BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Proses Stokastik

Definisi 1

Proses Stokastik adalah suatu kumpulan variabel random $X(t)$, $t \in T$ dengan T himpunan parameter waktu. Jadi dapat dikatakan bahwa proses stokastik merupakan keluarga fungsi waktu.

contoh :

$x(t) = p + q\ (t)$ dengan p dan q dua random variabel.

keterangan,

p dan q masing - masing random variabel maka X (t) yang merupakan jumlahan p dan q adalah kumpulan random variabel sehingga X (t) merupakan proses stokastik.

Definisi 2

Proses Markov adalah proses stokastik dimana masa lalu tidak berpengaruh kepada masa yang akan datang bila masa sekarang diketahui.

Dalam proses Markov untuk semua n, n = 0,1,2,...... dan untuk tiap $t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ dan harga X_n sebagi harga khusus variabel acak X(t), terdapat :

$$P\ \{X(t_n) \le \frac{x_n}{X(t_o)} = x_o, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$= P\left\{ X(t_n) \le \frac{x_n}{X(t_{n-1}) = x_{n-1}} \right\}$$

ini dapat diartikan sebagai berikut :

(i) Distibusi peluang bersyarat dari $X(t_n)$ untuk harga-harga $X(t_n), X(t_1), \ldots, X(t_{n-1})$ yang sudah diketahui tegantung hanya pada harga $X(t_{n-1})$, yaitu harga tedekat dan tidak tergantung pada harga - harga

$X(t_o), X(t_1), \ldots, X(t_{n-2})$

(ii) Harga $P\{X(t_n) \le \frac{x_n}{X(t_{n-1})} = x_{n-1}\}$ disebut "Peluang Peralihan satu langkah" dari keadaan x_{n-1}pada langkah(n-1) kepada keadaan x_n pada langkah n.

(iii)Atau diketahui keadaan sistem pada saat sekarang,keadaan masa datang tidak tergantung pada masa lalu .

(iv) Atau mengetahui sejarah stokastik pada waktu t_{n-1} untuk dapat menurunkan sifat-sifat proses pada waktu ke n.

Dengan demikian , hukum peluang dari proses Markov seluruhnya teruraikan dengan mengetahui :

a>Syarat awal yang diberikan oleh $P\{ X(t_o) \le x_o\}$

b>Himpunan distribusi peluang bersyarat yang diberikan untuk semua $0 \le t_m < t_n$ $m,n = 0,1,2,\ldots$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

oleh $P\ \{X(t_n) \le x_n \mid X(t_m) = x_m\}$ yang menentukan "Distribusi Peluang Peralihan" dari Proses Markov.

2.2 Probabilitas

Definisi 3

Ruang sampel (Ω) adalah merupakan peristiwa yang mungkin terjadi.

Definisi 4

Suatu event (peristiwa) adalah himpunan bagian dari ruang sampel .

Definisi 5

Ruang event (∂) adalah himpunan dengan anggota - anggotanya semua event yang mungkin dari eksperimen.

Definisi 6

Misalkan Ω adalah ruang sampel dan ∂ adalah ruang event ,suatu fungsi probabilitas P[.] adalah fungsi himpunan dengan daerah wilayah ∂ dan kodomain [0,1]yang memenuhi:

(i) $P[A] \ge 0$ untuk setiap A

(ii) $P[\Omega] = 1$

(iii) Jika A_1 , A_2 barisan event yang saling asing dalam ∂.

yaitu :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ untuk } i \neq j \quad i,j = 1,2,\ldots \text{ dan}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{1}^{\infty} A_i \in \partial \text{ maka } P[\bigcup_{1}^{\infty} A_i] = \sum_{1}^{\infty} [A_i]$$

Definisi 7

Suatu ruang probabilitas adalah triple $(\Omega, \partial, P[.])$ dimana Ω adalah ruang sampel , ∂ ruang event dan P[.] adalah fungsi probabilitas dengan daerah wilayah ∂ .

Definisi 8

Misalkan $(\Omega, \partial, p[.])$ adalah ruang probabilitas, A dan B adalah dua event dalam ∂ .Probabilitas bersyarat dari event A jika diketahui event B,dinyatakan dengan notasi $P[A|B]$,didefinisikan sebagai.

$$P[A|B] = \frac{P[AB]}{P[B]} \text{ jika } P[B] \neq 0 \text{ dan tidak didefinisikan}$$

untuk $P[B]=0$.

Contoh :

Misalkan dua mata uang dilambungkan ,

Ω ={(H,H);(H,T);(T,H);(T,T)} dan misalkan setiap titik berkemungkinan sama.

Hitunglah :

(i) Probabilitas kedua mata uang menunjukkan H dengan syarat utama mata uang yang pertama harus menunjukkan H.

