuah keluarga.

Definisi 9 :

Sebuah himpunan x, $x \cup \{x\}$ disebut immediate successor (atasan langsung) dari x dan dinotasikan x^+ atau $x^+ = x \cup \{x\}$.

Contoh 7.

$0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$

$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = 2$

$2^+ = 3$

$3^+ = 4$

dan seterusnya.

2.1.3. Hasil kali Kartesian (Cartesian Product)

Definisi 10 :

Misal $(X_i)_{i\in I}$ sebuah keluarga, kartesian product $(X_i)_{i\in I}$ adalah himpunan semua fungsi f dari I into $\bigcup_{i\in I} X_i$ sedemikian sehinnga $f(i) \in X_i$, $\forall i \in I$ dan dinotasikan $\prod_{i\in I} X_i$

Contoh 8.

$I = \{1,2,3\}$, $X_1 = \{a,b\}$, $X_2 = \{m,n\}$, $X_3 = \{u\}$

$$\prod_{i\in I} X_i = \{ \{(1,a),(2,m),(3,u)\} , \{(1,a),(2,n),(3,u)\} , \{(1,b),(2,m),(3,u)\} , \{(1,b),(2,n),(3,u)\} \}$$

Theorema 1:

Kartesian produk dari sebuah keluarga $= \phi$ j.h.j ϕ merupakan salah satu term (range) dari keluarga tersebut.

Atau $\prod_{i\in I} X_i = \phi \Leftrightarrow (\exists i)[\ i\in I \wedge X_i = \phi\ ]$

Bukti :

$\prod_{i\in I} X_i = \phi$, andai $X_i \neq \phi$, $\forall i \in I$, maka terdapat sebuah fungsi f dari I into $\bigcup X_i$, sedemikian sehingga $f(i) \in X_i$, dengan demikian $\prod_{i\in I} X_i \neq \phi$, kontradiksi, sehingga pengandaian salah. Jadi terdapat $i \in I$, sehingga $X_i = \phi$.

Jika $(\exists i)[(i\in I) \wedge (X_i = \phi)]$ maka tidak ada fungsi f yang mempunyai domain I sehingga $f(i) \in X_i$, $\forall i \in I$. Dengan demikian himpunan dari semua fungsi $f = \phi$, sehingga $\prod_{i\in I} X_i = \phi$.

Definisi 11 :

Untuk $X_i = S$, $\forall i \in I$ dari sebuah keluarga $(X_i)_{i\in I}$, maka $\prod_{i\in I} X_i$ adalah himpunan semua fungsi dari I into S dan dinotasikan S^I.

Jadi S^I adalah himpunan semua fungsi dari I into S

Definisi 12 :

Suatu fungsi, dimana domain atau kodomain atau kedua-duanya merupakan elemen dari sebuah kartesian product disebut fungsi dari dua variabel. Sedangkan fungsi dimana $y = f(x)$ disebut fungsi dari satu variabel.

Contoh 9.

1. f = { [(a,b),m] , [(c,s),t] , [(3,2),4] }
2. f = { [c,(a,b)] , [t,(p,r)] , [u,(q,s)] }
3. f = { [(a,f),(i,b)],[(b,j),(j,m)],[(c,h),(k,n)] }

Definisi 13 :

Kartesian product dari dua himpunan A dan B (A x B) adalah himpunan pasangan berurutan (x,y) dimana $\forall x \in A$ dan $\forall y \in B$ dan ekuippollen dengan $\prod_{i\in 2} X_i$ dimana dimana $X_o = A$ dan $X_1 = B$ dan $2 \in \omega$, sehingga kadang - kadang A x B didefinisikan sebagai $\prod_{i\in 2} X_i$ dengan $X_o = A$ dan $X_1 = B$.

Contoh 10.

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$

$A \times B = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),$
$(a_3,b_2)\}$

Untuk $\prod_{i\in 2} X_i$, $X_o = A$ dan $X_1 = B$ maka :

$I = 2 = \{0,1\}$, $X_o = \{a_1,a_2,a_3\}$, $X_1 = \{b_1,b_2\}$, sehingga

$\prod_{i\in I} X_i = \{ \{(0,a_1),(1,b_1)\},\{(0,a_1),(1,b_2)\},\{(0,a_2),$
$(1,b_1)\},\{(0,a_2),(1,b_2)\}, \{(0,a_3),(1,b_1)\},$
$\{(0,a_3),(1,b_2)\} \}$

Jadi $(a_1,b_1) \in A \times B$ dan $\{(0,a_1),(1,b_1) \in \prod_{i\in 2} X_i$

$n(A \times B) = n(\prod_{i\in 2} X_i)$, maka $A \times B \simeq \prod_{\in 2} X_i$

Dengan demikian untuk $A = \{a_1\}$, $B = \{b_1\}$, maka

$A \times B = \{(a_1,b_1)\} \simeq \prod_{i\in 2} X_i = \{(0,a_1),(1,b_1)\}$, sehingga jika A x B didefinisikan sebagai $\prod_{i\in 2} X_i$, maka

$a_1 = (0,a_1)$, $b_1 = (1,b_1)$, dimana $a_1 \in A$, $b_1 \in B$,

$(0,a_1)$ dan $(1,b_1) \in \prod_{i\in 2} X_i$

Jadi untuk A x B yang didefinisikan sebagai $\prod_{i\in 2} X_i$, masing-masing elemen A merupakan sebuah fungsi dari 0 into elemen-elemen A sendiri (merupakan pasangan berurutan antara 0 dan elemen-elemen A), dimana $0 \in I$

dan $(\forall x,\ x \in A) \in \bigcup_{i\in 2} X_i$, sedemikian sehingga $f(i) \in X_i$, $\forall i \in I = 2$. Demikian juga masing-masing elemen B merupakan fungsi dari 1 into elemen-elemen B.

