BAB II

FUMGSI KONTROL DENGAN MENGGUNAKAN METODE HAMILTONIAN

2.1. Multiplikator Lagrange

Untuk menentukan nilai maksimum atau minimum pada titik ekstrim dari suatu fungsi $F(x,y,z)$ dengan syarat tambahan $G(x,y,z)$ akan lebih mudah dengan menggunakan Multiplikator Lagrange daripada dengan cara biasa.

Akan ditentukan nilai ekstrim fungsi obyektif $F(x,y,z)$ dimana x, y, z harus memenuhi syarat tambahan atau pembatasan $G(x,y,z) = 0$.

Syarat tambahan $G(x,y,z) = 0$ menentukan z sebagai fungsi x dan y, katakanlah $z = f(x,y)$.

Jika $z = f(x,y)$ disubstitusikan ke dalam $F(x,y,z)$ berarti $F(x,y,f(x,y))$ adalah fungsi dua peubah x dan y.

Dan syarat nilai ekstrim adalah turunan parsial pertama terhadap x dan y adalah nol, yaitu :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (2.1.2)$$

dengan $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

Dan karena $G(x,y,z) = 0$, maka berlaku :

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (2.1.4)$$

dengan $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$.

Dengan mengeliminasikan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dari (2.1.1) dan (2.1.3) diperoleh :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad (2.1.5)$$

Dengan mengeliminasikan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari (2.1.2) dan (2.1.4) diperoleh :

$$\frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad (2.1.6)$$

Hasil (2.1.5) dan (2.1.6) dapat diperoleh dengan Multiplikator Lagrange, dengan Multiplikator Lagrange diperoleh dari kombinasi syarat obyektif dan perkalian syarat tambahan dengan suatu faktor pengali λ.

Misalkan $\phi = F(x,y,z) + \lambda\ G(x,y,z)$ dan λ suatu konstanta.

Jika dieliminasikan dari $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ dengan memisahkan $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$, maka persamaan (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) dan (2.1.4) setara dengan

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial G}{\partial z} = 0,$$

dan $G(x,y,z) = 0$.

Dan λ inilah yang dinamakan Multiplikator Lagrange.

Dengan memakai Multiplikator Lagrange ini hanya dapat ditentukan koordinat x,y dan z dari titik ekstrim dan bukan menentukan jenis ekstrim (maksimum atau minimum).

Untuk menentukan jenis ekstrim, diperlukan turunan parsial kedua dari fungsinya sendiri.

Contoh :

Bila diketahui kotak berbentuk balok terbuka sebelah atas dan mempunyai volume 108 dm^3, maka dapat ditentukan ukuran panjang, lebar, dan tinggi yang harus diambil agar seluruh luas kotak minimum.

Penyelesaian :

Misalkan panjang, lebar, dan tinggi balok masing - masing x, y dan z, maka volumenya $V = xyz = 108$, dengan $x, y, z > 0$.

Dan seluruh luas balok tersebut adalah :

$$L = xy + 2xz + 2yz$$

Pembatasan $V = xyz - 108 = 0$

(a) $\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x} = (y + 2z) + \lambda(yz) = 0$

(b) $\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} = (x + 2z) + \lambda(xz) = 0$

(c) $\frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial V}{\partial z} = (2x + 2z) + \lambda(xy) = 0$

(d) $xyz = 108$

Dari (a) dan (b) diperoleh :

$$y + 2z + \lambda yz = x + 2z + \lambda xz$$

$$y + \lambda yz = x + \lambda xz$$

$$y(1 + \lambda z) = x(1 + \lambda z)$$

$$y = x \qquad (1)$$

(1) disubstitusikan ke (c) diperoleh :

$$(2x + 2x) + \lambda(xx) = 0$$

$$4x + \lambda x^2 = 0$$

$$4 + \lambda x = 0 \text{ (karena } x \neq 0)$$

$$\lambda = -\frac{4}{x} \qquad (2)$$

(2) disubstitusikan ke (b) diperoleh :

$$(x + 2z) - \frac{4}{x}(xz) = 0$$

$$x + 2z - 4z = 0$$

$$x = 2z \qquad (3)$$

(1) dan (3) disubstitusikan ke (d) diperoleh :

$$xyz = 108$$

$$(2z)(2z)z = 108$$

$$4z^3 = 108$$
$$z^3 = 27$$
$$z = 3$$

Jadi penyelesaian dari permasalahan di atas adalah :

$$x = y = 6 \text{ dm dan } z = 3 \text{ dm}$$

2.2. Persamaan Euler

Suatu integral berbentuk $J = \int_{t_0}^{t_1} F(x,\frac{dx}{dt},t)\,dt$ dimana F adalah sebuah fungsi dari fungsi x(t), turunan $\frac{dx}{dt}$ dan variabel bebas t serta path x(t) terbatas pada $t_0 \leq t \leq t_1$ disebut Fungtional.

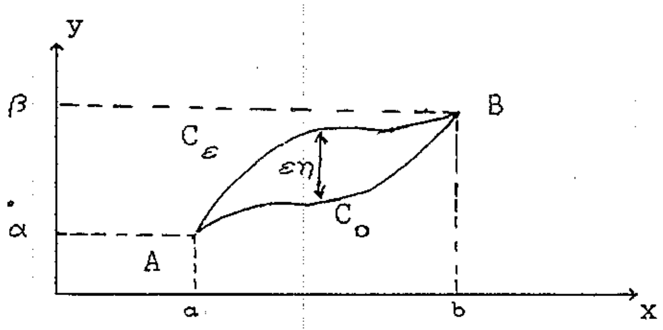
Dengan menggunakan Fungtional akan diturunkan Persamaan Euler (Persamaan Euler - Lagrange).

Pandang masalah untuk mendapatkan nilai ekstrim dari fungsi dengan bentuk :

$$J = \int_a^b F(y,y',x)\,dx \qquad (2.2.1)$$

dimana F adalah sebuah fungsi yang diberikan oleh y, $y' = \frac{dy}{dx}$, dan x serta y = y(x) adalah path antara $A(a,\alpha)$ dan $B(b,\beta)$ yaitu $y(a) = \alpha$ dan $y(b) = \beta$.

