# BAB III

# MASALAH PERJALANAN SALESMAN

## 3.1. JARINGAN PERJALANAN SALESMAN

Diberikan $n$ tempat. Seorang salesman di dalam perjalanannya merencanakan mengunjungi beberapa tempat tertentu sekali dan hanya sekali dan kembali ke tempat semula ( katakanlah kantor distributor ). Permasalahan yang dihadapi adalah bagaimana seorang salesman tersebut menentukan urutan kunjungannya sehingga perjalanan keliling yang ditempuh mempunyai penjang ( atau jarak, atau waktu tempuh) seminimal mungkin.

Permasalahan perjalanan keliling salesman tersebut dalam graph dapat dinyatakan dengan model jaringan. Dengan menyatakan bahwa tempat - tempat yang dikunjungi sebagai himpunan titik - titik (vertex) dan jalan-jalan penghubung tempat yang dikunjungi sebagai himpunan garis - garis suatu jaringan. Sedangkan bobot ( biaya, atau waktu tempuh ) setiap jalan yang ditempuh dinyatakan sebagai panjang busur.

Pada permasalahan ini, untuk selanjutnya dipakai kata **simpul** untuk menyebut tempat yang dikunjungi, dan **busur** untuk jalan-jalan penghubung (arc untuk **directed graph** dan **edge** untuk **undirected graph**) tempat yang dikunjungi. Sedangkan pengertian bobot (**weight**) atau harga (**cost**) atau panjang (**lenght**) garis yang dilalui, lebih lanjut akan digunakan kata **panjang busur** $c_{ij}$.

Dengan menggunakan terminologi dari teori graph, secara lengkap permasalahan tersebut dapat diformulasikan :

Diberikan busur berarah sederhana dalam graph $G = (V,X)$ dengan $n$ simpul $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Diberikan suatu integer non-negatif $c(i,j) = c_{ij}$ disebut panjang busur dari busur-busur $(i,j) \in X$. Dianggap matriks panjang busur $\mathfrak{C} = (c_{ij})$ dengan $c_{ij} = \sim$ menjadi himpunan jika $(i,j) \in X$, terutama juga $c_{ij} = \sim$ menjadi himpunan untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$.

Tentukan suatu *sirkuit hamilton* (misal, suatu sirkuit yang berisi setiap simpul dari G hanya sekali) $H = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \ldots\ldots, v_{i(n+1)} = v_{i1})$ dengan total panjang yang minimal, maka :

Minimalkan $\sum_{j=1}^{n} c_{i_j i_{j+1}}$ .

Pada saat dianggap sebagai masalah pengoptimalan, Masalah Perjalanan Salesman mengambil bentuk :

Minimalkan $\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} z_{ij}$

Dengan syarat,

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1 \quad \text{untuk } j = 1,2,\ldots\ldots, n. \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 1 \quad \text{untuk } i = 1,2,\ldots\ldots, n. \qquad (2)$$

Jika $s$ adalah bilangan asli dengan $1 \le s \le [\frac{n}{2}]$ dan jika $i_1, i_2, \ldots, i_s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ adalah pasangan $s$ yang berbeda dari n bilangan asli yang pertama, misal $i_k \neq i_l$ jika $k \neq l$, maka berikut ini adalah dianggap benar.

$$z_{i_1 i_s}, z_{i_2 i_s}, z_{i_3 i_s}, \ldots\ldots z_{i_{s-1} i_s}, z_{i_s i_1}, \qquad (3)$$

$$z_{ij} \in (0,1) \text{ untuk } i,j = 1,2,\ldots,n. \qquad (4)$$

Syarat (1), (2) dan (4) menetapkan $Z = (z_{ij})$ dengan $i,j = 1,2, \ldots n$ sebagai matriks permutasi, syarat (3) menetapkan bahwa seleksi yang feasible dari $z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}, \ldots\ldots, z_{i_n}$ seperti yang ditunjukkan barisan busur berikut,

$\{(v_{i1}, v_{i2}), (v_{i2}, v_{i3}), \ldots\ldots, (v_{i(n-1)}, v_{in}), (v_{in}, v_{i1})\}$ membentuk sirkuit hamilton (tidak ada sirkuit dengan panjang < N).

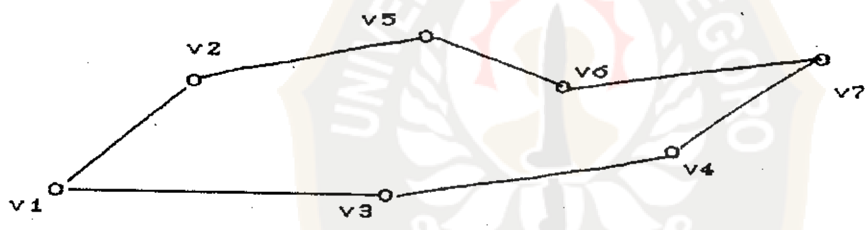
## 3.2. SIRKUIT (PUTARAN) HAMILTON

Dalam suatu graph $G = (V, X)$ terdapat suatu pengertian yang diperkenalkan oleh **Sir William Hamilton** pada abad 19, yang berkaitan dengan pengertian sirkuit atau putaran.

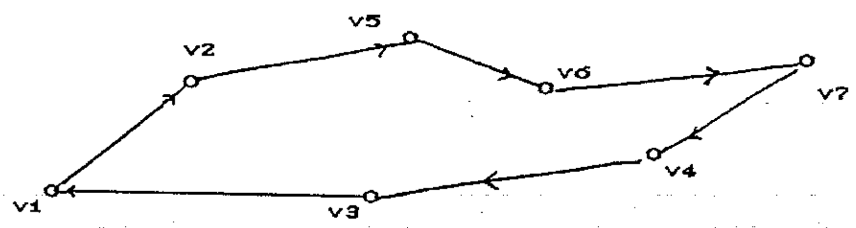
Definisi 3.2.1

*Suatu sirkuit* (circuit) *dalam graph berarah* (directed graph) *atau putaran* (cycle) *dalam graph tak berarah* (undirected graph) *disebut Sirkuit atau Putaran Hamilton apabila sirkuit atau putaran tersebut melewati semua simpul dari* $v \in V$ *sekali dan hanya sekali.*

Contoh 3.2.1




*Gambar 3.2.1*
putaran hamilton




*Gambar 3.2.2.*
sirkuit hamilton

Jika busur yang menghubungkan simpul - simpul itu mempunyai harga ( panjang, bobot, ongkos ), maka sirkuit / putaran yang terbentuk juga mempunyai harga, apabila harga setiap busur yang membentuk sirkuit tersebut dijumlahkan. Total panjang/harga dari sirkuit/putaran ini dinamakan **Panjang Sirkuit /Putaran Hamilton**

Representasi dari Sirkuit/Putaran Hamilton dalam masalah perjalanan salesman adalah membentuk suatu sirkuit/putaran dengan panjang busur yang minimal. Jadi solusi dari masalah perjalanan salesman merupakan Sirkuit/Putaran Hamilton dengan total panjang sirkuit yang minimal.

**Teorema 3.2.1.**

*Misalkan G adalah suatu graph sederhana dengan jumlah simpul paling sedikit tiga buah. Bila untuk setiap pasangan simpul x dan y dalam G, jumlah derajat dari simpul x dan derajat dari simpul y paling sedikit n, maka graph G akan mempunyai sirkuit hamilton.*

**Bukti :**

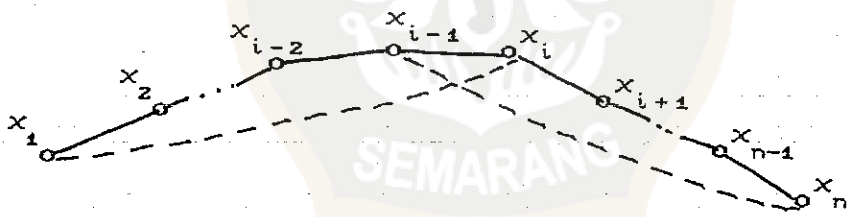
*Yang pertama-tama harus ditunjukkan adalah bahwa G merupakan graph yang terhubung. Hal ini akan dibuktikan dengan kontradiksi. Misalkan G tidak terhubung. Maka G paling sedikit akan mempunyai dua komponen terhubung. Misalkan* komponen terhubung yang pertama mempunyai $n_1$ simpul dan komponen terhubung lainnya mempunyai $n_2$ simpul, dan $n_1 + n_2 = n$.

Misalkan x adalah salah satu simpul dari komponen terhubung pertama dan y salah satu simpul dari komponen terhubung kedua, jadi tidak ada busur yang menghubungkan x dan y. Karena graph G adalah graph sederhana, maka jumlah busur yang bertemu pada x maksimum adalah $n_1 - 1$ busur dan jumlah busur yang bertemu pada y maksimum adalah $n_2 - 1$ busur. Jadi jumlah busur-busur yang bertemu pada x dan y atau jumlah derajat dari simpul x dan y adalah $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n - 2$. Tetapi hal ini bertentangan dengan kondisi yang diberikan oleh teorema. Jadi pemisalan bahwa graph tidak terhubung adalah salah, dan graph G adalah graph yang terhubung.

Misalkan sekarang $\Pi = x_1, x_2, \ldots, x_r$ adalah lintasan elementer yang terpanjang pada G. Maka ada dua kemungkinan yang terjadi, yaitu nilai $r = n$ atau $r < n$.

Untuk kasus pertama di mana $r = n$, maka $\Pi$ adalah lintasan hamilton yang menghubungkan simpul $x_1$ dan $x_n$. Bila $x_1$ dan $x_n$ dihubungkan oleh suatu busur, maka $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$ adalah sirkuit hamilton yang dicari.