Penegasan 1.

Meskipun kadang-kadang A x B didefinisikan sebagai $\prod_{i\in 2} X_i$, tetapi pada umumnya A x B didefinisikan sebagai himpunan pasangan berurutan (x,y) dimana $x \in A$ dan $y \in B$.

Definisi 14 :

Kartesian Product dari sebuah himpunan S adalah himpunan semua fungsi f dari S into $\bigcup$ S sehingga $f(s) \in s$, $\forall s \in S$ dan $S \subset \omega$, dan dinotasikan $\prod$ S.

Contoh 11.

$S = \{1,2\}$, dimana $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$

$\prod S = \{\ \{(1,0),(2,0)\},\{(1,0),(2,1)\}\ \}$

2.2 EKUIPOLLENSI HIMPUNAN

2.2.1 Himpunan Finite dan Infinite

Definisi 15 :

Jika f sebuah ekuipollensi antara x dan y dan g sebuah ekuipollensi antara y dan z maka komposisi $g \circ f$ adalah sebuah ekuipollensi antara x dan z.

Dari definisi tersebut maka sifat-sifat ekuipollensi adalah :

$x \cong x$ (refleksif) 2)

$x \cong y \Longrightarrow y \cong x$ (simetri) 3)

$x \cong y$ dan $y \cong z \Longrightarrow x \cong z$ (transitif) 4)

dimana x, y, z adalah himpunan-himpunan.

Definisi 16 :

Sebuah himpunan disebut infinite (tak berhingga) jika mempunyai subset sejati yang ekuipollen dengan himpunan itu sendiri.

Contoh 12.

Himpunan ω dari semua bilangan alam adalah infinite, karena $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4), \ldots \}$ adalah ekuipollensi antara ω dan $\{1,2,3,4,\ldots\}$ dimana $\{1,2,3, \ldots \}$ adalah subset sejati dari ω. Juga $\{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6), \ldots \}$ adalah ekuipollensi antara ω dan $\{0,2,4,6, \ldots \}$.Jadi 2 himpunan infinite dengan elemen-elemen bilangan alam pasti ekuipollen.

Definisi 17 :

Sebuah himpunan disebut finite (berhingga) jika bukan infinite.

Contoh 13.

$\{0,1\}$ adalah finite, karena antara $\{0,1\}$ dan subset sejatinya yaitu $\phi,\{0\},\{1\}$ tak mungkin ekuipollen. ϕ adalah himpunan finite, sehingga setiap himpunan infinite adalah tak kosong.

Definisi 18 :

Denumerabel (himpunan denumerabel) adalah himpunan yang ekuipollen dengan himpunan dari semua bilangan alam.

Contoh 14.

ω adalah denumerabel, demikian juga :

$\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\}$ dan

$\{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\}$ adalah denumerabel.

Definisi 19 :

Untuk sebuah himpunan S, yang disebut power-set dari S adalah himpunan yang elemen-elemennya adalah semua subset dari S dan dinotasikan $\mathcal{P}(S)$. Atau :

$$\mathcal{P}(S) = \{ x \mid x \subset S \}$$

Contoh 15.

$S = \{a,b,c\}$, maka

$\mathcal{P}(S) = \{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

Definisi 20 :

Dua himpunan dikatakan mempunyai power sama jika dua himpunan tersebut ekuipollen dan jika x ekuipollen dengan sebuah subset Y maka X disebut mempunyai power yang lebih kecil atau sama dengan Y dan dinotasikan $X \leq Y$, sedangkan jika X ekuipollen dengan subset Y tetapi X tidak ekuipollen dengan Y maka X disebut mempunyai power yang lebih kecil dari Y dan dinotasikan $X < Y$.

Contoh 16.

$X = \{a,b,c\}$

$Y = \{1,2,3\}$

Jelas $X \cong Y$, sehingga power X = power Y, dan Y adalah subset dari Y juga.

Misal $Y = \{1,2,3,4\}$ maka $Z = \{1,2,3\} \cong X$, yang berarti $X < Y$ atau X mempunyai power yang lebih kecil dari Y, dimana $Z \subset Y$ dan $X \cong Y$.

Jadi jelas untuk $X \cong$ subset Y dan $X \ncong Y$ maka $X < Y$.