Dua path demikian diperlihatkan dalam Gambar (2..2.1)



Gambar 2.2.1. Path antara A dan B

Seperti yang diperlihatkan oleh path $y = y(x)$ yang memberikan nilai ekstrim untuk fungsi (2.2.1).

Misalkan C_o adalah kurva yang dikehendaki, katakanlah $y_o(x)$ dan C_ε adalah sebuah kurva berdekatan dengan C_o yang dibatasi oleh :

$$y_\varepsilon(x) = y_o(x) + \varepsilon\eta(x) \qquad (2.2.2)$$

dimana ε adalah parameter kecil dan $\eta(x)$ adalah fungsi diferensial x.

Dimisalkan $\eta(a) = \eta(b) = 0$ yang berarti kedua kurva bertitik awal di A dan bertitik akhir di B.

Dengan demikian persamaan : $y_\varepsilon(x) = y_o(x) + \varepsilon\eta(x)$ menghasilkan klas dari seluruh kurva C_ε yang berdekatan dengan C_o, tergantung pada nilai ε.

Bila nilai $\varepsilon = 0$ menghasilkan kurva C_o yang optimal.

Sebagai contoh sederhana, dapat diambil masalah untuk mendapatkan keluarga kurva-kurva C_ε diantara 2 koordinat, misalkan (0,0) dan (1,1).

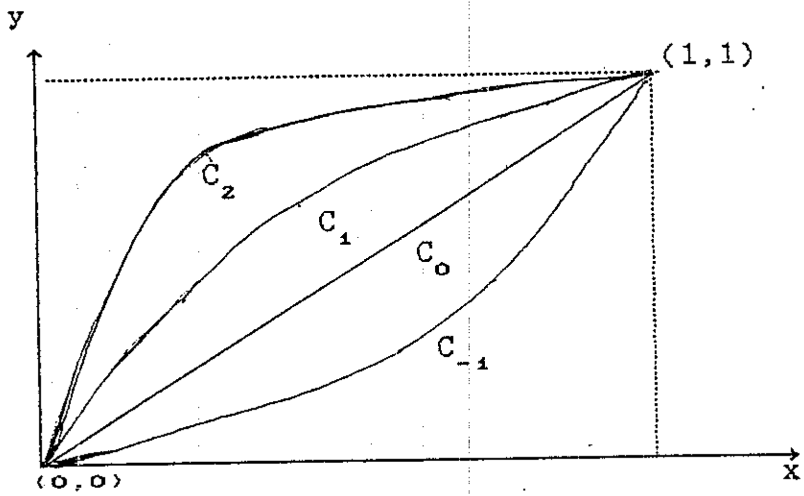
Diketahui bahwa kurva optimal C_o diberikan oleh :

$$y_o(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$$

Dengan memilih $\eta(x) = x(1-x)$, maka dapat disusun keluarga kurva-kurva C_ε yang berdekatan dengan C_o yaitu :

$$y_\varepsilon(x) = x + \varepsilon x(1-x), \qquad 0 \le x \le 1$$

yang diperlihatkan dalam gambar (2.2.2)



Gambar 2.2.2. Keluarga kurva-kurva C_ε untuk $\varepsilon = -1,0,1,2$.

Nilai J untuk path C_ε diberikan oleh :

$$J = \int_a^b F(y_o+\varepsilon\eta, y'_o+\varepsilon\eta', x)\, dx$$

dimana $y' = dy/dx$ dan $\eta' = d\eta/dx$.

Untuk fungsi $y(x)$, J adalah fungsi parameter ε yaitu $J = J(\varepsilon)$.

Syarat untuk mendapatkan nilai ekstrim J adalah $\frac{dJ}{d\varepsilon} = 0$.

Dengan mengambil $\varepsilon = 0$ maka persamaan nilai ekstrim J menjadi $\frac{dJ}{d\varepsilon} = 0$ untuk $\varepsilon = 0$ ....(2.2.3)

sehingga
$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(y_o+\varepsilon\eta, y'_o+\varepsilon\eta', x)\, dx$$
$$= \int_a^b \frac{dF}{d\varepsilon} (y_o+\varepsilon\eta, y'_o+\varepsilon\eta', x)\, dx = 0$$

Gunakan "The Chain Rule" (deret berantai) untuk diferensial parsial :

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\varepsilon}$$

Karena $y = y_o + \varepsilon\eta$ dan $y' = y'_o + \varepsilon\eta'$, maka :

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}(y_o + \varepsilon\eta) = \eta \qquad \text{dan} \qquad \frac{dy'}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}(y'_o + \varepsilon\eta') = \eta'$$

Sehingga persamaan diferensial integral di atas menjadi :

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(y_o+\varepsilon\eta, y_o'+\varepsilon\eta', x)\, dx$$

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_a^b \left\{F_y(y_o+\varepsilon\eta, y_o'+\varepsilon\eta', x)\frac{dy}{d\varepsilon} + F_{y'}(y_o+\varepsilon\eta, y_o'+\varepsilon\eta', x)\frac{dy}{d\varepsilon}\right\} dx$$

$$= \int_a^b \left\{\eta F_y(y_o+\varepsilon\eta, y_o'+\varepsilon\eta', x) + \eta' F_{y'}(y_o+\varepsilon\eta, y_o'+\varepsilon\eta', x)\right\} dx$$

dengan $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ dan $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$

Dengan menggunakan syarat nilai ekstrim J yaitu $\frac{dJ}{d\varepsilon} = 0$ untuk $\varepsilon = 0$ diperoleh :

$$\int_a^b \left\{\eta F_y(y_o, y_o', x) + \eta' F_{y'}(y_o, y_o', x)\right\} dx = 0$$

Untuk sederhananya dapat ditulis :

$$\int_a^b (\eta F_y + \eta' F_{y'})\, dx = 0$$

$$\int_a^b F_{y'} d\eta + \int_a^b \eta F_y dx = 0$$

$$\eta F_{y'}\Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} F_{y'}\, dx + \int_a^b \eta F_y\, dx = 0$$

$$\eta(b)F_{y'}\Big|_{x=b} - \eta(a)\, F_{y'}\Big|_{x=a} + \int_a^b \eta[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}]\, dx = 0$$

Karena $\eta(a) = \eta(b) = 0$ maka persamaan menjadi :

$$\int_a^b \eta[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}]\, dx = 0 \qquad (2.2.4)$$

Ini berlaku untuk setiap fungsi yang dapat didiferensial $\eta(x)$ sedemikian sehingga $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Lemma.