Misalkan $x_1$ dan $x_n$ tidak dihubungkan oleh satu busur. Misal $x_1$ dihubungkan oleh sejumlah $p \geq 1$ simpul-simpul dan $x_n$ dihubungkan oleh sejumlah $q \geq 1$ simpul-simpul. Dari pernyataan yang diberikan pada teorema, maka jelas bahwa $p + q \geq n$. Jika pada lintasan $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i$ bila ada busur yang menghubungkan $x_i$ dengan $x_1$ dan ada busur lain yang menghubungkan $x_{i-1}$ dengan $x_n$, maka $x_1, x_2, x_i, x_{i+1}, \ldots\ldots, x_n$, $x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_1$ akan membentuk suatu sirkuit hamilton seperti terlihat pada gambar 3.2.3.




gambar 3.2.3
pembentukan sirkuit hamilton

Yang akan ditunjukkan sekarang adalah pada graph G pasti ada paling sedikit satu simpul yang memenuhi persyaratan tersebut di atas, dan bila hal ini telah berhasil dilakukan, maka teorema ini terbukti untuk kasus pertama. Karena $x_1$ dihubungkan oleh $p$ buah busur ke $p$

simpul dari barisan simpul $x_2, \ldots\ldots, x_n$. Bila sekarang $x_n$ tidak terhubung ke suatu simpul pada $\Pi$ di depan suatu simpul yang terhubung oleh simpul $x_1$, maka q buah simpul yang terhubung pada $x_n$ akan diperoleh dari $(n-1) - p$ simpul lainnya. Dari perhitungan ini akan diperoleh bahwa :

$$(n - 1) - p \geq q \text{ atau } p + q \leq n - 1$$

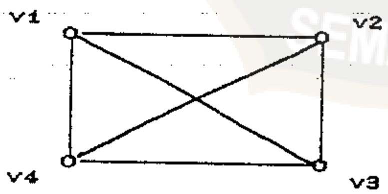
tetapi hal ini bertentangan dengan pemisalan bahwa $p + q \geq n$. Jadi pembuktian untuk kasus ini telah lengkap.

Untuk kasus selanjutnya adalah kasus di mana $r < n$. Misalkan $x_1$ terhubung dengan simpul y yang bukan simpul dari lintasan $\Pi$, maka lintasan baru $y, x_1, x_2, \ldots, x_r$ adalah lintasan elementer yang lebih panjang dari $\Pi$, tetapi hal ini tidak mungkin. Jadi $x_1$ hanya terhubung dengan simpul-simpul pada $\Pi$. Dengan argumentasi yang sama dengan argumentasi untuk kasus pertama, dapat ditunjukkan bahwa ada sirkuit elementer $\Pi' = y_1, y_2, \ldots, y_r, y_1$ yang panjangnya r. Karena G terhubung maka ada satu simpul z, sehingga $z, y_j, \ldots, y_r, y_1, \ldots\ldots, y_{j-1}$ adalah lintasan elementer yang panjangnya r+1. Tetapi hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa $\Pi$ adalah lintasan elementer yang panjangnya r, *dan terpanjang dalam G. Jadi kasus kedua ini tidak mungkin terjadi, dan lengkap sudah pembuktian teorema tersebut.*

Oleh karena dalam masalah perjalanan salesman ini yang akan ditentukan adalah sirkuit(putaran) tunggal dengan bobot yang minimal, maka semua permasalahan yang diberikan dianggap bahwa graph G = (V,X) merupakan graph lengkap, dalam arti untuk semua simpul $i \in V$ dan $j \in V$ akan terdapat busur $(i,j) \in X$.

Contoh 3.2.2

Diberikan graph G = (V,E) seperti ditunjukkan oleh *gambar 3.2.3.*




*Gambar 3.2.4*

$V = \{1,2,3,4\}$

$X = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$

Dapat dilihat bahwa G merupakan graph yang lengkap, sehingga jika diambil simpul awalnya *1*, maka putaran yang dapat dibuat adalah :

a. *1 - 2 - 3 - 4 - 1.*

b. *1 - 2 - 4 - 3 - 1.*

c. *1 - 4 - 2 - 3 - 1.*

d. *1 - 4 - 3 - 2 - 1.*

e. *1 - 3 - 2 - 4 - 1.*

f. *1 - 3 - 4 - 2 - 1.*

Karena G mempunyai *4 simpul*, maka simpul kedua dalam putaran dapat dipilih *1* dari *3* pilihan, simpul ketiga dapat dipilih *1* dari *2* pilihan dan simpul keempat dapat dipilh *1* dari *1* pilihan. Jadi dapat dilihat bahwa G merupakan graph lengkap, maka untuk jumlah simpul $|V|=4$, akan terdapat $(4-1)!$ = 6 buah Putaran Hamilton. Secara umum, apabila jaringan G = (V,X) dengan $|V| = n$, dan jika telah dipilih satu simpul sebagai simpul awal, maka jumlah Sirkuit/Putaran Hamilton yang dapat dibuat dalam G adalah $(n-1)!$.

Oleh karena yang akan ditentukan adalah sebarisan nilai minimal dari sebarisan nilai yang dibentuk oleh sirkuit/putaran, maka jika G = (V,X,c) adalah jaringan perjalanan salesman dengan matriks panjang busurnya $(c_{ij})$, elemen - elemen matriksnya didefinisikan sebagai berikut :

$$c_{ij} = \begin{cases} \sim & \text{untuk } i=j \\ \geq 0 & \text{untuk } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

Contoh 3.2.3

Apabila graph G pada contoh 3.2.2 merupakan jaringan dengan panjang tiap busurnya diberikan oleh matriks panjang busur sebagai berikut :

$$(c_{ij}) = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{bmatrix} \sim & 8 & 10 & 21 \\ 8 & \sim & 6 & 15 \\ 10 & 6 & \sim & 7 \\ 21 & 15 & 7 & \sim \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \\ j \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \end{array}$$

Maka panjang perjalanan keliling yang dapat dibuat dalam G adalah :

a. Putaran $1-2-3-4-1$ panjangnya adalah $8+6+7+21 = 42$

b. Putaran $1-2-4-3-1$ panjangnya adalah $8+15+7+10 = 40$

c. Putaran $1-4-2-3-1$ panjangnya adalah $21+15+6+21 = 52$

d. Putaran $1-4-3-2-1$ panjangnya adalah $21+7+6+8 = 42$

e. Putaran $1-3-2-4-1$ panjangnya adalah $10+6+15+21 = 52$

f. Putaran $1-3-4-2-1$ panjangnya adalah $8+7+15+8 = 40$

Dari keenam perjalanan keliling tersebut, panjang perjalanan keliling $1 - 2 - 4 - 3 - 1$ dan $1 - 3 - 4 - 2 - 1$ merupakan panjang perjalanan yang minimal yaitu $40$ satuan panjang, di antara perjalanan keliling yang lain. Perjalanan keliling tersebut yang menjadi jawaban permasalahan perjalanan keliling salesman.

Dari elemen-elemen matriks tersebut terlihat bahwa elemen $c_{ij} = c_{ji}$, jadi matriksnya merupakan matriks yang simetris, sehingga jaringan yang terbentuk merupakan jaringan tak berarah.

Contoh 3.2.4

Jika panjang busur graph G pada contoh 3.2.2 diberikan oleh matriks panjang busur berikut :

$$(c_{ij}) = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{bmatrix} \sim & 8 & 10 & 21 \\ 8 & \sim & 6 & 15 \\ 15 & 7 & \sim & 13 \\ 10 & 12 & 9 & \sim \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \\ j \quad \begin{array}{cccc} 1 & \;\;2 & \;\;3 & \;\;4 \end{array} & \end{array}$$

Maka matriks panjang tersebut bukan merupakan matriks yang simetris, karena ada $c_{ij} \neq c_{ji}$. Jadi graph $G = (V, A)$ dengan matriks panjang busur $c_{ij}$ tersebut adalah jaringan berarah.

Panjang setiap perjalanan keliling yang dapat dibuat dalam G adalah :

a. Panjang 1-2-3-4-1 adalah 8+6+13+10 = 37.

b. Panjang 1-2-4-3-1 adalah 8+6+13+10 = 47.

c. Panjang *1-4-2-3-1* adalah *21+12+6+15 = 54.*

d. Panjang *1-4-3-2-1* adalah *21+12+6+15 = 45.*

e. Panjang *1-3-2-4-1* adalah *10+7+15+10 = 42.*

f. Panjang *1-3-4-2-1* adalah *10+13+12+8 = 43.*

Dari keenam perjalanan keliling tersebut, perjalanan *1-2-3-4-1* merupakan panjang perjalanan yang minimal dibandingkan dengan perjalanan yang lainnya.

Dalam bahasan **contoh** 3.2.3, terlihat bahwa masing-masing terdapat 2 putaran yang menghasilkan panjang busur yang sama. Sedangkan pada **contoh 3.2.4**, tidak ada pasangan perjalanan keliling yang total panjang busurnya sama. Namun untuk kasus yang lain, bisa juga ditemukan pasangan sirkuit dengan total panjang busur yang sama.

Jadi untuk jaringan tidak berarah, jika terdapat $|V| = n$, maka jumlah perjalanan keliling salesman yang mempunyai total panjang busur sama adalah sebanyak $\frac{1}{2}(n-1)!$ pasangan perjalanan keliling. Sehingga pada **contoh 3.2.4**, maka jumlah perjalanan keliling salesman yang mempunyai total panjang busur yang sama ada $\frac{1}{2}(4-1)! = 3$ pasangan.

Dengan menuliskan semua perjalanan yang mungkin, dapat ditentukan perjalanan salesman dengan total panjang busur yang minimal. Namun jika simpul

## 3.3. BEBERAPA TEOREMA DASAR

Teorema 3.3.1.