Dari definisi tersebut maka :

Untuk setiap himpunan X :

$$X \nless X \qquad 5)$$

dari 2) dan 4) maka

$$X \leq X \qquad 6)$$

Untuk setiap 2 himpunan X dan Y :

$$X \subset Y \Longrightarrow x \leq Y \qquad 7)$$

$$X \leq Y \text{ dan } Y \leq X \Longrightarrow X \cong Y \qquad 8)$$

$$X < Y \Longrightarrow Y \nless X \qquad 9)$$

Untuk setiap 3 himpunan X, Y dan Z :

$$X \leq Y \text{ dan } Y \leq Z \Longrightarrow X \leq Z \qquad 10)$$

$$X < Y \text{ dan } Y < Z \Longrightarrow X < Z \qquad 11)$$

$$X \cong Y \text{ dan } X < Z \Longrightarrow Y < Z \qquad 12)$$

$$X \leq Y \text{ dan } Y < Z \Longrightarrow X < Z \qquad 13)$$

$$X < Y \text{ dan } Y \leq Z \Longrightarrow X < Z \qquad 14)$$

2.2.2 Theorema-theorema Ekuipollensi

Lemma 1 :

Jika $A \cong P$ dan $B \cong S$ maka $(A \times B) \cong (P \times S)$

Bukti :

Misal f sebuah ekuipollensi antara A dan P, g sebuah ekuipollensi antara B dan S maka terdapat fungsi h, dimana h[(a,b)] = [f(a),g(b)] yang merupakan ekuipollensi antara (A x B) dan (P x S).

Jadi (A x B) ≅ (P x S).

Lemma 2 :

Untuk setiap 3 himpunan A, B dan C :

(A x B) x C ≅ A x (B x C) dan (A x B) ≅ (B x A)

Bukti :

Jelas, sebuah fungsi f dimana f[(a,b),c] = [a,(b,c)] merupakan ekuipollensi antara (A x B) x C dan A x (B x C) sehingga (A x B) x C ≅ A x (B x C).

Demikian juga fungsi g dimana g[(a,b)] = (b,a) merupakan ekuipollensi antara (A x B) dan (B x A), sehingga (A x B) ≅ (B x A).

Theorema 2 :

Jika A ≅ P dan B ≅ S maka $A^B \cong P^S$.

Bukti :

Misal f sebuah ekuipollensi antara A dan P, dan g sebuah ekuipollensi antara B dan S. Akan dibuktikan adanya ekuipollensi antara A^B dan P^S. Sebuah elemen dari A^B adalah sebuah fungsi dari B into A yang merupakan pasangan berurutan (b,a) dimana a ∈ A dan b ∈ B.

Misal {(b,a)| .... } mewakili sebuah elemen dari A^B, maka terdapat sebuah fungsi h dari A^B into P^S yang diberikan oleh :

$$h[\{(b,a)| \ldots \}] = \{[g(b),f(a)]| \ldots \}$$

Karena f dan g adalah fungsi ekuipollensi maka h merupakan ekuipollensi antara A^B dan P^S.

Theorema 3 :

Misal A, B dan C himpunan-himpunan sehingga $B \cap C = \phi$ maka $A^{B\cup C} \cong A^B \times A^C$.

Bukti :

Sebuah elemen dari $A^{B\cup C}$ adalah sebuah fungsi dari $B \cup C$ into A yang merupakan sebuah himpunan pasangan berurutan (m,a) dimana $m \in B \vee m \in C$ dan $a \in A$.

Karena $B \cap C = \phi$ maka elemen dari $A^{B\cup C}$ diberikan oleh $\{(b,a)| \ldots \} \cup \{(c,a)| \ldots \}$, dimana $\{(b,a)| \ldots \}$ dan $(c,a)| \ldots \}$ merupakan fungsi-fungsi dari B into A dan dari C into A, sehingga $\{(b,a)| \ldots \}$ dan $\{(c,a)| \ldots \}$ merupakan elemen-elemen dari A^B dan A^C. Dengan demikian maka sebuah elemen dari $A^B \times A^C$ diberikan oleh pasangan berurutan = $[\{(b,a)| \ldots \}, \{(c,a)| \ldots \}]$.

Misal terdapat sebuah fungsi h dari $A^{B\cup C}$ into $A^B \times A^C$, dimana $h[\{(b,a)| \ldots \} \cup \{(c,a)| \ldots \}] = [\{(b,a)| \ldots \},\{(c,a)| \ldots \}]$ sehingga h merupakan ekuipollensi antara $A^{B\cup C}$ dan $A^B \times A^C$ atau

$A^{B\cup C} \cong A^B \times A^C$.

Theorema 4 :

Untuk setiap 3 himpunan A, B dan C maka :

$$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$$

Bukti :

Sebuah elemen dari $(A \times B)^C$ adalah sebuah fungsi dari C into $(A \times B)$ yang merupakan sebuah himpunan pasangan berurutan $[c,(a,b)]$ dimana $c \in C$, $b \in B$, $a \in A$. Dengan demikian sebuah elemen dari $(A \times B)^C$ diberikan oleh sebuah himpunan $\{[c,(a,b)] | \ldots \}$.

Disisi lain, sebuah elemen dari $A^C \times B^C$ merupakan sebuah pasangan berurutan dari himpunan-himpunan $\{(c,a) | \ldots \}$ dan $\{(a,b) | \ldots \}$, dengan demikian sebuah elemen dari $A^C \times B^C$ diberikan oleh pasangan berurutan $[\{(c,a) | \ldots \},\{(c,b) | \ldots \}]$.