Misalkan $\eta(x)$ adalah sebuah fungsi yang dapat didiferensial untuk $a \le x \le b$ sedemikian hingga

$\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Jika f kontinu pada $a \le x \le b$ dan $\int_a^b f(x)\eta(x)\,dx = 0$ untuk setiap $\eta(x)$, maka $f(x) = 0$ pada $a \le x \le b$.

Bukti :

Dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan $f > 0$ untuk beberapa nilai c dalam $[a,b]$.

Karena f kontinu, maka $f > 0$ dalam persekitaran c, katakan $[c_1,c_2]$ dengan $a < c_1 < c < c_2 < b$.

$$\text{Ditentukan fungsi } \eta(x) = \begin{cases} 0 & a \le x < c_1 \\ (x-c_1)^2(x-c_2)^2 & c_1 \le x \le c_2 \\ 0 & c_2 < x \le b. \end{cases}$$

Maka $\eta(x)$ adalah fungsi yang dapat dideferensialkan dan

$$\int_a^b f(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x).(x-c_1)^2\,(x-c_2)^2\,dx > 0$$

Terjadi kontradiksi dengan hipotesa dari lemma bahwa $\int_a^b f(x)\,\eta(x)\,dx = 0$. Analog untuk $f < 0$.

Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa $f = 0$ pada $[a,b]$.

Akibat lemma ini untuk persamaan (2.2.4) adalah :

$$F_y - \frac{d}{dx}\,F_{y'} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2.5)$$

dalam optimal path.

Ini dikenal dengan Persamaan Euler.

Dan harus dipenuhi oleh path y(x) yang menghasilkan nilai ekstrim fungsi J.

Contoh :

1). Diperoleh kurva y(x) yang menghasilkan nilai ekstrim untuk fungsi

$$J = \int_0^1 (y'^2 + 1)\, dx$$

dengan y(0) = 1 dan y(1) = 2

Penyelesaian :

Disini $F = y'^2 + 1$ dan dideferensialkan terhadap y, didapat $F_y = 0$.

Sehingga Persamaan Euler (2.2.5) menjadi :

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad (*)$$

Dari diintegralkan menjadi $F_{y'} = A$, dengan A = konstanta.

Dari $F = y'^2 + 1$ dideferensialkan terhadap y' diperoleh :

$$F_{y'} = 2y' \qquad (*.*)$$

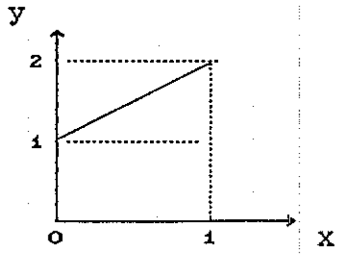
Dieliminasi dari (*) dan (*.*) menghasilkan $2y' = A$ dan diintegralkan menjadi $y = \frac{1}{2} Ax + B$, dengan B = konstanta.

Dari y(0) = 1 maka $y(0) = \frac{A.0}{2} + B = 1$ diperoleh B = 1 dan y(1) = 2 , maka $y(1) = \frac{A.1}{2} + 1 = 2$ diperoleh A = 2.

Sehingga kurva optimal adalah garis lurus :

$$y(x) = \frac{x.2}{2} + 1 = x + 1$$

seperti diperlihatkan dalam gambar (2.2.3)



Gambar 2.2.3. Optimal path.

Dari $y(x) = x + 1$ dideferensialkan terhadap x diperoleh $y'=1$ dan disubstitusikan pada $F = y'^2+1$ diperoleh $F = (1)^2 + 1 = 2$, sehingga nilai ekstrim dari J adalah $J = \int_0^1 2\,dx = 2$ dan ini merupakan nilai minimum untuk J.

2). Bila terdapat kurva-kurva diantara titik (0,0) dan titik (1,1), maka dapat dicari kurva yang mempunyai panjang minimum.

Penyelesaian :

Misalkan $y = y(x)$, $0 \le x \le 1$ adalah kurva diantara (0,0) dan (1,1) dan panjang L ditentukan oleh :

$$L = \int_0^1 (1 + y'^2)^{1/2}\,dx$$

Integrand $F = (1 + y'^2)^{1/2}$ adalah independen y, yaitu $F_y = 0$.

Dari sini Persamaan Euler menjadi :

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

dan dintergalkan, diperoleh $F_{y'} = A$, dengan A = konstanta (*)

Dan dari $F = (1 + y'^2)^{1/2}$ dideferensialkan terhadap y' menghasilkan :

$$F_{y'} = y'(1 + (y')^2)^{-1/2} \qquad (**)$$

Eliminasikan dari (*) dan (**) diperoleh :

$$y'(1 + (y')^2)^{-1/2} = A$$

dimana tersirat bahwa y' suatu konstanta, katakanlah B, yaitu $y' = B$ (***)

(***) diintegralkan menjadi $y = Bx + C$, dimana C = konstanta.

Karena melalui dua titik (0,0) dan (1,1) maka :

$$y(0) = B.0 + C = 0 \quad \text{diperoleh } C = 0$$

$$y(1) = B.1 + 0 = 1 \quad \text{diperoleh } B = 1$$

sehingga diperoleh path optimal $y = x$.

2.3. Hamiltonian

Definisi 2.3.1:

Hamiltonian diperoleh dari kombinasi fungsi suatu masalah meminimalkan persamaan integral dan perkalian fungsi subyek dengan suatu faktor pengali yang dinamakan variabel adjoin.

Pandang masalah meminimalkan persamaan :

$$J = \int_0^T f_o(x,u,t)\, dt \tag{2.3.1}$$

dengan subyek suatu persamaan diferensial :

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{2.3.2}$$

dan syarat batas $x(0) = a$, dengan a = konstanta.