*Suatu perjalanan keliling yang minimal terhadap matriks* $(c_{ij})$, *akan juga minimal terhadap matriks* $(c'_{ij})$, *di mana* $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$ *dengan* $p_i = \min_j c_{ij}$, $q_j = \min_i (c_{ij} - p_i)$ *untuk* $i, j = 1, 2, \ldots n$.

**Bukti :**

*Misal* $\Pi = v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_n, v_1$ *suatu perjalanan keliling. Untuk setiap simpul anggota* $\Pi$ *katakanlah k, hanya terdapat satu busur yang menuju ke k dan meninggalkan k. Dapat dilihat bahwa panjang* $\Pi$ *terhadap* $(c'_{ij})$ *adalah* $\sum_k (p_k + q_k)$ *lebih kecil dari panjang* $\Pi$ *terhadap* $(c_{ij})$. *Oleh karena panjang dari setiap perjalanan keliling tereduksi dengan sejumlah panjang yang sama, maka perjalanan keliling minimalnya tetap tidak berubah. Bila* $(c_{ij})$ *ditransformasi menjadi* $(c'_{ij})$ *seperti di atas, dikatakan bahwa matriks panjang busur telah tereduksi dengan* $c(\mathfrak{B}) = \sum_k (p_k + q_k)$. *Dalam hal ini elemen-elemen pada baris i dan kolom j masing-masing direduksi dengan* $p_i$ *dan* $q_j$ *dengan* $p_i = \min_j c_{ij}$, $q_j = \min (c_{ij} - p_i)$ *untuk* $i, j = 1, 2, 3 \ldots n$.

*Selanjutnya suatu proses pereduksian (transformasi) dikatakan diperbolehkan (admissible) apabila* $p_i$ *dan* $q_j$ *sedemikian rupa sehingga* $c'_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

**Teorema 3.3.2**

$c(\mathfrak{B}) = \sum_k (p_k + q_k)$ *merupakan suatu* batas bawah *dari nilai panjang perjalanan keliling minimal terhadap* $(c_{ij})$, *jika proses transformasi* $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$ *dengan* $p_i = \min_j c_{ij}$, $q_j = \min_i (c_{ij} - p_i)$ *untuk* $i, j = 1,2, ..n$, *merupakan proses diperbolehkan.*

**Bukti :**

*Oleh karena* $c'_{ij} \geq 0$, *panjang busur minimal perjalanan keliling terhadap matriks* $(c'_{ij})$, *haruslah non negatif. Jadi* $c(\mathfrak{B})$ *tersebut merupakan batas bawahnya.*

**Korolari :**

$\sum_j (\mathit{Min}\ c_{ij}) + \sum_i \min (c_{ij} - \min_k c_{ik})$, *merupakan suatu* batas bawah *panjang busur dari perjalanan keliling minimal terhadap* $(c_{ij})$.

Teorema-teorema di atas merupakan prinsip dasar dari Metode Reduksi Branch and Bound.

Korolari :

$\sum_j (Min\ c_{ij}) + \sum_i min\ (c_{ij} - \min_k\ c_{ik})$, *merupakan suatu* **batas bawah** *panjang busur dari perjalanan keliling minimal terhadap* $(c_{ij})$.

Teorema-teorema di atas merupakan prinsip dasar dari Metode Reduksi Branch and Bound.

## 3.4. DISKRIPSI METODE REDUKSI BRANCH AND BOUND

Diberikan jaringan $G = (V,A,c)$ dengan matriks panjang busur $(c_{ij})$. Akan ditentukan suatu perjalanan keliling minimal (dikatakan sebagai perjalanan salesman). Metode yang akan digunakan untuk menentukan solusi disebut sebagai **Metode Reduksi Branch and Bound**, karena dalam proses penyelesaiannya menggunakan cara pengurangan (**reduksi**), dan jika digambarkan akan terdiri dari proses penentuan percabangan (**branch**) dan batas (**bound**).

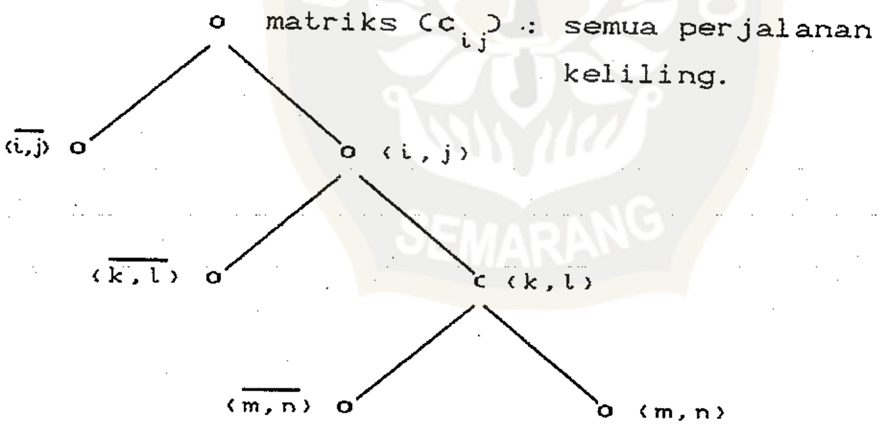
Dimulai dengan mereduksi matriks $(c_{ij})$ dengan $\rho_i = \min_j c_{ij}$ dan $q_j = \min_i (c_{ij} - \rho)$, untuk $i,j = 1,2,3....n$. Kemudian dihitung $c(\aleph_o) = \sum_k (\rho_k + q_k)$ yang merupakan batas bawah awal reduksi.

Dari matriks hasil reduksi ini, ditentukan busur $(i,j)$ yang akan dinyatakan sebagai acuan percabangan. Dalam hal ini simpul pertama dari anak simpul awal menyatakan semua himpunan perjalanan keliling yang tidak menggunakan busur $(i,j)$ (disebut sebagai simpul $(\overline{i,j})$), sedangkan simpul kedua menyatakan himpunan semua perjalanan keliling yang menggunakan busur $(i,j)$ (disebut sebagai simpul $(i,j)$). Untuk setiap simpul yang terbentuk, ditentukan nilai batas.

Kemudian dipilih suatu simpul yang mempunyai batas bawah terkecil, katakanlah simpul $(i,j)$. Kemudian ditentukan simpul anak dari simpul $(i,j)$ tersebut, dengan cara sebelumnya yaitu menentukan busur mana yang digunakan sebagai percabangan, misal busur $(k,l)$. Dalam hal ini simpul anak pertama (simpul $(\overline{k,l})$) menyatakan himpunan semua perjalanan keliling yang tidak mengandung busur $(k,l)$ tetapi menggunakan busur $(i,j)$. Sedangkan simpul kedua (simpul $(k,l)$) menyatakan himpunan perjalanan keliling yang menggunakan busur $(k,l)$ dan $(i,j)$. Tentu saja pada setiap pembentukan simpul-simpul tersebut ditentukan pula batas bawahnya. Selanjutnya dipilih batas bawah terkecil untuk menentukan simpul mana yang akan dicabangkan.

Demikian seterusnya sampai terbentuk suatu simpul yang menyatakan suatu perjalanan keliling yang minimal, dalam arti bahwa batas bawahnya tidak dapat diperkecil lagi andaikan dibuat lagi percabangan.

Secara umum dapat dikatakan bahwa simpul $(i,j)$ mewakili suatu masalah bagian, sedangkan simpul$(\overline{i,j})$ mewakili komplemen dari masalah bagian yang pertama. Demikian pula simpul $(k,l)$ dan simpul $(\overline{k,l})$. Dengan menggunakan representasi jaringan, metode tersebut dapat digambarkan sebagai struktur pohon (*tree*), sebagai berikut :




*Gambar 3.4.1*

Penentuan busur percabangan beserta batas bawah dari setiap simpulnya yang merupakan kerangka dari Metode Reduksi Branch and Bound, secara lebih rinci diberikan sebagai berikut :

Pertama-tama diperhatikan elemen $c_{ij} = 0$. Kemudian dipilih $\gamma = \text{maks } \gamma_{ij} = \min_j c_{ij} + \min_i c_{ij}$. Misalkan busur $(i,j)$ adalah busur dimana $\gamma$ tersebut maksimum. Jadi busur $(i,j)$ ini sebagai busur percabangan.

Jika $c(\mathfrak{B}o)$ adalah batas bawah reduksi awal, maka eksklusi dan inklusi busur $(i,j)$ adalah :

**a. Pengeluaran (eksklusi) busur (i, j).**

Busur $(i,j)$ bukan merupakan anggota busur perjalanan keliling, maka nilai $c_{ij}$ tidak berpengaruh sedikitpun terhadap panjang perjalanan keliling. Oleh karena itu, ditetapkan $c_{ij} = \sim$ yang akan memberikan kemungkinan :

*pengurangan baris i dengan* $\rho_i = \min_{k \neq i} c_{ik}$

*pengurangan kolom j dengan* $q_j = \min_{k \neq j} (c_{kj} - \rho_i)$

Dari sini ditetapkan $c(\mathfrak{B}o') = c(\mathfrak{B}o) + \sum_{k=1}^{n} (\rho_k + q_k)$, dan $(i,j) \in \mathfrak{B}o'$, dengan $c(\mathfrak{B}o')$ sebagai batas bawah eksklusi busur $(i,j)$ dan $\mathfrak{B}o'$ merupakan himpunan busur

**b. Pemasukan (inklusi) busur (i, j).**

Dalam hal ini tidak akan ada busur $(i,q)$, untuk $q \neq j$, juga tidak akan ada busur $\langle p,j \rangle$ untuk $p \neq i$. Demikian juga jika $n > 2$, tidak ada suatu sirkuit Hamilton. Sehingga dapat ditetapkan setiap elemen barsangkutan dari $(c'_{ij})$ menjadi :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \quad & i & \quad & j & \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccc}
 & & & \sim & \\
 & & & \vdots & \\
 & & & \sim & \\
\sim \cdots & \sim & \cdots \sim & \emptyset & \sim \cdots\cdots \sim \\
 & & & \sim & \\
 & & & \vdots & \\
 & \sim & & \sim & \\
 & & & \vdots & \\
 & & & \sim &
\end{array}\right]
\end{array}$$

Selanjutnya ditetapkan $c(\mathfrak{B}o'') = c(\mathfrak{B}o) + \sum_{k}^{n} (\rho_k + q_k)$, dan $(i,j) \in \mathfrak{B}o''$, dengan $c(\mathfrak{B}o'')$ sebagai batas bawah inklusi busur $(i,j)$ dan $\mathfrak{B}o''$ merupakan himpunan inklusi busur, dan $\sum_{k}^{n} (\rho_k + q_k)$ merupakan nilai reduksi pada matriks tersebut dengan suatu transformasi yang diperbolehkan (*admissible*).