Misal terdapat sebuah fungsi h dari $(A \times B)^C$ into $A^C \times B^C$ maka $h[\{(c,(a,b)] | \ldots \}] = [\{(c,a) | \ldots \}, \{(c,b) | \ldots \}]$. Jadi h ekuipollensi antara $(A \times B)^C$ dan $A^C \times B^C$, sehingga $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$.

Theorema 5 :

Untuk setiap 3 himpunan A, B dan C maka $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

Bukti :

Jelas, sebuah elemen dari $(A^B)^C$ adalah sebuah himpunan pasangan berurutan $\{[c,\{(b,a) | \ldots \}]\}$, dimana $a \in A$, $b \in B$ dan $c \in C$. Misal terdapat sebuah fungsi h dari $(A^B)^C$ into $A^{B \times C}$ maka

$h[\{(c,\{(b,a) | \ldots)\}] = \{[(b,c),a] | \ldots \}$.

Jadi h adalah eku ipollensi antara $(A^B)^C$ dan $A^{B \times C}$, sehingga $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

Theorema 6 :

Gabungan dari 2 himpunan denumerabel adalah denumerabel.

Bukti :

Misal $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$

$A \cap B = \phi$ dan A, B adalah denumerabel.

$A \cup B = \{ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots \}$, jelas denumerabel karena ekuipollen dengan ω yaitu :

$f(o) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(4) = a_3$, ...

$f(1) = b_1$, $f(3) = b_2$, $f(5) = b_3$, ...

Demikian juga misal $C = \{ c_1, c_2, c_3, \ldots \}$, maka

$A \cup B \cup C = \{ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, \ldots \}$ denumerabel.

Analog maka : $A \cup B \cup C \ldots$ adalah denumerabel, dimana A, B, C adalah denumerabel.

2.2.3 Himpunan Non Denumerabel

Definisi 21 :

Sebuah himpunan infinite yang tidak denumerabel disebut non denumerabel.

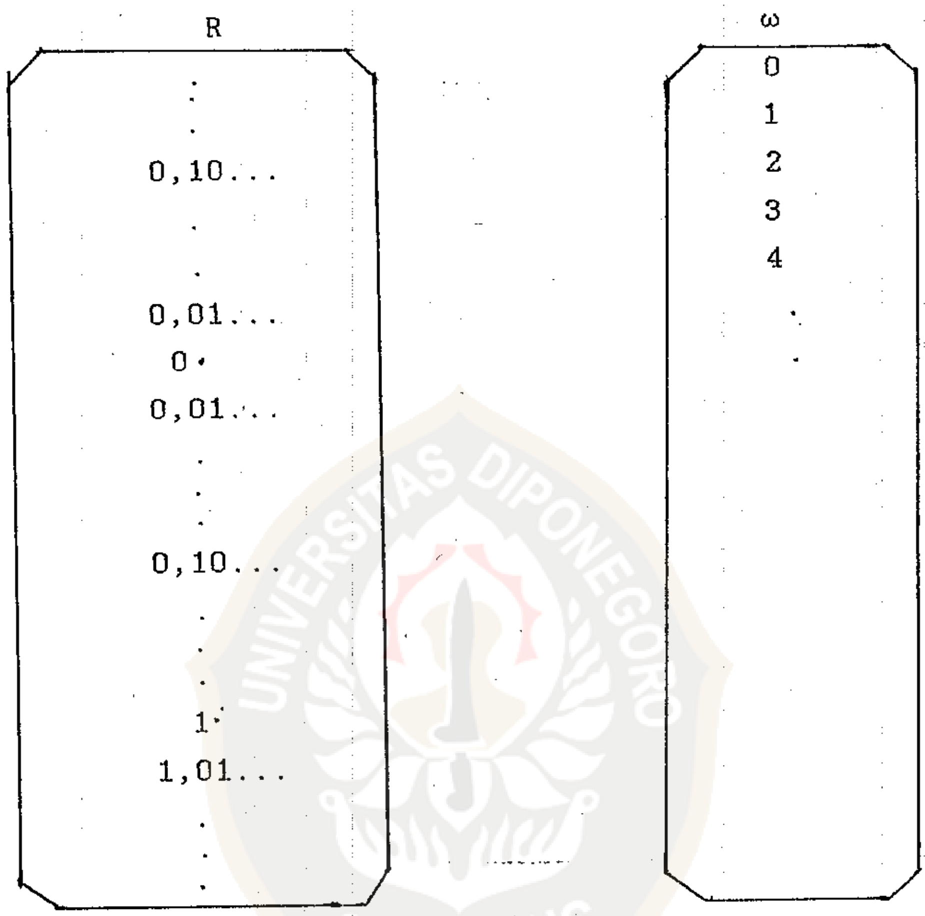
Contoh 17.

R : Himpunan semua bilangan real adalah non denumerabel .

Bukti :

R adalah tidak denumerabel, karena terdapat bilangan pecah yang tidak berhingga diantara dua bilangan bulat sehingga tidak mungkin ekuipollen dengan ω.

Contoh :



$R \not\sim \omega$

R adalah infinite karena R mempunyai subset sejati yang ekuipollen dengan R.

R infinite dan R tidak denumerabel berarti R adalah nondenumerabel.

Definisi 22 :

Sebuah himpunan yang ekuipollen dengan himpunan dari semua bilangan real disebut power kontinuum.