Dengan Multiplikator Lagrange λ, dibentuk fungsi yang diperluas :

$$J^* = \int_0^T [f_o(x,u,t) + \lambda[(f(x,u,t) - \dot{x})]\, dt$$

Integrand $F = f_o + \lambda(f - \dot{x})$ adalah fungsi dua variabel x dan u dan didapatkan dua Persamaan Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \text{ yaitu } \frac{\partial f_o}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0 \tag{2.3.3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right) = 0 \text{ yaitu } \frac{\partial f_o}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \tag{2.3.4}$$

Bentuk Hamiltonian didefinisikan sebagai berikut :

$$H = f_o(x,u,t) + \lambda\, f(x,u,t) \tag{2.3.5}$$

Persamaan (2.3.3) dan (2.3.4) dapat ditulis :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.3.6}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \tag{2.3.7}$$

Persamaan-persamaan ini semua yang mengatur optimal path. Karena diperoleh dua persamaan diferensial order pertama, maka pada pengintegralan diperlukan dua syarat untuk memperoleh penyelesaian secara lengkap.

Yang pertama diberikan oleh $x(0) = a$ dan yang kedua diberikan oleh $x(T) = b$ atau jika x tidak ditentukan pada $t = T$, maka syarat kedua ditentukan oleh $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$ yaitu $\lambda = 0$ pada $t = T$.

Contoh :

Dengan menggunakan metode Hamiltonian, maka dapat ditentukan optimal kontrol u yang menghasilkan nilai stationer untuk fungsi :

$$J = \int_0^1 (x^2 + u^2)\, dt$$

dengan :

$$\dot{x} = u$$

dan $x(0) = 1$ tetapi x tidak ditentukan pada $t = 1$.

Penyelesaian :

Hamiltonian dari persamaan di atas adalah :

$$H = x^2 + u^2 + \lambda u$$

Dengan menggunakan persamaan (2.3.7) yaitu $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, maka diperoleh :

$$2u + \lambda = 0$$

Didiferensialkan terhadap t menjadi :

$$2\dot{u} + \dot{\lambda} = 0$$

$$\dot{\lambda} = -2\dot{u}$$

Dari persamaan (2.3.6) diperoleh :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x$$

Dengan mengeliminasi $\dot{\lambda}$ dari kedua persamaan di atas diperoleh :

$$-2\dot{u} = -2x$$

$$\dot{u} = x$$

Dari $\dot{x} = u$ dan $\dot{u} = x$ diperoleh $\ddot{x} = \dot{u} = x$ dan dapat ditulis $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. Ini merupakan P.D linier homogen dan persamaan karakteristiknya adalah :

$[D^2 - 1]x = 0$

$m_1 = 1$ dan $m_2 = -1$

$x = c_1e^t + c_2e^{-t}$, dengan c_1, c_2 = konstanta.

$= c_1(\cosh t + \sinh t) + c_2(\cosh t - \sinh t)$

$= (c_1 + c_2)\cosh t + (c_1 - c_2)\sinh t$

dengan $A = c_1 + c_2$ dan $B = c_1 - c_2$ adalah konstanta.

Dengan menggunakan syarat $x = 1$ pada $t = 0$, maka diperoleh $A = 1$.

Syarat yang lainnya yaitu $\lambda = 0$ pada $t = 1$ (karena x tidak ditentukan pada $t = 1$), maka dari $2u + \lambda = 0$, diperoleh : $u = 0$ pada $t = 1$, maka dengan $A = 1$ diperoleh :

$$u = \dot{x} = \sinh t + B \cosh t$$

sehingga :

$$0 = \sinh 1 + B \cosh 1$$

$$B = -\ \text{tgh}\ 1$$

Dengan demikian optimal kontrol diberikan oleh :

$$u = -\ \text{tgh}\ 1.\cosh t + \sinh t$$

2.4. Bang-Bang Kontrol

Definisi 2.4.1:

Suatu bentuk kontrol diskontinu yang hanya mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum dan tidak mempunyai nilai diantara keduanya disebut Bang-bang kontrol.

Kontrol umumnya kontinu dan tanpa penbatasan dalam penempatannya pada barisan nilai-nilai kontrol.

Tetapi dalam pemakaian praktis bentuk kontrol mungkin diskontinu dan terbatas diantara dua nilai akhir dari nilai-nilai kontrol.

Sebagai contoh :

- Kontrol yang hanya mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum yaitu "a light switch" (penyambungan kabel lampu) adalah kontrol untuk memilih on atau off dan tidak diambil nilai diantara keduanya.
- Mengemudikan mobil adalah sebuah kontrol yang dapat diambil nilai pembatas dintara dua nilai akhir.

Pandang masalah mengemudikan mobil dari posisi stasioner di jalan menuju posisi stasioner dalam garasi dengan menempuh jarak total a.

Penggunaan kontrol oleh pengemudi adalah gas dan rem (pengaruh peralatan lain dianggap tidak ada).

Diambil persamaan gerak mobil sebagai :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u \tag{2.4.1}$$

dengan $u = u(t)$ mewakili penggunaan gas atau rem dan x adalah jarak perjalanan.

Kontrol u adalah subyek antara percepatan rendah (maksimum rem) dan percepatan tinggi (maksimum gas) yaitu :

$$-\alpha \le u \le \beta \tag{2.4.2}$$

dengan α, β, adalah konstanta positip.

Masalahnya sekarang adalah meminimalkan penggunaan waktu T yaitu :

$$T = \int_0^T 1\, dt \tag{2.4.3}$$

dengan subyek :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u$$

$$-\alpha \le u \le \beta$$

$$x(0) = 0,\ \dot{x} = (0),\ x(T) = a,\ \dot{x}(T) = 0 \tag{2.4.4}$$

Persamaan kontrol u dengan syarat batas : $-\alpha \le u \le \beta$ dapat ditulis dengan variabel kontrol lain, misal v dengan :

$$v^2 = (u + \alpha)(\beta - u) \tag{2.4.5}$$

dan harus memenuhi $-\alpha \le u \le \beta$.

Misal variabel state ditulis $x_1 = x$ maka :

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.4.6}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{2.4.7}$$

merupakan persamaan diferensial order dua dari (2.4.4) dengan syarat batas :

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_1(T) = a,\ x_2(T) = 0$$

Dibentuk fungsi yang diperluas :

$$T^{*} = \int_{0}^{T} \{1+p_1(x_2-\dot{x}_1)+p_2(u-\dot{x}_2)+\mu[v^2-(u+\alpha)(\beta-u)]\}\ dt \quad (2.4.8)$$

dengan p_1, p_2, dan μ adalah Multiplikator Lagrange yang merupakan gabungan dari masing-masing persamaan-persamaan (2.4.6),(2.4.7), dan (2.4.5).