Akan tetapi dapat dilihat bahwa sebenarnya modifikasi baris $i$ atau kolom $j$ tidak berpengaruh terhadap $\sum_{k}^{n} (\rho_k + q_k)$, oleh karena itu dapat dihapuskan saja dan akan memberikan matriks panjang busur $(n-1, n-1)$.

Apabila baris $j$ dan kolom $i$ dipandang memberikan nilai elemen yang sama, maka akan diperoleh suatu masalah penentuan perjalanan keliling dengan ukuran yang lebih kecil. Penghapusan baris $i$ dan kolom $j$ dan dengan penetapan $c_{ij} = \sim$

tersebut dapat dipandang sebagai **'penyusutan'** busur $(i,j)$ dan **'penggabungan'** simpul $i$ dan $j$ dalam jaringan yang diselidiki.

Proses pereduksian ini dilanjutkan lagi hingga terdapat $n$ busur yang masuk dalam anggota inklusi/eksklusi. Jika dari busur-busur itu tidak mengandung sirkuit/putaran tunggal, ini berarti bahwa inklusi busur $(i,j)$ tidak membentuk sirkuit tunggal dengan panjang busur yang minimal. Jadi pereduksian diulang dengan mengeseksklusi busur $(i,j)$ dari anggota busur inklusi. Demikian seterusnya hingga terbentuk sirkuit/putaran tunggal dengan panjang busur yang minimal.

Apabila $c(\mathfrak{B}o)$ merupakan batas bawah dari pereduksian awal, $c(\mathfrak{B}_k^{'})$ sebagai batas bawah dari eksklusi busur percabangan dan $c(\mathfrak{B}_k^{''})$ sebagai batas bawah inklusinya, demikian juga jika $\mathfrak{C}_k^{'}$ dan $\mathfrak{C}_k^{''}$ merupakan matriks eksklusi dan inklusi, serta $\mathfrak{B}_k^{'}$ sebagai himpunan busur yang dieksklusi dan $\mathfrak{B}_k^{''}$ sebagai himpunan busur yang diinklusi, maka langkah-langkah dari Metode Reduksi Branch and Bound ini dapat dituliskan sebagai suatu algoritma.

**ALGORITMA REDUKSI BRANCH AND BOUND**

1. *Menetapkan* $k = 0$, $\mathfrak{B}k = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}k = \mathfrak{C}$, $c(\mathfrak{B}k) = 0$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B} =$

Ø.

2. Matriks $\mathfrak{C}k$ direduksi dengan $p_i = \min_j c_{ij}$, $q_j = \min_i (c_{ij} - p_i)$. Terbentuk matriks $(c'_{ij})$, dengan $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$ dan $c(\mathfrak{B}k) = c(\mathfrak{B}k) + \sum_i^n p_i + \sum_j^n q_j$.
3. Dipilih busur $(i,j)$, dimana $c_{ij} = 0$, $\gamma_{ij} = \min_{k\neq j} c_{ik} + \min_{k\neq i} c_{kj}$ dengan $\gamma = \text{maks}\gamma_{ij}$. Dan dibentuk $\mathfrak{B}k = \{(\overline{i,j}), i, j)\}$.
4. $\mathfrak{B}k$ dipisahkan menjadi $\mathfrak{B}k'$ dan $\mathfrak{B}k''$, dimana $\mathfrak{B}k'$ dan $\mathfrak{B}k''$ adalah himpunan sirkuit(putaran) Hamilton dari $\mathfrak{B}k$ yang mengandung busur $(i,j)$ dan dibentuk $\mathfrak{BB} = \mathfrak{BB} \cup \{ \mathfrak{B}k', \mathfrak{B}k'' \}$.
5. Dari matriks $\mathfrak{C}k$ dibentuk matriks $\mathfrak{C}k'$ dan $\mathfrak{C}k''$ yang sesuai dengan himpunan $\mathfrak{B}k'$ dan $\mathfrak{B}k''$. $\mathfrak{C}k'$ diperoleh dari $\mathfrak{C}k$ dengan mensubsitusi ~ pada elemen $c_{ij}$, dan elemen-elemen lainnya tetap. Sedang $\mathfrak{C}k''$ diperoleh dari $\mathfrak{C}k$ dengan menghilangkan baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dan mensubtitusikan ~ pada busur $c_{ji}$, sedang yang lain tetap.
6. Matriks $\mathfrak{C}k'$ dan $\mathfrak{C}k''$ direduksi seperti pada (2.) dan menentukan pula $c(\mathfrak{B}k')$ dan $c(\mathfrak{B}k'')$.
7. Menentukan $\mathfrak{B} \in \mathfrak{BB}$ sedemikian sehingga $c(\mathfrak{B}) = \min \{c(\mathfrak{B}k'), c(\mathfrak{B}k'')\}$.
8. Jika busur yang diinklusi pada himpunan $\mathfrak{B}$ sebanyak $n$, dan hanya terdiri dari sirkuit (putaran) tunggal, maka ke langkah 10.

9. *Menetapkan* $k = k + 1$, $\mathfrak{B}k = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}k = \mathfrak{C}$, *dan* $c(\mathfrak{B}k) = \min c(\mathfrak{B})$, *kembali ke langkah 3.*

10. *Berhenti.*

**Contoh 3.4.1**

Diberikan jaringan perjalanan salesman $G = (V, A, c)$, $|V| = 6$ dengan matriks panjang busurnya $\mathfrak{C} = (c_{ij})$ sebagai berikut :

$$\mathfrak{C} = (c_{ij}) = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 10 & 6 & 1 & 9 \\ 13 & \sim & 3 & 12 & 6 \\ 13 & 8 & \sim & 9 & 6 \\ 8 & 16 & 18 & \sim & 12 \\ 25 & 20 & 4 & 13 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

Akan ditentukan perjalanan keliling salesman dengan panjang busur yang minimal.

**Penyelesaian :**

**Reduksi awal**

*Langkah 1.*

Menetapkan $k = 0$, $\mathfrak{B}k := \mathfrak{B}o = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}k := \mathfrak{C}o = \mathfrak{C}$, $c(\mathfrak{B}k) := c(\mathfrak{B}o) = 0$ dan $\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \emptyset$.

*Langkah 2.*

Reduksi baris dengan $\rho_i = \min_j c_{ij}$ yaitu $\rho_1=1$, $\rho_2=3$, $\rho_3=6$, $\rho_4=8$ dan $\rho_5=4$, diperoleh matriks hasil reduksi, $(co_{ij})$ dengan $co_{ij} = c_{ij} - \rho_i$.

$$\mathfrak{C}o = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 9 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & \sim & 0 & 9 & 3 \\ 7 & 2 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & \sim & 4 \\ 21 & 16 & 0 & 9 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

Kemudian dari matriks $\mathfrak{C}o$ tersebut dilakukan reduksi kolom dengan $q_1=0$, $q_2=2$, $q_3=0$, $q_4=0$ dan $q_5=0$ dimana $q_j = \min_i co_{ij} = \min_j(c_{ij}-\rho_i)$, diperoleh :

$$\mathfrak{C}o := \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 7 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & \sim & 0 & 9 & 3 \\ 7 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & \sim & 4 \\ 21 & 14 & 0 & 9 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

Didapatkan $c(\mathfrak{B}o) = c(\mathfrak{B}o) + \sum_{i=1}^{5} \rho_i + \sum_{j=1}^{5} q_j = 22 + 2 = 24$.

*Langkah 3.*

Dipilih busur $(i,j)$ untuk $co_{ij}=0$, dan dibentuk $\gamma_{ij} = \min_{\substack{k \\ (k \neq j)}} co_{ik} + \min_{\substack{k \\ (k \neq i)}} co_{kj}$, kemudian dipilih $\gamma = \max_{\substack{i,j \\ (co_{ij}=0)}} \gamma_{ij}$.

Sebagai contoh, jika dipilih busur $(1,4)$ dengan $c_{14} = 0$, maka $\min_{k\neq 4} co_{1k} = 5$ dan $\min_{k\neq 1} co_{k4} = 3$, sehingga didapatkan $\gamma_{14} = \min co_{1k} + \min co_{k4} = 5 + 3 = 8$.

Dengan memilih busur $(i,j)$ yang lain untuk $co_{ij}=0$, maka percabangannya dapat ditentukan dari dari tabel berikut :

| $i$ | $j$ | $c_{ik}$ | $c_{kj}$ | $\gamma_{ij}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 3 | 8 | |
| 2 | 3 | 3 | 0 | 3 | |
| 3 | 2 | 0 | 6 | 6 | |
| 3 | 5 | 0 | 3 | 3 | |
| 4 | 1 | 4 | 7 | 11 | * |
| 5 | 3 | 9 | 0 | 9 | |

Terlihat bahwa $\gamma_{ij}$ maksimum pada busur $(4,1)$. Jadi percabangannya terletak pada eksklusi / inklusi busur $(4,1)$. Diperoleh $\mathfrak{B} = \{(\overline{4,1}),(4,1)\}$.