2.3 SIMILARITAS

2.3.1 Pengertian Similaritas

Definisi 23 :

Suatu urutan disebut urutan alam jika elemen di sebelah kiri lebih kecil daripada elemen di sebelah kanan dan dikatakan bahwa elemen yang lebih kecil mendahului elemen yang lebih besar.

Atau :

Jika untuk setiap 2 elemen x dan y dari bilangan alam mempunyai sifat-sifat :

$$x \leq y \Leftrightarrow (x \in y) \vee x = y \qquad 15)$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \subset y \qquad 16)$$

dimana $x < y$ diartikan "x lebih kecil daripada y" atau "x sebelum (mendahului) y" atau " y lebih besar daripada x" atau 'y setelah x".

Contoh :

1,2,3,4, ...

1,3,5, ..., 2,4,6,...

... ,4,3,2,1 bukanlah urutan alam.

Definisi 24 :

Suatu himpunan S disebut lino-set (linierly order set) jika terhadap relasi < mempunyai sifat-sifat :

1. Irrefleksif : $s \nless s$, $\forall s \in S$
2. Transitif : $s_1 < s_2$ dan $s_2 < s_3 \Longrightarrow s_1 < s_3$, $(\forall s_1, s_2, s_3) \in S$
3. Asimetri : $s_1 < s_2 \Longrightarrow s_2 \nless s_1$,$(\forall s_1, s_2) \in S$

4. Komperatif : $s_1 \neq s_2 \Longrightarrow s_1 < s_2 \vee s_2 < s_1$, $(\forall\ s_1, s_2) \in S$

Contoh :

$S == \{1,2,3,4, \ldots \}$

.) $1 \nless 1$ irrefleksif

.) $1 < 2$ dan $2 < 3 \Longrightarrow 1 < 3$ transitif

.) $1 < 2 \Longrightarrow 2 \nless 1$ asimetri

.) $1 \neq 2 \Longrightarrow 1 < 2$ komperatif

$S = \{ \ldots ,4,3,2,1\}$, dari sifat komperatif maka S lino-set.

Definisi 25 :

Suatu himpunan S, $a \in S$ disebut elemen pertama dari S jika a mendahului (sebelum) setiap elemen dalam S dan S adalah lino-set yang memiliki urutan alam.

atau :

$(\exists! a \in S)\ a \leq x, \forall x \in S$, S adalah lino-set yang memiliki urutan alam.

Contoh 18.

$S = \{1,2,3,4\}$ adalah lino-set dan memiliki urutan alam, maka 1 adalah elemen pertama. Atau dalam bentuk diagram.

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array}$$

Definisi 26 :

Suatu lino-set S, $b \in S$ disebut elemeh terakhir dari S jika tidak ada satu elemenpun dalam S setelah b, dan S memiliki urutan alam.

atau :

$(\exists! b \in S)$, $x \leq b$, $\forall x \in S$, S adalah lino-set dengan urutan alam.

Contoh 19.

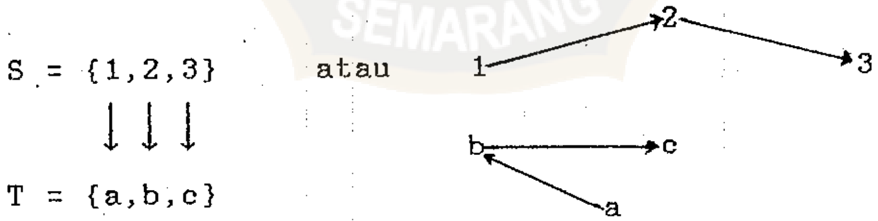
S = {0,1,2,3}

3 adalah elemen terakhir dari S, karena setelah 3 tidak ada elemen. Atau dalam bentuk diagram.

Definisi 27 :

Dua lino-set S dan T disebut similar j.h.j S dan T ekuipoten (ekuivalen) sedemikian sehingga jika (s_1 dan s_2) $\in$ S mempunyai bayangan (t_1 dan t_2) $\in$ T, dimana s_1 mendahului s_2 ($s_1 < s_2$) maka $t_1 < t_2$ (t_1 mendahului t_2).

Contoh 20.



S dan T adalah similar, karena (1 dan 2) $\in$ S, dimana 1 < 2 mempunyai bayangan (a dan b) $\in$ T dan a < b (a mendaului b), demikian juga (2 dan 3) $\in$ S mempunyai bayangan (b dan c) $\in$ T, dimana 2 < 3 (2 mendahului 3) dan b < c.

Misal, S = {1,2,3, ... } dan T = { ...,3,2,1}, S dan T tidak similar, karena 1 $\in$ S adalah elemen pertama dari S, tidak mempunyai bayangan dalam T (karena T tidak mempunyai elemen pertama), sehingga tidak sesuai dengan definisi 27.

Jadi relasi similaritas adalah relasi ekuipotensi (ekuivalensi).

2.3.2 Himpunan Terurut Wajar (Well Ordered Set)

Definisi 28 :

Suatu lino-set disebut himpunan terurut wajar (well ordered set) jhj setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari lino-set tersebut mempunyai elemen pertama.

Contoh 21.