Persamaan Euler untuk variabel state x_1 dan x_2 serta variabel kontrol u dan v adalah :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \quad \text{yaitu} \quad \dot{p}_1 = 0 \qquad (2.4.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \quad \text{yaitu} \quad \dot{p}_2 = -p_1 \qquad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right) = 0 \quad \text{yaitu} \quad p_2 = \mu(\beta-\alpha-2u) \qquad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{v}}\right) = 0 \quad \text{yaitu} \quad 2uv = 0 \qquad (2.4.12)$$

Dari (2.4.12) salah satu harus 0 yaitu v = 0 atau $\mu = 0$ atau keduanya 0 yaitu v = 0 dan $\mu = 0$.

Pertama ambil $\mu = 0$ maka persamaan (2.4.11) menjadi $p_2 = 0$ dan persamaan (2.4.10) menjadi $p_1 = 0$ sehingga tidak ditemukan jawab persamaan.

Sekarang ambil v = 0 maka persamaan (2.4.5) menjadi $u = \beta$ atau $u = -\alpha$.

Ini merupakan dua nilai ekstrim.

Pada optimal path disini, percepatan diambil pada nilai maksimum atau nilai minimum dan tidak pada nilai diantara keduanya.

Dari situasi nyata, dalam hal ini pertama-tama harus didapatkan $u = \beta$ kemudian diikuti oleh $u = -\alpha$.

Anggap hanya satu switch dalam kontrol sehingga :

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \beta & 0 \le t < \tau \\ \alpha & \tau < t \le T \end{cases} \qquad (2.4.13)$$

switch ditempatkan pada waktu τ.

Dengan mengintegralkan dan menggunakan syarat batas pada x_2, maka :

$$x_2 = \dot{x}_1 = \begin{cases} \beta t & 0 \le t < \tau \\ -\alpha(t-T) & \tau < t \le T \end{cases} \qquad (2.4.14)$$

diintegralkan lagi dan digunakan syarat batas pada x_1, maka :

$$x_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta t^2 & 0 \le t < \tau \\ -\frac{1}{2}\alpha(t-T)^2 + a & \tau < t \le T \end{cases} \qquad (2.4.15)$$

Sehingga x_1 (jarak) dan x_2 (kecepatan) kontinu pada $t = \tau$, maka didapat :

$$\beta\tau = \alpha(T - \tau)$$

$$\frac{1}{2}\beta\tau^2 = a - \frac{1}{2}\alpha(\tau - T)^2$$

$$\alpha(\tau - T)^2 = 2a - \beta\tau^2$$

$$\tau - T = \left[\frac{2a - \beta\tau^2}{\alpha}\right]^{1/2}$$

$$T = \tau - \left[\frac{2a - \beta\tau^2}{\alpha}\right]^{1/2}$$

Dengan mengeliminasikan T kedalam $\beta\tau = (T - \tau)\alpha$, maka diperoleh witch waktu :

$$\beta\tau = (T - \tau)\alpha$$

$$\tau = \frac{\alpha}{\beta}\left[\left(\tau - \left[\frac{2a - \beta\tau^2}{\alpha}\right]^{1/2}\right) - \tau\right]$$

$$= \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left[\frac{2a - \beta\tau^2}{\alpha}\right]\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2a\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha\tau^2}{\beta}\right]^{1/2}$$

$$\tau^2 + \frac{\alpha\tau^2}{\beta} = \frac{2a\alpha}{\beta^2}$$

$$\left[\frac{\beta + \alpha}{\beta} \right] \tau^2 = \frac{2a\alpha}{\beta^2}$$

$$\tau^2 = \frac{2a\alpha}{\beta^2} \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\tau = \left[\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)} \right]^{1/2} \qquad (2.4.16)$$

Dan waktu akhir adalah :

$$\beta\tau = \alpha T - \alpha\tau$$

$$T = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \tau$$

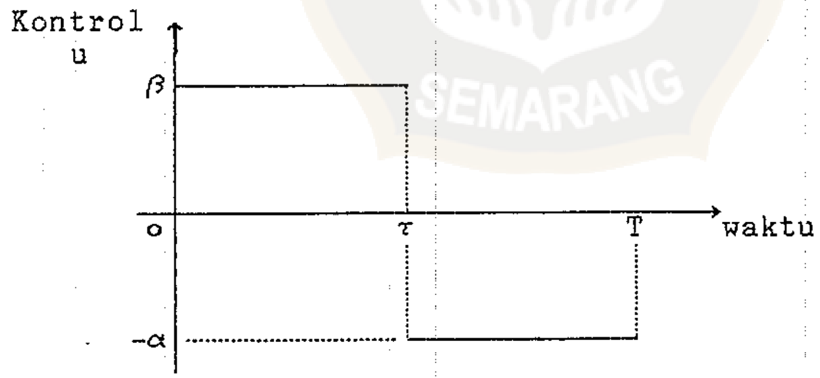
$$T = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \left[\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)} \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \right]^{1/2} \qquad (2.4.17)$$

Dan optimal kontrol diberikan oleh :

$$u = \begin{cases} \beta & 0 \le t < \tau \\ -\alpha & \tau < \alpha \le T \end{cases} \qquad (2.4.18)$$

Ini diperlihatkan dalam gambar (2.4.1)



Gambar 2.4.1. Optimal path.

Terlihat jelas dari grafik di atas bahwa kontrol mempunyai swicth (diskontinu) pada waktu $t = \tau$ dan kontrol hanya mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum. Kontrol jenis ini disebut "Bang-bang Kontrol".