*Langkah 4.*

Menentukan $\{(\overline{4,1})\} \in \mathfrak{Bo}'$ dan $\{(4,1)\} \in \mathfrak{Bo}''$, dan dibentuk $\mathfrak{BB} = \mathfrak{BB} \cup \{(\overline{4,1}),(4,1)\} = \{(\overline{4,1}),(4,1)\}$

*Langkah 5.*

Dari matriks $\mathfrak{Co}$ dibentuk matriks $\mathfrak{Co}'$ dan $\mathfrak{Co}''$, masing-masing sebagai matriks eksklusi dan inklusi busur $(4,1)$.

a). *Eksklusi busur $(4,1)$.*

Dalam hal ini ditetapkan $c_{41} = \sim$, dan $co'_{ij} = co_{ij}$ untuk $i\neq4$ dan $j\neq1$, diperoleh :

$$\mathfrak{C}\mathrm{o}' = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{ccccc} \sim & 7 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & \sim & 0 & 9 & 3 \\ 7 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ \sim & 6 & 10 & \sim & 4 \\ 21 & 14 & 0 & 9 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

$j$

*b) Inklusi busur (4,1).*

Ditetapkan $co''_{14} = \sim$, $co''_{ij} = co_{ij}$ untuk $i \neq 4$ dan $j \neq 1$, diperoleh :

$$\mathfrak{C}\mathrm{o}'' = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{ccccc} \sim & 7 & 5 & \sim & 8 \\ \sim & \sim & 0 & 9 & 3 \\ \sim & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \sim & 14 & 0 & 9 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

$j$

*Langkah 6.*

*a) Reduksi matriks* $\mathfrak{C}\mathrm{o}'$.

Dari matriks $\mathfrak{C}\mathrm{o}'$ didapatkan $\rho_1=0$, $\rho_2=0$, $\rho_3=0$, $\rho_4=4$ dan $\rho_5=0$ dengan $\rho_i = \min_j co'_{ij}$, untuk $i,j = 1,2,3,4,5$. Kemudian elemen-elemen baris matriks $\mathfrak{C}\mathrm{o}'$ direduksi dengan $\rho_i$, didapatkan :

$$\mathfrak{C}o' = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 7 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & \sim & 0 & 9 & 3 \\ 7 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ \sim & 2 & 6 & \sim & 0 \\ 21 & 14 & 0 & 9 & \sim \end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Dari matriks ini didapatkan $q_1=7$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_4=0$ dan $q_5=0$, dengan $q_j = \min_i (co'_{ij}-\rho_i)$. Kemudian elemen-elemen kolom direduksi dengan $q_j$, menjadi :

$$\mathfrak{C}o' := \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 7 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & \sim & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ \sim & 2 & 6 & \sim & 0 \\ 14 & 14 & 0 & 9 & \sim \end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Dari reduksi baris kolom ini didapatkan batas bawah eksklusi busur (4,1), $c(\mathfrak{B}o') = c(\mathfrak{B}o) + \sum_{i=1}^{5}\rho_i + \sum_{j=1}^{5} q_j = 24 + 4 + 7 = 35$.

a) *Reduksi matriks* $\mathfrak{C}o''$.

Dari matriks $\mathfrak{C}o''$ didapatkan $\rho_1=5$, $\rho_2=0$, $\rho_3=0$, $\rho_4=0$ dan $\rho_5=0$. Dilakukan reduksi baris pada matriks $\mathfrak{C}o''$ dengan $\rho_i$, sehingga $\mathfrak{C}o''$ menjadi :

$$\mathfrak{C}\ddot{o} := \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{ccccc} \sim & 2 & 0 & \sim & 3 \\ \sim & \sim & 0 & 9 & 3 \\ \sim & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \sim & 14 & 0 & 9 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

Kemudian dari matriks hasil reduksi baris tersebut dilakukan reduksi kolom dengan $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_4=3$ dan $q_5=0$, menghasilkan :

$$\mathfrak{C}\ddot{o} := \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{ccccc} \sim & 2 & 0 & \sim & 3 \\ \sim & \sim & 0 & 6 & 3 \\ \sim & 0 & \sim & 0 & 0 \\ 0 & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \sim & 14 & 0 & 6 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

dengan batas bawah inklusi, $c(\mathfrak{B}\ddot{o}) = c(\mathfrak{B}o) + \sum_{i=1}^{5} p_i + \sum_{j=1}^{5} q_j = 24 + 5 + 3 = 32.$

Ternyata baris *1* dan kolom *4* tidak berpengaruh terhadap nilai reduksi, sehingga baris *1* dan kolom *4* dapat dihapus. Penghapusan baris kolom ini dinamakan dengan penyusutan busur seperti yang telah diuraikan di depan. Dan matriks $\mathfrak{C}o'$ menjadi :

$$\mathfrak{C}_0'' := \begin{array}{c|c} & i \\ \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & \sim & 3 \\ \sim & 0 & 6 & 3 \\ 0 & \sim & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 6 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \; j & \end{array}$$

*Langkah 7.*

Dipilih $c(\mathfrak{B}) = \min\{c(\mathfrak{B}_0'), c(\mathfrak{B}_0'')\} = 32$. Menetapkan $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_0'' = \{(4,1)\}$,

*Langkah 8.*

Dari himpunan busur $\mathfrak{B}$ belum terdapat 5 busur yang diinklusi, maka ke *langkah 9.*

*Langkah 9.*

Menetapkan $k = 1$, $\mathfrak{B}_1 := \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0''$, $c(\mathfrak{B}_1) := c(\mathfrak{B}) = 32$ dan $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_0''$, kembali ke *langkah 3.*

**Reduksi ke 1**

*Langkah 3.*

$$\mathfrak{C}_1 := \begin{array}{c|c} & i \\ \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & \sim & 3 \\ \sim & 0 & 6 & 3 \\ 0 & \sim & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 6 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \; j & \end{array}$$

Dipilih busur $(5,3)$, dengan $\gamma_{53} = 6$.

Didapatkan $\mathfrak{B} = \{(4,1), (\overline{5,3}), (5,3)\}$

*Langkah 4.*

Menetapkan $\{(4,1),(\overline{5,3})\} \in \mathfrak{B}_1'$ dan $\{(4,1),(5,3)\} \in \mathfrak{B}_1''$, dan dibentuk $\mathfrak{BB} = \mathfrak{BB} \cup \{(4,1),(\overline{5,3}),(5,3)\} = \{(\overline{4,1}),(4,1),(\overline{5,3}),(5,3)\}$

*Langkah 5.*

Dibentuk *matriks* $\mathfrak{C}_1'$ dan $\mathfrak{C}_1''$ masing-masing :

$$\mathfrak{C}_1' = \begin{array}{ccc} & & i \\ & \begin{bmatrix} 2 & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 6 & 3 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 14 & \infty & 6 & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$ dan

$$\mathfrak{C}_1'' = \begin{array}{ccc} & & i \\ & \begin{bmatrix} 2 & \infty & 3 \\ \infty & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 2 & 4 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

*Langkah 6.*

Reduksi *matriks* $\mathfrak{C}_1'$ pada baris 5 dengan $p_5 = 6$, menghasilkan :

$$\mathfrak{C}_1' := \begin{array}{ccc} & & i \\ & \begin{bmatrix} 2 & 0 & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 6 & 3 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 8 & \infty & 0 & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

dengan $c(\mathfrak{B}_1') = c(\mathfrak{B}_1) + 6 = 32 + 6 = 38$.

Reduksi *matriks* $\mathfrak{C}_1''$ untuk baris 1 dengan $p_1 = 2$, dan baris 2 dengan $\rho_2 = 3$, menghasilkan :

$$\mathfrak{C}_1'' = \begin{array}{c|c} & i \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & \sim & 1 \\ \sim & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} & \end{array} \qquad c(\mathfrak{B}_1'') = c(\mathfrak{B}_1) + 5 = 37.$$

$j$ : 2 4 5

*Langkah* 7.

Menetapkan $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1'' = \{(4,1),(5,3)\}$ dan $c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_1'') = 37$.

*Langkah* 9.

Menetapkan $k = 2$, $\mathfrak{B}_2 := \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1''$, $c(\mathfrak{B}_2) := c(\mathfrak{B}) = 37$ dan $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1''$, kembali ke langkah (3.).

Reduksi ke 2.

*Langkah* 3.

$$\mathfrak{C}_2 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \sim & 1 \\ \sim & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sim \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$j$ : 2 4 5 ; $i$ : 1 2 3

Dipilih busur $(2,5)$, dengan $\gamma_{25} = 4$.

Didapatkan $\mathfrak{B} = \{(4,1),(5,3),(\overline{2,5}),(2,5)\}$

*Langkah* 4.