A = {1,2,3,4, ... }

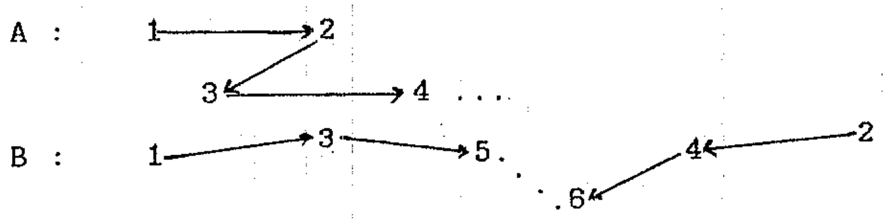
B = {1,3,5, ..., 2,4,6, ... }

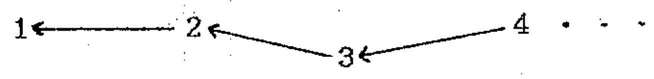
C = { ... ,4,3,2,1}

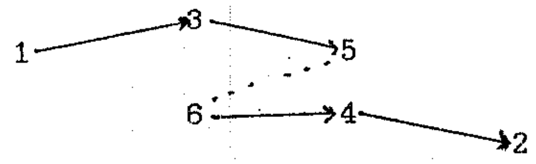
D = {1,3,5, ... ,... ,6,4,2}

A dan B adalah well ordered set, karena setiap himpunan bagian yang tidak kosong mempunyai elemen pertama. C dan D bukan well ordered set, karena untuk C tidak mempunyai elemen pertama, untuk D,{...,6,4,2} adalah subset dari D dan tidak mempunyai elemen pertama.

Atau :



C : 

D : 

Dari definisi tersebut maka ω yaitu himpunan semua bilangan alam adalah well ordered set. Karena setiap bilangan alam adalah sebuah himpunan maka setiap bilangan alam adalah well ordered set dan setiap well ordered set adalah subset dari ω.

Definisi 29 :

Untuk sebuah well ordered set V, jika $n \in V$ maka yang disebut initial segmen (segmen mulaan) n dari V adalah himpunan semua elemen yang mendahului n dan dinotasikan I(n), atau :

$$I(n) = \{x \mid (x \in V) \wedge (x < n), \forall n \in V\}$$

Contoh 22.

$V = \{0,1,2,3,4\}$

Misal $n = 4$, $4 \in V$ maka $I(n) = \{0,1,2,3\}$ = semua elemen yang mendahului (sebelum) 4.

Theorema 7 :

Tidak ada well ordered set yang similar dengan sebuah subset dari sembarang initial segmen elemen - elemennya.

Bukti :

Dua well ordered set similar jhj keduanya ekuivalen. Misal W sebuah well ordered set.

Jika $n \in W$ maka $I(n) \subset W$ dan $I(n) \neq W$, karena

$$I(n) = \{x \mid x \in W) \wedge (x < n), \forall n \in W\}$$

Jadi $\forall n \in W$, $I(n) \neq W$ sehingga $I(n)$ tidak similar dengan W, $\forall n \in W$.

$I(n) \subset W$ dan $I(n) \not\simeq W$ maka $V \not\simeq W$, $\forall V \subset I(n)$

Theorema 8 :

Untuk setiap 2 well ordered set V dan W, memenuhi satu dan hanya satu dari 3 hal berikut :

i) V similar dengan W ($V \simeq W$).

ii) V similar dengan initial segmen dari W dan W tidak similar dengan initial segmen dari V.

iii) W similar dengan initial segmen dari V dan V tidak similar dengan initial segmen dari W.

Bukti :

Dibuktikan bahwa :

i) $V \simeq W \Longrightarrow V \not\simeq I(n)$, $\forall n \in W$ dan $W \not\simeq I(m)$, $\forall (m) \in V$

ii) $V \simeq I(n)$, $\forall n \in W \Longrightarrow V \not\simeq W$ dan $W \not\simeq I(m)$, $\forall m \in V$

iii) $W \simeq I(n)$, $\forall n \in W \Longrightarrow V \not\simeq W$ dan $V \not\simeq I(n)$, $\forall n \in W$

Bukti :

Misal $n \in W$ dan $m \in V$, maka :

$I(n) = \{x \mid (x \in W) \wedge (x < n), \forall n \in W\}$

$I(n) = \{y \mid (y \in V) \wedge (y < m), \forall m \in V\}$

i) $V \simeq W$ maka V ekuivalen dengan W.

Unttuk $\forall n \in W$ maka :

$I(n) \subset W$ dan $I(n) \neq W$, sehingga $I(n) \not\simeq W$, akibatnya $V \not\simeq I(n)$.

Demikian juga untuk $\forall m \in V$, maka :

$I(m) \subset V$ dan $I(m) \neq V$, sehingga $I(m) \not\simeq V$, akibatnya $W \not\simeq I(m)$.

ii) $V \simeq I(n)$, $\forall n \in W$ maka V ekuivalen dengan $I(n)$. Dari i), $I(n) \not\simeq W$ maka $V \not\simeq W$ dan $I(m) \not\simeq V$ sehingga $I(n) \not\simeq I(m)$.