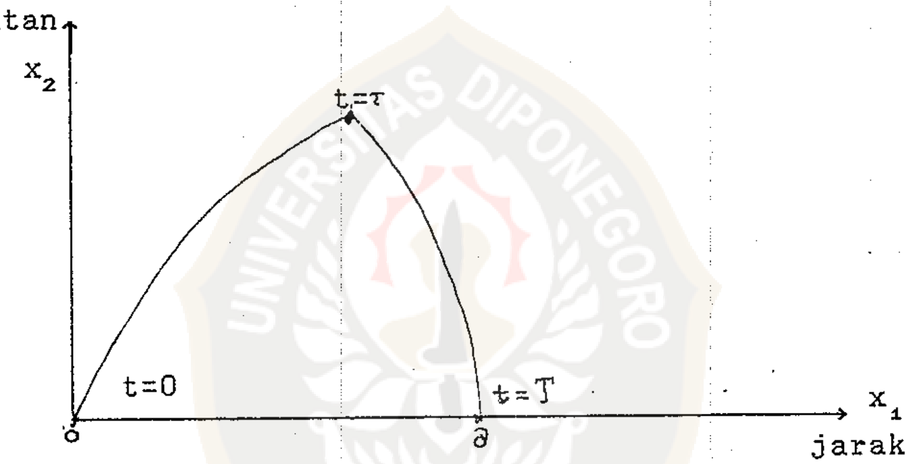
Dari (2.4.15) dan (2.4.14) terlihat bahwa untuk $0 \le t \le \tau$

$$x_2^2 = \beta^2 t^2 = 2\beta x_1$$

Dan untuk $\tau < t \leq T$

$$x_2^2 = \alpha^2 (t - T)^2$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\alpha(t - T)^2 + a \right] - (-2\alpha) + 2a\alpha$$
$$= - x_1 2\alpha + 2a\alpha$$
$$= 2\alpha(a - x_1)$$

Trajektori-trajektori ini digambarkan pada bidang x_1 - x_2 dalam gambar (2.4.2)



Gambar 2.4.2. Trajektori.

2.5. Prinsip Pontryagin

Dalam hal ini Pontryagin Principle (Prinsip Pontryagin) sering juga disebut Prinsip Maksimum atau Prinsip Minimum Pontryagin.

Prinsip ini berlaku bila Hamiltonian H tidak pada batas-batas dari variabel-variabel kontrolnya.

Pandang masalah untuk mendapatkan optimal kontrol u yang menghasilkan nilai-nilai ekstrem dari

$$J = \int_0^T f_o(x,u,t)\, dt \qquad (2.5.1)$$

dengan subyek persamaan diferensial

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t) \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (2.5.2)$$

syarat awal $x = x_o$ dan syarat akhir pada x_1, x_2, ..., x_q ($q \leq n$) dan subyek untuk $u \in U$ (daerah kontrol yang masih dapat diterima), didefinisikan oleh :

$$U = \{u : -\alpha \leq u \leq \beta\}$$

Dari persamaan (2.5.1) dan dengan multiplikator Lagrange, dibentuk fungsi yang diperluas yaitu :

$$J^* = \int_0^T \{f_o + \sum_{i=1}^{n} p_i(f_i - \dot{x}_i)\}\, dt \qquad (2.5.3)$$

dengan p_i ($i = 1,2,\ldots,n$) dikenal sebagai variabel-variabel adjoin.

Dan definisi Hamiltonian

$$H = f_o + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i \qquad (2.5.4)$$

sehingga persamaan (2.5.3) dapat ditulis :

$$J^* = \int_0^T \{H - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i\}\, dt \qquad (2.5.5)$$

Integrand $F = H - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{x}_i$ tergantung pada x, u dan t.

Dibentuk (n + m) persamaan-persamaan Euler yaitu :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \qquad (i= 1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}(-p_i) = 0$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (2.5.6)$$

dengan $\dot{p}_i$ dikenal sebagai persamaan-persamaan adjoin dan

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_j}\right) = 0 \qquad (j= 1,2,\ldots,m)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} - \frac{d}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0$$

untuk setiap $u_j (j=1,2,\ldots,m)$ dalam daerah kontrol yang dapat diterima. Dan dengan menganggap syarat-syarat batas x_l adalah khusu pada $t = T$ untuk $l = 1,2,\ldots,q$ $(\leq n)$ berarti $x_i(0)$ $(i=1,1,3,\ldots,n)$ dan $x_l(T)$ $(l=1,2,\ldots,q)$ adalah khusus dan nilai-nilai yang tersisa yaitu $x_{qH}(T), \ldots, x_n(T)$ adalah bebas sehingga :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} = 0 \qquad (k = q + 1, \ldots, n) \text{ pada } t = T$$

maka

$p_k(T) = 0$ untuk x_k tidak khusus pada $t = T$ yang mana dikenal sebagai syarat transversality. Sehingga dapat ditentukan bahwa pada optimal kontrol H diminimalkan terhadap variabel-variabel kontrol $u_1, u_2, \ldots, u_m$.
Ini dikenal sebagai Pontryagin Minimum Principle (Prinsip Minimum Pontryagin).

Contoh :

Pandang masalah untuk meminimalkan :

$$J = \int_0^T 1 \, dt$$

dan subyek adalah

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$

dengan

$$-\alpha \leq u \leq \beta$$

dan

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$x_1(T) = a$

$x_2(T) = 0$

Dengan pengantar variabel-variebel adjoin p_1 dan p_2, Hamiltonian diberikan oleh :

$$H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u$$

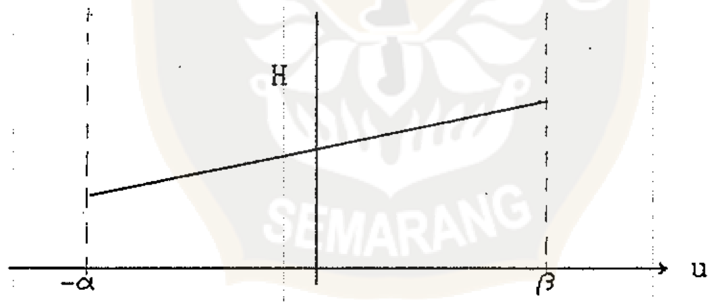
Disini meminimalkan H terhadap u dengan $u \in U=[-\alpha,\beta]$ daerah kontrol yang masih dapat diterima.

Karena H linier dalam u, jelas bahwa minimum pada batas daerah kontrol yaitu pada salah satu dari $u = -\alpha$ atau $u = \beta$.