Menetapkan $\{(4,1),(5,3),(\overline{2,5})\} \in \mathfrak{B}_2'$ dan $\{(4,1),(5,3),(2,5)\} \in \mathfrak{B}_2''$, kemudian dibentuk $\mathfrak{BB} = \mathfrak{BB} \cup \{(4,1),(5,3),(\overline{2,5}),(2,5)\} = \{(\overline{4,1}),\ (4,1),\ (\overline{5,3}),$

(5,3), $(\overline{2,5})$, (2,5)}

*Langkah 5.*

Dibentuk matriks $\mathfrak{C}_2'$ dan $\mathfrak{C}_2''$ masing-masing :

$$\mathfrak{C}_2' = \begin{array}{c|ccc|c} & & & & i \\ & 0 & \sim & 1 & 1 \\ & \sim & 3 & \sim & 2 \\ & 0 & 0 & \sim & 3 \\ j & 2 & 4 & 5 & \end{array} \quad \text{dan} \quad \mathfrak{C}_2'' = \begin{array}{c|cc|c} & & & i \\ & 0 & \sim & 1 \\ & 0 & 0 & 3 \\ j & 2 & 4 & \end{array}$$

*Langkah 6.*

Reduksi matriks $\mathfrak{C}_2'$ pada baris 2 dengan $\rho_2 = 6$, dan reduksi kolom 5 dengan $q_5 = 1$ menghasilkan :

$$\mathfrak{C}_2' := \begin{array}{c|ccc|c} & & & & i \\ & 0 & \sim & 1 & 1 \\ & \sim & 0 & \sim & 2 \\ & 0 & \sim & \sim & 3 \\ j & 2 & 4 & 5 & \end{array}$$

dengan $c(\mathfrak{B}_2') = c(\mathfrak{B}_2) + 4 = 37 + 4 = 41$.

Matriks $\mathfrak{C}_2''$ tetap, karena $\rho_i = 0$ dan $q_j = 0$.

Sehingga batas bawah inklusi busur (2,5) adalah $c(\mathfrak{B}_2'') = c(\mathfrak{B}_2) = 37$.

*Langkah 7.*

Menetapkan $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2'' = \{(4,1),(5,3),(2,5)\}$ dan $c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_2'') = 37$.

*Langkah 9.*

Menetapkan $k = 3$, $\mathfrak{B}_3 := \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2''$, $c(\mathfrak{B}_3) := c(\mathfrak{B}) = 37$

dan $\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_2''$, kembali ke *langkah 3.*

Reduksi ke 3.

*Langkah 3.*

$$\mathfrak{C}_3 = \begin{array}{c|cc|c} & & & i \\ & 0 & \sim & 1 \\ & 0 & 0 & 3 \\ j & 2 & 4 & \end{array}$$

Dari matriks $\mathfrak{C}_3$ dapat dilihat bahwa percabangannya pada busur $(1,2)$ , $(3,2)$ dan $(3,4)$. Jika dipilih busur $(3,2)$, akan membuat solusi yang tidak tunggal. Karena dengan inklusi busur $(3,2)$, mengakibatkan busur terakhir yang terpilih adalah $(1,4)$, padahal busur $(1,4)$ tidak mungkin terpilih. Jadi dipilih busur $(1,2)$ atau $(3,4)$ untuk percabangan berikutnya. Andaikan dipilih busur $(3,4)$ yang menjadi busur percabangan. Sehingga didapatkan :

$\mathfrak{B} = \{(4,1),(5,3),(2,5),(\overline{3,4}),(3,4)\}$

*Langkah 4.*

Menetapkan $\{(4,1),(5,3),(2,5),(\overline{3,4})\} \in \mathfrak{B}_3'$ dan $\{(4,1),(5,3),(2,5),(3,4)\} \in \mathfrak{B}_3''$, kemudian dibentuk $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ $= \mathfrak{B}\mathfrak{B} \cup \{(4,1),(5,3),(2,5),(2,5),(\overline{3,4}),(3,4)\} =$ $\{(\overline{4,1}),(4,1),(\overline{5,3}),(5,3),(\overline{2,5}), (2,5),(\overline{3,4}),(3,4)\}$

*Langkah 5.*

Dibentuk matriks $\mathfrak{C}_3'$ dan $\mathfrak{C}_3''$ masing-masing :

$$\mathfrak{C}_3' = \begin{array}{c|cc|c} & 2 & 4 & i \\ \hline & \sim & \sim & 1 \\ j & 0 & 0 & 3 \end{array} \quad \text{dan} \quad \mathfrak{C}_3'' = \begin{array}{c|c|c} & 2 & i \\ \hline j & 0 & 1 \end{array}$$

*Langkah 6.*

Oleh karena reduksi tidak berpengaruh terhadap batas bawah eksklusi maupun inklusi, maka didapatkan batas masing-masing masalah bagian, yaitu :

$c(\mathfrak{B}_3'') = c(\mathfrak{B}_3'') = c(\mathfrak{B}_3) = 37.$

*Langkah 7.*

Menetapkan $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_3'' = \{(4,1),(5,3),(2,5),(3,4)\}$ dan $c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_3'') = 37.$

*Langkah 9.*

Menetapkan $k = 4$, $\mathfrak{B}_4 := \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_3''$, $c(\mathfrak{B}_4) := c(\mathfrak{B}) = 37$ dan $\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_3''$, kembali ke *langkah 3.*

**Reduksi ke 4.**

*Langkah 3.*

$$\mathfrak{C}_4 = \begin{array}{c|c|c} & 2 & i \\ \hline j & 0 & 1 \end{array}$$

Dari matriks $\mathfrak{C}4$, dapat dipastikan bahwa busur terakhir yang terpilih dalam percabangan adalah busur $(1,2)$. Dengan eksklusi dan inklusi busur ini didapatkan :

$\mathfrak{B} = \{(4,1),(5,3),(2,5),(3,4),(\overline{1,2}),(1,2)\}$

*Langkah 4.*

Menetapkan $\{(4,1),(5,3),(2,5),(3,4),(\overline{1,2})\} \in \mathfrak{B}_4'$ dan $\{(4,1),(5,3),(2,5),(3,4),(1,2)\} \in \mathfrak{B}_4''$, kemudian dibentuk $\mathfrak{BB} = \mathfrak{BB} \cup \{(4,1),(5,3),(2,5),(2,5),(3,4),(\overline{1,2}),(1,2)\} = \{(\overline{4,1}),(4,1),(\overline{5,3}),(5,3),(\overline{2,5}),(2,5),(\overline{3,4}),(3,4),(\overline{1,2}),(1,2)\}$

*Langkah 5.*

Dibentuk matriks $\mathfrak{C}_4'$ dan $\mathfrak{C}_4''$ masing-masing :

$$\mathfrak{C}_4' = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & 1 \\ j \;\; 2 & \end{array} \quad \text{dan} \quad \mathfrak{C}_4'' = \begin{bmatrix} \;\; \end{bmatrix}$$

*Langkah 6.*

Oleh karena reduksi tidak berpengaruh terhadap batas bawah eksklusi maupun inklusi, maka didapatkan batas masing-masing masalah bagian, yaitu :

$c(\mathfrak{B}_4'') = c(\mathfrak{B}_4'') = c(\mathfrak{B}_3) = 37.$

*Langkah 7.*

Menetapkan $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_4'' = \{(4,1),(5,3),(2,5),(3,4),(1,2)\}$ dan $c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_4'') = 37.$

*Langkah 8.*

Didapatkan $\mathfrak{B} = \{(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(4,1)\}$ adalah sirkuit tunggal dengan $c(\mathfrak{B}) = 37.$

*Ke langkah 10.*

*Langkah 10.*

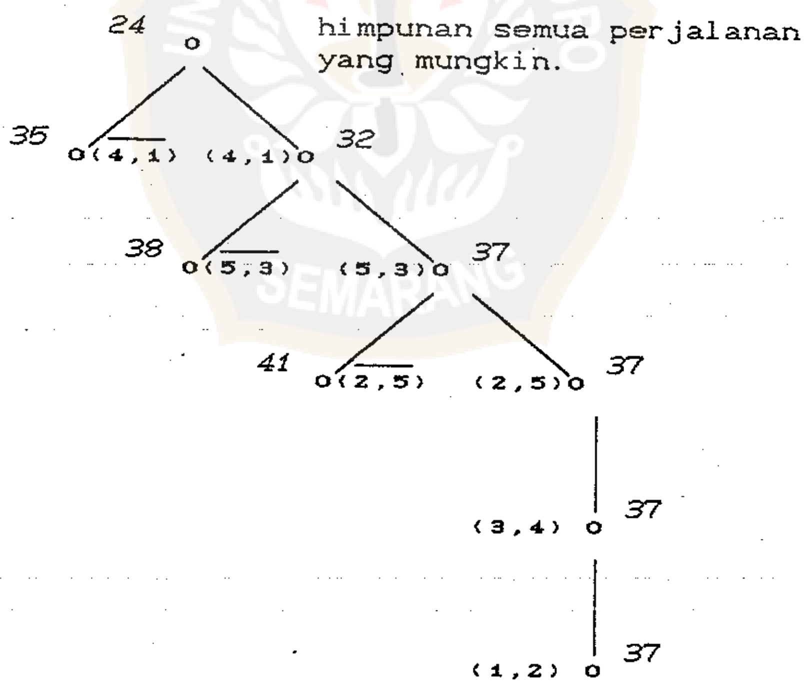
*Berhenti.*

Sehingga solusi yang diperoleh dari contoh **3.4.1.** adalah : $\mathfrak{B} = \{(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(4,1)\}$, dengan $c(\mathfrak{B}) = 37$.

Dan perjalanan keliling dengan panjang busur yang minimal adalah :

$$c_{12} + c_{25} + c_{53} + c_{34} + c_{41} = 10 + 6 + 4 + 9 + 8$$
$$= 37.$$

Sedangkan struktur pohon dari proses penentuan perjalanan keliling tersebut seperti ditunjukkan oleh *gambar 3.4.1.*




*Gambar 3.4.1.*

Contoh 3.4.2

Diberikan matriks panjang busur dari jaringan perjalanan salesman $G = (V,A,c)$ sebagai berikut :

$$\mathfrak{C} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \sim & 6 & 6 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & \sim & 5 & 12 & 4 & 10 \\ 4 & 5 & \sim & 5 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & \sim & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 8 & 10 & \sim & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 7 & 5 & \sim \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \\ \end{array}$$

$j$

Akan ditentukan perjalanan keliling dengan total panjang busur yang minimal dari matriks dengan jumlah simpul 6 tersebut.