Karena $I(n) \subset W$ maka $W \not\simeq I(m)$, $\forall m \in V$.

iii) $W \simeq I(m)$, $\forall m \in V$ maka W ekuivalen dengan $I(m)$. Dari i), $I(m) \not\simeq V$ maka $V \not\simeq W$ dan $I(n) \not\simeq W$, sehingga $I(n) \not\simeq I(m)$

Karena $I(m) \subset V$ maka $V \not\simeq I(n)$, $\forall n \in W$.

2.4 ORDINAL

Definisi 30 :

Ordinal (bilangan ordinal) adalah tipe urutan dari well ordered set.

Tipe-tipe urutan suatu himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf Yunani.

Contoh 23.

ω : tipe urutan dari himpunan bilangan alam.

η : tipe urutan dari himpunan bilangan rasional.

λ : tipe urutan dari himpunan bilangan real.

dan seterusnya.

ω adalah himpunan dari semua bilangan alam, sehingga ω merupakan well ordered set. Dari definisi tersebut maka ω adalah bilangan ordinal (biasanya disebut ordinal saja). η dan λ bukan bilangan ordinal, karena bukan well ordered set.

Contoh lain dari bilangan ordinal : 5 adalah sebuah bilangan alam, yang terhadap urutan alam diwakili oleh well ordered set : {0,1,2,3,4}.

Jadi 5 = {0,1,2,3,4} adalah bilangan ordinal. 3 adalah elemen dari 5 ($3 \in 5$), sehingga initial segmen 3 [I(3)] adalah {0,1,2}. Jadi I(3) = {0,1,2} = 3

Analog maka :

$I(0) = \phi = 0$

$I(1) = \{0\} = 1$

$I(2) = \{0,1\} = 2$

$I(4) = 4$

$I(5) = 5$

dan seterusnya.

Definisi 31 :

Sebuah himpunan W disebut bilangan ordinal jika W merupakan well ordered set sedemikian sehingga setiap elemen v dari W ($v \in W$) initial segmen v [I(v)] = v atau :

$$I(v) = v, \ \forall v \in W \qquad 17)$$

Contoh 24.

$W = \{0,1,2,3,4\}$

$4 \in W$ sehingga $I(4) = \{0,1,2,3\} = 4$

$3 \in W$ sehingga $I(3) = \{0,1,2\} = 3$

dan seterusnya.

Dari definisi tersebut maka setiap bilangan alam adalah ordinal.

Penegasan 2.

Sebuah ordinal yang merupakan himpunan finite disebut ordinal finite dan ordinal yang merupakan himpunan infinite disebut ordinal infinite atau ordinal transfinite dan setiap ordinal adalah sebuah keluarga.

Lemma 3 :

Himpunan kosong (ϕ) adalah sebuah ordinal yang merupakan elemen pertama dari setiap ordinal tak kosong (bukan 0). Setiap initial segmen (initial segmen $\neq$ elemen pertama) dari sebuah ordinal adalah ordinal dan setiap ordinal adalah initial segmen dari beberapa ordinal.

Selain itu, setiap elemen dari sebuah ordinal adalah ordinal dan setiap ordinal adalah elemen dari beberapa ordinal.

Bukti :

0 adalah sebuah bilangan alam, sehingga 0 memenuhi 15) dan 16) [sifat-sifat well ordered]. Karena setiap bilangan alam adalah sebuah himpunan, maka 0 adalah well ordered set, dimana $I(0) = 0 = \phi$.

Dari definisi 31, maka ϕ adalah ordinal.

Misal W sebuah ordinal dan a elemen pertama dari W, maka tidak ada x sedemikian sehingga $x \in a$. Jadi a tidak mempunyai elemen atau $a = \phi = 0$, sehingga ϕ adalah elemen pertama dari setiap ordinal tak kosong.

Selanjutnya, misal $v \in W$, W adalah ordinal, maka

$I(v) = v$ dan $I(v) \subset W$. W well ordered set, maka $I(v)$ well oredered set. Misal $u \in I(v)$, maka $I(u) \subset I(v)$. Karena $I(v) = v$ maka 0 merupakan elemen pertama dari $I(v)$, yang berarti elemen pertama dari $I(u)$ sehingga $I(u) = u$, $\forall u \in I(v)$,dari definisi 31, maka $I(v)$ adalah ordinal. Di sisi lain misal W bilangan ordinal, maka $W \in W^+$ yang berarti W merupakan initial segmen dari W^+, $W \in (W^+)^+$ yang berarti W juga merupakan initial segmen dari $(W^+)^+$ dan seterusnya. Jadi W merupakan initial segmen dari beberapa ordinal.

Untuk sebuah ordinal W, $v \in W$ maka $I(v) = v$, $\forall v \in W$. Karena $I(v)$ ordinal, maka v ordinal. Jadi setiap elemen dari ordinal adalah ordinal.

W adalah elemen dari W^+, $(W^+)^+$, $[(W^+)^+]$ dan seterusnya, dimana W^+, $(W^+)^+$ dan seterusnya adalah ordinal. Jadi W adalah elemen dari beberapa ordinal.

Theorema 9 :

Untuk setiap dua bilangan ordinal v dan w dikatakan sama j h j keduanya similar. atau : $v = w \Leftrightarrow v \simeq w$.