Optimal kontrol ini dapat ditulis sebagai :

$$u = \begin{cases} -\alpha \text{ jika } p_2 > 0 \\ \beta \text{ jika } p_2 < 0 \end{cases}$$

Hal ini diperlihatkan dalam gambar (2.5.1) :



Gambar 2.5.1. Keadaan $P_2 > 0$

2.6. Model Persamaan yang Digunakan

1. Present value (PV) atau nilai sekarang

Jika diketahui nilai suatu barang 1 tahun yang akan datang adalah U dengan suku bunga per tahun δ maka dapat ditentukan nilai sekarang barang tersebut yang setara, yaitu :

$U_1 = PV(1 + \delta)$

Untuk 1 tahun lagi diperoleh :

$$U_2 = U_1(1 + \delta) = PV(1 + \delta)(1 + \delta) = PV(1 + \delta)^2$$

Untuk n = t tahun yang akan datang, maka diperoleh rumus :

$$U_t = PV(1 + \delta)^t$$

Hal ini berlaku untuk suku bunga yang dibayarkan per tahun.

Bila suku bunga dibayarkan setiap 6 bulan sekali, maka diperoleh :

$$U_{1/2} = PV(1 + \frac{\delta}{2})$$

$$U_1 = PV(1 + \frac{\delta}{2})^2$$

Sehingga pada n = t tahun diperoleh :

$$U_t = PV(1 + \frac{\delta}{2})^{2t} \qquad (*)$$

Dan bila suku bunga dibayarkan m kali dalam setahun maka rumus (*) menjadi :

$$U_t = PV(1 + \frac{\delta}{m})^{mt} \qquad (**)$$

Apabila m mendekati tak hingga, $(1 + \frac{\delta}{m})^{mt}$ akan mendekati $e^{\delta t}$ atau $\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{\delta}{m})^{mt} = e^{\delta t}$

Bukti :

Dengan deret Taylor akan dideretkan e.

Misalkan $f(x) = e^x$ maka $f(0) = 1$

dideferensialkan

$f'(x) = e^x$ maka $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ maka $f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^n(x) = e^x$ maka $f^n(0) = 1$

Maka diperoleh :

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{1.x}{1!} + \frac{1.x^2}{2!} + \dots + \frac{1.x^n}{n!}$$

Untuk x = 1 diperoleh :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Dengan Binomium Newton, mendideretkan $(1 + \frac{1}{m})^m$ yaitu :

$$(1 + \frac{1}{m})^m = 1 + \binom{m}{1}\frac{1}{m} + \binom{m}{2}\frac{1}{m^2} + \dots + \binom{m}{m}\frac{1}{m^m}$$

$$= 1 + \frac{1}{m}\,\frac{m!}{(m-1)!} + \frac{m!}{2!\ (m-2)!}\,\frac{1}{m^2} + \dots + \frac{m!}{m!}\,\frac{1}{m^m}$$

$$= 1 + 1 + \frac{m-1}{2!m} + \frac{(m-1)(m-2)}{3!\ m^2} + \dots + \frac{1}{m^m}$$

Maka :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+1+\frac{m-1}{2!m} + \frac{(m-1)(m-2)}{3!\ m^2} + \dots + \frac{1}{m^m}\right)$$

$$= 1 + 1 + \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) + \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^2-3m+3}{3!\ m^2}\right)$$

$$+ \dots + \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^m}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + 0$$

Karena hasil penderetan kedua persamaan sama, maka :

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{mt} = e^{\ln\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{mt}\right]}$$

$$= e^{\ln\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{\frac{m}{\delta}}\right]^{\delta t}}$$

$$= e^{\ln(e)^{\delta t}}$$

$$= e^{\delta t}$$

Sehingga untuk m mendekati tak hingga, persamaan

(**) menjadi :

$$U = PV\ e^{\delta t} \Longrightarrow PV = Ue^{-\delta t}$$

Supaya PV berlaku untuk setiap satuan waktu t maka persamaan $PV = Ue^{-\delta t}$ menjadi $\frac{dPV}{dt} = Ue^{-\delta t}$

diintegralkan menjadi :

$$PV = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ U\ dt$$

Untuk satuan waktu t dalam interval waktu [0,T], persamaan $\frac{dPV}{dt} = Ue^{-\delta t}$ menjadi :

$$PV = \int_0^{T} e^{-\delta t}\ U\ dt$$

Ini disebut Integral Welfare yang sering dinotasikan dengan W, yaitu :

$$W = \int_0^{T} U\ e^{-\delta t}\ dt$$

2. Model Verhulst

Misalkan

x = banyaknya populasi.

K = tingkat jenuh populasi yaitu batas maksimum populasi bisa hidup layak.

Sehingga tingkat populasi x dalam interval [0,K] yaitu $0 \le x \le K$.

Dengan penggandaan kedua ruas dengan $\frac{1}{K}$ diperoleh $\frac{x}{K} \le 1$ yaitu $0 \le 1 - \frac{x}{K}$.

Misalkan F(x) adalah tingkat pertumbuhan populasi.

Karena tidak ada populasi maka tidak ada pertumbuhan populasi. Sehingga tingkat pertumbuhan populasi pada

$x = 0$ adalah $F(x) = 0$.

Karena K batas maksimum x maka x tidak mungkin lebih besar dari K sehingga tingkat pertumbuhan populasi pada $x = K$ adalah $F(K) = 0$

Jadi untuk $x = 0$; $F(0) = 0$ maka $F(0) = x$

$x = K$; $F(K) = 0$ maka $F(K) = 1 - \frac{x}{K}$

Karena F(0) dan F(K) berlaku pada F(x), maka F(0) dan F(K) merupakan pembagi dari F(x), yaitu :

$$F(x) = x(1 - \frac{x}{K})$$

Karena tingkat pertumbuhan populasi tidak mungkin negatif dan dari persamaan $F(x) = x(1 - \frac{x}{K})$, maka dapat disusun keluarga kurva-kurva dari persamaan tersebut yaitu :

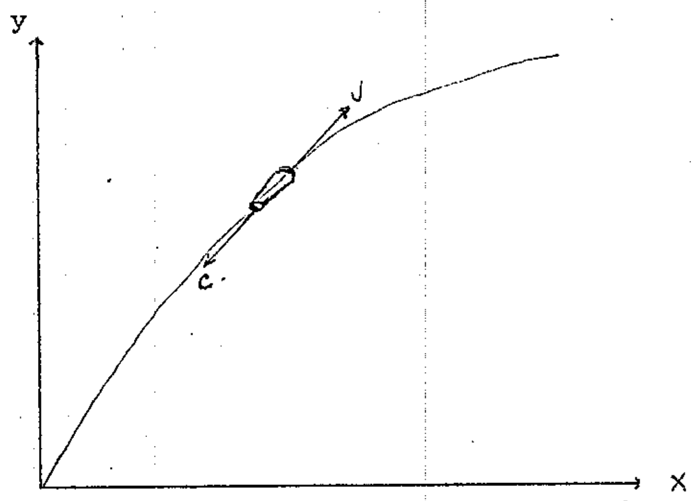
$$F(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$$,dengan r = konstanta positip

yang biasanya disebut Model Verhulst.