**Penyelesaian :**

Untuk mengurangi panjangnya penyelesaian, maka dalam penyelesaian **Contoh 3.4.2** langkah - langkahnya tidak dituliskan.

Pertama-tama dilakukan reduksi baris dulu kemudian dilanjutkan dengan reduksi kolom.

Pada reduksi baris dengan $\rho_1=5$, $\rho_2=3$, $\rho_3=4$, $\rho_4= 3$, $\rho_5=6$ dan $\rho_6=2$, dimana $\rho_i = \min_j c_{ij}$ dihasilkan :

$$
\mathfrak{C}o = \begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}
\sim & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\
0 & \sim & 2 & 9 & 1 & 7 \\
0 & 1 & \sim & 1 & 6 & 3 \\
3 & 4 & 0 & \sim & 3 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 4 & \sim & 2 \\
7 & 2 & 0 & 5 & 3 & \sim
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\
j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 &
\end{array}
$$

Kemudian dilanjutkan reduksi kolom untuk elemen-elemen kolom *4* dengan $\rho_4 = 1$, didapatkan matriks hasil reduksi baris kolom :

$$
\mathfrak{C}o := \begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}
\sim & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\
0 & 1 & \sim & 0 & 6 & 3 \\
3 & 4 & 0 & \sim & 3 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 3 & \sim & 2 \\
7 & 2 & 0 & 4 & 3 & \sim
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\
j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 &
\end{array}
$$

Batas bawah awal yang didapatkan adalah $c(\mathfrak{B}O)$ $= \sum_{i=1}^{6} \rho_i + \sum_{j=1}^{6} q_j = 23 + 1 = 24$

Untuk menentukan busur percabangan, dilakukan seperti pada contoh 3.4.1, yaitu dipilih busur $(i,j)$ dimana $co_{ij}=0$, dan ditentukan

$$\gamma = \max_{\substack{i,j \\ (co_{ij}=0)}} \gamma_{ij} = \min_{\substack{k \\ (k \neq j)}} co_{kj} + \min_{\substack{k \\ (k \neq i)}} co_{kj}$$

Dari matriks $\mathfrak{C}o$, didapatkan $\gamma = \gamma_{52} = \min\limits_{k\neq 2} co_{5k} + \min\limits_{k\neq 5} co_{k2} = 2 + 1 = 3$.

Jadi percabangannya terletak pada busur (5,2), sehingga eksklusi dan inklusi busur ini adalah,

$\{(\overline{5,2})\} \leq \mathfrak{B}o'$

$$\mathfrak{C}o' = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \sim & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 2 & \sim & 2 & 3 & \sim & 2 \\ 7 & 2 & 0 & 4 & 3 & \sim \end{bmatrix} \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

Dilakukan reduksi baris dengan $p_5$=2 pada elemen-elemen baris 5 dan reduksi kolom 2 dengan $q_2$ = 1 sehingga didapatkan matriks hasil reduksi :

$$\mathfrak{C}o' := \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 4 & 3 & \sim \end{bmatrix} \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

Sedang batas bawah eksklusi yang diperoleh adalah

$c(\mathfrak{B}o') = c(\mathfrak{B}o) + 3 = 24 + 3 = 27$.

Untuk inklusi busur (5,2), baris 5 dan kolom 2 pada matriks $\mathfrak{C}_0$ dihapus dan menetapkan $c_{25}=\sim$. Matriks yang dihasilkan adalah :

$$\{(5,2)\} \subseteq \mathfrak{B}_0''$$

$$\begin{array}{cc}
\mathfrak{C}_0'' = \left[\begin{array}{ccccc}
\sim & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 8 & \sim & 7 \\
0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\
3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\
7 & 0 & 4 & 3 & \sim
\end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} \\
\begin{array}{cccccc} j & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} &
\end{array}$$

Oleh karena $p_i$ dan $q_j$ bernilai 0, maka jika dilakukan reduksi terhadap matriks $\mathfrak{C}_0''$ tidak berpengaruh pada batas bawah. Sehingga batas bawah dari inklusi busur (5,2) adalah $c(\mathfrak{B}_0'')=c(\mathfrak{B}_0)=24$. Didapatkan $\mathfrak{B} \in \{\mathfrak{B}_0', \mathfrak{B}_0''\}$, dan $c(\mathfrak{B}) = \min\{c(\mathfrak{B}_0'), c(\mathfrak{B}_0'')\}$ $= c(\mathfrak{B}_0'') = c(\mathfrak{B}_1)$. Kemudian dipilih $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0''$, dan menetapkan $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0''$ dan $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_0''$.

$$\begin{array}{cc}
\mathfrak{C}_1 = \left[\begin{array}{ccccc}
\sim & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 8 & \sim & 7 \\
0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\
3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\
7 & 0 & 4 & 3 & \sim
\end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} \\
\begin{array}{cccccc} j & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} &
\end{array}$$

Selanjutnya dicari busur yang akan menjadi percabangan berikutnya. Dari matriks $\mathfrak{C}_1$ didapatkan maks $\gamma_{ij} = 4$, terletak pada busur (1,5). Sehingga eksklusi dan inklusi busur (1,5) diperoleh matriks :

$\{(5,2),(\overline{1,5})\} \subseteq \mathfrak{B}_1'$

$$\mathfrak{C}_1' = \begin{array}{rcl} & & i \\ & \begin{bmatrix} \sim & 1 & 2 & \sim & 2 \\ 0 & 2 & 8 & \sim & 7 \\ 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 3 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$ dan,

$\{(5,2),(1,5)\} \subseteq \mathfrak{B}_1''$

$$\mathfrak{C}_1'' = \begin{array}{rcl} & & i \\ & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & \sim & 0 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 0 \\ 7 & 0 & 4 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

Setelah matriks $\mathfrak{C}_1'$ dilakukan reduksi pada baris $1$ dengan $p_1=1$ dan reduksi kolom $5$ dengan $q_5=3$, matriks hasil reduksi dan batas bawah yang dihasilkan adalah

$$\mathfrak{C}_1' := \begin{array}{rcl} & & i \\ & \begin{bmatrix} \sim & 0 & 1 & \sim & 1 \\ 0 & 2 & 8 & \sim & 7 \\ 0 & \sim & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 0 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

dengan $c(\mathfrak{B}_1') = c(\mathfrak{B}_1) + 4 = 28$.

Karena $p_i$ dan $q_j$ matriks $\mathfrak{C}_1''$ masing-masing berharga 0, maka batas bawah inklusi busur $(1,5)$ adalah $c(\mathfrak{B}_1'')$

$= c(\mathfrak{B}_1) = 24.$

Dari sini diperoleh $\mathfrak{B} \in \{\mathfrak{B}_1^{'}, \mathfrak{B}_2^{''}\}$ dengan $c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_1^{''})$ $= 24.$

Ditetapkan $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1^{'}$, $c(\mathfrak{B}_2) = c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_1^{''}) = 24$ dan $\mathfrak{C}_2$ $= \mathfrak{C}_1^{''}$. Percabangan berikutnya dicari dari matriks $\mathfrak{C}_2$, yang menghasilkan busur $(3,4)$ dan $(6,3)$ dengan $\gamma_{34} = \gamma_{63} = 4$ sebagai busur percabangan. Misal dipilih busur $(6,3)$, didapatkan :

$$\{(5,2),(1,5),\overline{(6,3)}\} \subseteq \mathfrak{B}_2^{'}$$

$$\mathfrak{C}_1^{''} = \begin{array}{c|cccc|c} & & & & & i \\ & 0 & 2 & 8 & 7 & 2 \\ & 0 & \sim & 0 & 3 & 3 \\ & 3 & 0 & \sim & 0 & 4 \\ & 7 & \sim & 4 & \sim & 6 \\ j & 1 & 3 & 4 & 6 & \end{array} \quad \text{dan}$$

$$\{(5,2),(1,5),(6,3)\} \subseteq \mathfrak{B}_2^{''}$$

$$\mathfrak{C}_1^{''} = \begin{array}{c|ccc|c} & & & & i \\ & 0 & 8 & 7 & 2 \\ & 0 & 0 & \sim & 3 \\ & 3 & \sim & 0 & 4 \\ j & 1 & 4 & 6 & \end{array}$$

Matriks $\mathfrak{C}_2^{'}$ direduksi baris dengan $\rho_6 = 4$ pada baris 6, sedangkan matriks $\mathfrak{C}_2^{''}$ tetap, menghasilkan batas bawah eksklusi dan inklusi masing - masing :

$$\mathfrak{C}_2^{'} := \begin{array}{|cccc|c} & & & & i \\ 0 & 2 & 8 & 7 & 2 \\ 0 & \sim & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 0 & 4 \\ 3 & \sim & 0 & \sim & 6 \end{array}$$

$j \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 6$

$c(\mathfrak{B}_2') = c(\mathfrak{B}_1) + 4 = 28$, dan $c(\mathfrak{B}_2'') = c(\mathfrak{B}_1) = 24$

Diperoleh $\mathfrak{B} \in \{\mathfrak{B}_2', \mathfrak{B}_2''\}$ dengan $c(\mathfrak{B}) =$ minimum $\{c(\mathfrak{B}_2'), c(\mathfrak{B}_2'')\} = c(\mathfrak{B}_2'') = 24$.