Bukti :

$v = w$ maka v ekuivalen dengan w $(v \sim w)$

Misal x_1, $x_2 \in v$ dan y_1, $y_2 \in w$, $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$.

y_1 dan y_2 adalah bayangan dari x_1 dan x_2, maka $v \simeq w$.

$v \simeq w$ maka $v \sim w$ dan $\forall(x_1,x_2) \in v$, $\forall(y_1,y_2) \in w$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$, dimana $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$

v dan W adalah ordinal, maka v dan W well ordered set dengan elemen pertama 0.

$v \sim w$, maka untuk $x = 0$, $x = f(x)$ dan $n(v) = n(w)$.

$n(v) = n(w)$ dan v dan w : ordinal, maka $v = w$.

[illegible] :

0 adalah bilangan alam, sehingga $0^+ = 1$, $1^+ = 2$, $2^+ = 3$ dan seterusnya.

Karena $0 \in v$ dan $0 \in w$, akibatnya $1 \in v \Rightarrow 1 \in w$.

$2 \in v \Rightarrow 2 \in w$ dan seterusnya.

Jadi $\forall x$, $x \in v \Rightarrow x \in w$, atau $\forall x$, $x \in v \Rightarrow x = f(x)$, dimana $f(x) \in w$.

Dengan demikian $v = w$.

Theorema 10 (Hukum Trichotomi) :

Untuk setiap dua ordinal V dan W memenuhi satu dan hanya satu dari 3 hal berikut :

i) $V = W$

ii) V = Initial segmen dari W

iii) W = initial segmen dari V.

Bukti :

Dibuktikan bahwa :

i) $V = W \Longrightarrow V \neq I(n), \forall n \in W$ dan $W \neq I(m), \forall m \in V$

ii) $V = I(n), \forall n \in W \Longrightarrow V \neq W$ dan $W \neq I(m), \forall m \in V$

iii) $W = I(m), \forall m \in V \Longrightarrow V \neq W$ dan $V \neq I(n), \forall n \in W$

Bukti :

Karena V dan W : ordinal, maka V dan W well ordered set. Dari Theorema 8 , maka :

i) $V \simeq W \Longrightarrow V \not\simeq I(n), \forall n \in W$ dan $W \not\simeq I(m), \forall m \in V$.

$V \simeq W$ maka $V = W$

$V \not\simeq I(n)$ maka $V \neq I(n), \forall n \in W$.

$W \not\simeq I(m)$ maka $W \neq I(m)$, $\forall m \in V$.

Jadi $V = W \Rightarrow V \neq I(n)$, $\forall n \in W$ dan $W \neq I(m)$, $\forall m \in V$

ii) $V \simeq I(n)$, $\forall n \in W \Longrightarrow V \not\simeq W$ dan $W \neq I(m)$, $\forall m \in V$.

$V \simeq I(n)$, maka $V = I(n)$, $\forall n \in W$

$V \not\simeq W$, maka $V \neq W$

$W \not\simeq I(m)$, maka $W \neq I(m)$, $\forall m \in V$.

Jadi $V = I(n)$, $\forall n \in W \Rightarrow V \neq W$ dan $W \neq I(m)$, $\forall m \in V$

iii) $W \simeq I(m)$, $\forall m \in V \Longrightarrow V \not\simeq W$ dan $W \neq I(n)$, $\forall m \in W$

$W \simeq I(m)$, maka $W = I(m)$, $\forall m \in V$

$V \not\simeq W$, maka $V \neq W$

$V \not\simeq I(n)$ maka $V \neq I(n)$, $\forall n \in W$

Jadi $W = I(m)$, $\forall m \in V \Rightarrow V \neq W$ dan $V \neq I(n)$, $\forall n \in W$

Definisi 32:

Dua ordinal V dan W, V disebut lebih kecil atau sama dengan W jika V = W atau V = initial segmen dari W.

Contoh 25.

$V = 5 = \{0,1,2,3,4\}$

$W = 7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

5 adalah elemen W atau $5 \in W$.

$I(5)$, $5 \in W$. Jadi $I(5)$ adalah initial segmen dari W.

$v = 5 = I(5)$ = initial segmen dari W dan $5 < 7$ yang berarti $V < W$ (V lebih kecil dari W).

Dari definisi tersebut, untuk setiap 2 bilangan ordinal maka :

$$V \leq W \Leftrightarrow V \subset W \tag{18}$$

$$V < W \Leftrightarrow V \in W \tag{19}$$

Definisi 33 :

Untuk sebuah himpunan x, x − {b}, dimana b adalah elemen terakhir dari x disebut immediate predecessor (bawahan langsung) dari x dan dinotasikan x^-.

Jadi $x^- = x - \{b\}$, b adalah elemen terakhir dari x.

Contoh 26.

$x = 4 = \{0,1,2,3\}$.

elemen terakhir dari x adalah 3.

Jadi $x^- = 4 - \{3\} = \{0,1,2,3\} - \{3\} = \{0,1,2\} = 3$.

Definisi 34 :

Sebuah ordinal bukan nol yang tidak mempunyai immediate predecessor disebut limit ordinal atau limit bilangan.

Contoh 27.

ω adalah limit ordinal, sedangkan $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ bukan limit ordinal, karena mempunyai bawahan langsung (immediate predecessor) yaitu ω, demikian juga untuk ordinal finite, bukanlah limit ordinal.