3. Persamaan Gerak Roket

Misalkan suatu roket bermassa m diluncurkan dengan kecepatan v, maka roket tersebut merupakan momentum yang besarnya berbanding lurus dengan massa dan kecepatan benda tersebut, yaitu :

$$P = m.v$$



Gambar 2.6.1. Arah Kecepatan Roket

Dari gambar terlihat bahwa

v = kecepatan naik dari raket

c = kecepatan dorongan ke bawah

dengan v = -c yaitu kecepatan v dan kecepatn c adalah sama dengan arah berlawanan.

Menurut Hukum Newton II

$$F = m.a$$

dengan

F = gaya yang bekerja pada benda

m = massa benda

a = percepatan yang ditimbulkannya.

Dari $a = \frac{v}{t}$ maka Hukum Newton II menjadi :

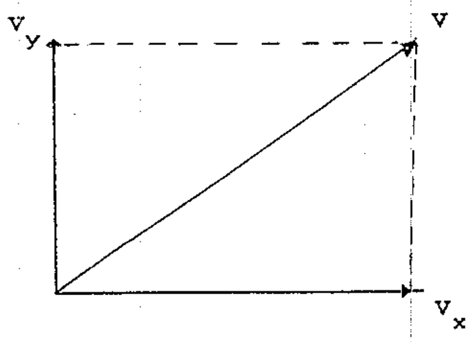
$$F = m.a = m.\ \frac{v}{t} = \frac{P}{t} \longrightarrow F = \frac{P}{t}$$

didiferensialkan menjadi :

$$dF = \frac{dP}{dt}$$

- Pandang kecepatan naik dari roket :

Gambar 2.6.2. Kecepatan naik dari Roket



v merupakan resultan dari v_x dan v_y,

dengan

v_x = kecepatan horisontal yang merupakan gerak lurus beraturan.

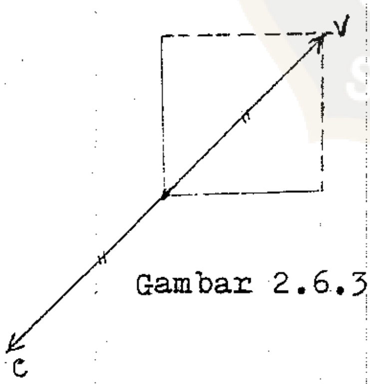
v_y = kecepatan vertikal yang merupakan gerak lurus berubah beraturan.

Sehingga v berubah per satuan waktu.

Dengan menganggap m tetap maka :

$$dF = \frac{dP}{dt} = \frac{dmv}{dt} = m\,\frac{dv}{dt}$$

- Pandang kecepatan dorongan ke bawah



Gambar 2.6.3.Kecepatan dorong motor Roket

Karena dalam pembakaran konstan maka kecepatn dorong pada roket konstan dan terjadi perubahan massa roket dengan berkurangnya bahan bakar maka perubahan gaya :

$$dF = \frac{dP}{dt} = \frac{d(cm)}{dr} = c\,\frac{dm}{dt}$$

Menurut Hukum Newton III

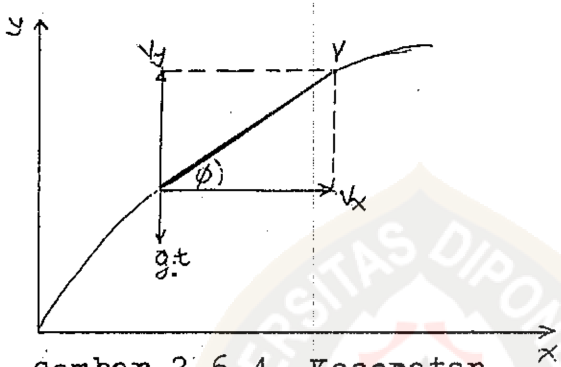
Gaya aksi = - Gaya reaksi

$$m \frac{dv}{dt} = - c \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{c}{m} \frac{dm}{dt}$$

$$= \frac{c}{m} \beta$$

dengan $\beta = - \frac{dm}{dt}$



Gambar 2.6.4. Kecepatan

Maka $v_x = v \cos \phi$

$v_y = v \sin \phi - gt$

didiferensialkan terhadap t diperoleh :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos \phi$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv}{dt} \sin \phi - g$$

dengan substitusi $\frac{dv}{dt} = \frac{c}{m} \beta$ diperoleh :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{c\beta}{m} \cos \phi$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{c\beta}{m} \sin \phi - g$$

Karena gaya yang bekerja pada roket lebih dari satu maka Hukum Newton II menjadi $\Sigma F = ma$

- Untuk gaya sejajar sumbu x

$$\Sigma F_x = ma \longrightarrow mA = m \frac{dv_x}{dt}$$

- Untuk gaya sejajar sumbu y

$$\Sigma F_y = ma \longrightarrow mA - mg = m \frac{dv_y}{dt}$$

Maka persamaan gerak roket adalah :

$$m \frac{dv}{dt} = mA + F_{ext}$$

dengan $v = (v_x, v_y)$

$F_{ext} = (0, -mg)$

A = percepatan dorongan oleh motor roket.

Dari gaya arah horisontal

$$m \frac{dv}{dt} = mA + F_x$$

$$= mA + 0$$

$$\frac{dv}{dt} = A$$

Maka besar A adalah $|A| = \frac{c\beta}{m}$