(ii) Probabilitas kedua mata uang menunjukkan H dengan syarat sekurang-sekurangnya satu mata uang menujukan H.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

penyelesaian :

Misalkan A_1= {H pada mata uang pertama } dan A_2={H pada mata uang ke dua }maka

$$(i)\ P[A_1A_2|A_1] = \frac{P[A_1A_2A_1]}{P[A_1]} = \frac{P[A_1A_2]}{P[A_1]} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

$$(ii)\ P[A_1A_2|A_1\cup A_2] = \frac{P[A_1A_2\cap(A_1\cup A_2)]}{P[A_1\cup A_2]}$$

$$= \frac{P[A_1A]}{P[A_1]+P[A_2]-P[A_1A_2]}$$

$$= \frac{1/4}{2/4+2/4-1/4} = \frac{1}{3}$$

2.3 Random Variabel

Diberikan ruang probabilitas (Ω , ∂ , P[.]) suatu random variabel diberi notasi X atau X (.) adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan kodomain R = {X | X riil } yang memenuhi persyaratan untuk setiap bilangan r terdapat event , A_r{w : X (w) $\le$ r } $\in \partial$.

Contoh :

Sebuah mata uang dilempar maka Ω = { H ,T } ,

Didefinisikan X sebagai jumlah H,atau X (w) = 1 jika w = H ,dan X(w) =0 jika w = T

Ambil r = 0 maka A_r = {w : X(w) $\le$ 0} ={T}

Ambil r < 0 maka A_r = {w : X(w) < 0} =$\emptyset \in \partial$

Ambil r = 1 maka A_r= {w : X(w) $\le$ 1} ={H,T} =$\Omega \in \partial$

Ambil 0<r<1 maka A_r = {w : X(w) $\le$ r} ={T} $\in \partial$

Ambil r>1 maka A_r = {w : X(w) $\le$ r} ={H,T} = $\Omega \in \partial$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

ternyata untuk setiap bilangan riil r terdapatlah event $A_r \in \partial$ sehingga X merupakan random variabel

Jenis-jenis random variabel :

a. Random Variabel Diskrit

Suatu random variabel X disebut diskrit jika range dari X adalah countabel (berhingga)

b. Random Variabel Kontinu

Suatu random variabel X disebut Kontinu jika terdapat fungsi $f_x(.)$ sedemikian sehingga

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u)\, du$

2.4 Matriks dan Operasi Pada Matriks

Definisi 9

Matriks adalah himpunan skalar bilangan riil atau komplek yang disusun atau dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris dan kolom) .Dengan skalar-skalar disebut elemen matriks.

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 10

Ukuran atau ordo matriks adalah banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n) ditulis (m × n)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai ordo (3 × 2)

Operasi-operasi pada Matriks :

a. Penjumlahan Matriks (berlaku untuk matriks berukuran sama)

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ matriks yang berukuran sama ,maka A + B adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,untuk setiap i dan j.

Atau $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka,}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian Skalar terhadap Martriks

Kalau λ suatu skalar (bilangan) dan $A = (a_{ij})$ maka $\lambda A = (\lambda\ a_{ij})$ dengan perkataan lain ,matriks λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan λ.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \text{maka } 3A = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.3 \\ 3.5 & 3.7 \\ 3.4 & 3.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 21 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

catatan :

Mengurangi matriks A dengan Matriks B,yaitu A - B adalah menjumlahkan matriks A dengan matriks -B

c. Perkalian Matriks

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian, $AB \neq BA$ .perkalian matriks AB ,matriks A kita sebut matriks pertama dan B matriks ke dua .

Syarat perkalian Matriks :

Jumlah banyaknya kolom matriks pertama = jumlah banyaknya baris matriks kedua

Definisi 11

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran $p \times q$ dan $B = (b_{ij})$ berukuran $q \times r$ .Maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$berukuran $p \times r$ dimana :

$$c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}\ b_{qj}$$

contoh :

$$A = [3 \quad 4 \quad 7] \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

karena banyaknya kolom matriks A = 3 dan banyaknya baris matriks b = 3 ,bearti AB ada dan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

berukuran (1 × 1).

$c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i1}\ b_{2j} + a_{i3}\ b_{3j}$

$c_{11} = a_{11}\ b_{11} + a_{12}\ b_{21} + a_{13}\ b_{31}$

$= 3.2 + 4.3 + 7.5$

atau ditulis dengan :

$$AB = [3.2 + 4.3 + 7.5]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= [3.2 + 4.3 + 7.5]$$

$$= [53]$$

d.Hukum Perkalian Matriks

Jika A,B,C matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks yang di perlukan maka :

(i) $A(B + C) = AB + AC$, $(A + C)A = BA + CA$ memenuhi hukum distributif.

(ii) $A(BC) = (AB)\ C$ memenuhi hukum asosiatif

(iii) Perkalian tidak komutatif $AB \neq BA$

(iv) Jika $AB = 0$ (matriks nol) yaitu matriks yang semua elemennya nol, kemungkinan - kemungkinannya:

a. $A = 0$ dan $B = 0$

b. $A = 0$ dan $B = 0$

c. $A \neq 0$ dan $B \neq 0$

(v) Bila $AB = AC$ belum tentu $B = C$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

<u>Definisi 12</u>

Matriks A = (a_{ij}) ,Transpose dari matriks A $=(a_{ij})$ adalah $A^T = (a_{ji})$.

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)