Dibentuk $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_2''$, $c(\mathfrak{B}_3) = c(\mathfrak{B}_2'') = 24$, dan $\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_2''$. Percabangannya terletak pada busur $(4,6)$ dengan $r_{46} = 10$. Eksklusi dan inklusi busur $(4,6)$ ini menghasilkan :

$\{(5,2),(1,5),(6,3),\overline{(4,6)}\} \subseteq \mathfrak{B}_3'$

$$\mathfrak{C}_3' = \begin{array}{c|ccc|c} & & & & i \\ & 0 & 8 & 7 & 2 \\ & 0 & 0 & \sim & 3 \\ & 3 & \sim & \sim & 4 \\ j & 1 & 4 & 6 & \end{array} \quad \text{dan}$$

$\{(5,2),(1,5),(6,3),(4,6)\} \subseteq \mathfrak{B}_3''$

$$\mathfrak{C}_3'' = \begin{array}{c|cc|c} & & & i \\ & 0 & 8 & 2 \\ & 0 & 0 & 3 \\ j & 1 & 4 & \end{array}$$

Elemen-elemen matriks $\mathfrak{C}_3'$ pada baris 4 direduksi dengan $p_4=3$ dan elemen kolom 6 dilakukan reduksi dengan $q_6=7$, menghasilkan :

$$\mathfrak{C}_3' := \begin{array}{c|ccc|c} & & & & i \\ & 0 & 8 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & \sim & 3 \\ & 0 & \sim & \sim & 4 \\ j & 1 & 4 & 6 & \end{array}$$

dengan $c(\mathfrak{B}_3') = c(\mathfrak{B}_3) + 10 = 34$ dan

$c(\mathfrak{B}_3'') = c(\mathfrak{B}_3) = 24$.

Diperoleh $\mathfrak{B} \in \{\mathfrak{B}_3', \mathfrak{B}_3''\}$ dengan $c(\mathfrak{B}) = \min\{c(\mathfrak{B}_3'), c(\mathfrak{B}_3'')\}$

$= c(\mathfrak{B}_3'') = 24.$

Dibentuk $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_2''$, $c(\mathfrak{B}_4) = c(\mathfrak{B}_3'') = 24$ dan $\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_3''$. Percabangannya terletak pada busur $(2,1)$ dan $(3,4)$ dengan $\gamma = 8$. Misal dipilih busur $(2,1)$, menghasilkan :

$\{(5,2),(1,5),(6,3),(4,6),(\overline{2,1})\} \leq \mathfrak{B}_4'$.

$$\mathfrak{C}_4'' = \begin{array}{c|c} & i \\ \begin{bmatrix} \sim & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 4 \end{matrix} & j \end{array} \quad \text{dan}$$

$\{(5,2),(1,5),(6,3),(4,6),(2,1)\} \leq \mathfrak{B}_4''$

$$\mathfrak{C}_4 = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & 3 \\ 4 & j \end{array}$$

Setelah diadakan reduksi baris dengan $\rho_2=8$ untuk matriks $\mathfrak{C}_4''$ pada baris ke-2, diperoleh :

$$\mathfrak{C}_4'' := \begin{array}{cc} & i \\ \begin{bmatrix} \sim & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 4 \end{matrix} & j \end{array}$$

$c(\mathfrak{B}_4') = c(\mathfrak{B}_4) + 8 = 32$ dan $c(\mathfrak{B}_4'') = c(\mathfrak{B}_4) = 24.$

$\mathfrak{B} \in \{\mathfrak{B}_4', \mathfrak{B}_4''\}$ dengan $c(\mathfrak{B}) = \min \{ c(\mathfrak{B}_4'), c(\mathfrak{B}_4'') \} = c(\mathfrak{B}_4'') = 24.$

Dibentuk $\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_4''$, $c(\mathfrak{B}_5) = c(\mathfrak{B}_4'') = 24$ dan $\mathfrak{C}_5 = \mathfrak{C}_4''$. Tinggal satu busur pada matriks $\mathfrak{C}_5$, sehingga percabangannya pada busur $(3,4)$ yang menghasilkan himpunan eksklusi dan inklusi masing-masing :

$\{(5,2),(1,5),(6,3),(4,6),(2,1),(\overline{3,4})\} \leq \mathfrak{B}_5$ dan

$\{(5,2),(1,5),(6,3),(4,6),(2,1),(3,4)\} \subseteq \mathfrak{B}_5$

dengan $c(\mathfrak{B}_5') = c(\mathfrak{B}_5'') = c(\mathfrak{B}_5) = 24$.

Sehingga himpunan solusinya adalah :

$\mathfrak{B} = \{(5,2),(1,5),(6,3),(4,6),(2,1),(3,4)\}$

$\quad = \{(1,5),(5,2),(2,1),(3,4),(4,6),(6,3)\}$

Ternyata ada 2 sirkuit dalam himpunan $\mathfrak{B}$, jadi pereduksian diulang lagi dengan menetapkan :

$\mathfrak{B}_6 = \mathfrak{B}_0'$, $c(\mathfrak{B}_6) = c(\mathfrak{B}_0') = 27$ dan $\mathfrak{C}_6 = \mathfrak{C}_0'$.

$$\mathfrak{C}_6 = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{cccccc} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 4 & 3 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \end{array}$$

$j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

Dari matriks $\mathfrak{C}_6$ terdapat 4 busur yang mempunyai $\gamma$ sama, yaitu busur $(1,5),(2,1),(3,4)$, dan $(6,3)$ dengan $\gamma_{rs} = 1$. Misal dipilih busur $(6,3)$. Eksklusi dan inklusi busur ini menghasilkan :

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3})\} \in \mathfrak{B}_6'$

$$\mathfrak{C}_6' = \left[\begin{array}{cccccc} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 7 & 1 & \sim & 4 & 3 & \sim \end{array}\right] \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{dan}$$

$j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$\{(\overline{5,2}),(6,3)\} \in \mathfrak{B}_6''$

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{C}_6'' = \begin{bmatrix} \sim & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \sim \\ 3 & 3 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 1 & \sim & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 & \end{array}$$

Dilakukan reduksi pada matriks $\mathfrak{C}_6'$ dengan $\rho_6=1$ untuk baris 6, sedang matriks $\mathfrak{C}_6''$ tetap karena $\rho_i=q_j=0$. Diperoleh matriks hasil reduksi dan batas bawah eksklusi dan inklusi busur (6,3) sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{C}_6' := \begin{bmatrix} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 6 & 0 & \sim & 3 & 2 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ j \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 & \end{array}$$

Dengan $c(\mathfrak{B}_3') = c(\mathfrak{B}_3) + 1 = 28$, dan

$c(\mathfrak{B}_6'') = c(\mathfrak{B}_6) = 27$.

Ditetapkan $\mathfrak{C}_7 = \mathfrak{C}_6''$, $c(\mathfrak{B}_7) = c(\mathfrak{B}_6'') = 27$ dan $\mathfrak{C}_7 = \mathfrak{C}_6''$. Percabangan dari matriks $\mathfrak{C}_6$ terletak pada busur (4,6). Sedangkan eksklusi dan inklusi busur (4,6) ini memperoleh :

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(\overline{4,6})\} \leq \mathfrak{B}_7'$

$$\mathfrak{C}_7' = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \sim \\ 3 & 3 & \sim & 3 & \sim \\ 0 & \sim & 1 & \sim & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$ dan

$$\{(\overline{5,2}), (6,3), (4,6)\} \subseteq \mathfrak{B}_7''$$

$$\mathfrak{C}_7'' = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sim & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & \sim & 1 & \sim \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

Baris 4 matriks $\mathfrak{C}_7'$ G NA E y XL O@O

$$\mathfrak{C}_7' := \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & \sim \\ 0 & 0 & \sim & 0 & \sim \\ 0 & \sim & 1 & \sim & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

Mendapatkan batas bawah masing-masing :

$c(\mathfrak{B}_7') = c(\mathfrak{B}_7) + 3 = 27 + 3 = 30$, dan

$c(\mathfrak{B}_7'') = c(\mathfrak{B}_7) = 27$.

Ditetapkan $\mathfrak{B}_8 = \mathfrak{B}_7''$, $c(\mathfrak{B}_8) = c(\mathfrak{B}_7') = 27$ dan $\mathfrak{C}_8 = \mathfrak{C}_7''$.

Percabangannya terletak pada busur $(1,5)$, $(2,1)$, $(3,4)$ dan $(5,1)$ dengan $\gamma_{ij} = 1$. Misal dipilih $(5,1)$ sebagai percabangan berikutnya.

Eksklusi/inklusi busur $(5,1)$, menghasilkan :

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(\overline{5,1})\} \subseteq \mathfrak{B}_8'$

$$\mathfrak{C}_8' = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} \sim & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sim & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ \sim & \sim & 1 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} j & 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} & \end{array} \qquad \text{dan}$$

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1)\} \subseteq \mathfrak{B}_8''$

$$\mathfrak{C}_8'' = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & \sim \\ \sim & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} j & 2 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Elemen-elemen baris *5* dari matriks $\mathfrak{C}_8'$ direduksi dengan $p_5$=1, dan elemen-elemen kolom *5* matriks $\mathfrak{C}_8''$ direduksi dengan $q$=1, sehingga diperoleh :

$$\mathfrak{C}_8' := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} \sim & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sim & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ \sim & \sim & 0 & \sim \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} j & 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} & \end{array} \quad \text{dan} \quad \mathfrak{C}_8'' := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & \sim \\ \sim & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right] & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} j & 2 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Dengan $c(\mathfrak{B}_8') = c(\mathfrak{B}_8) + 1 = 28$, dan

$c(\mathfrak{B}_8'') = c(\mathfrak{B}_8) + 1 = 28$.

Ditetapkan $\mathfrak{B}_9 = \mathfrak{B}_8''$, $c(\mathfrak{B}_9) = c(\mathfrak{B}_8'') = 28$ dan $\mathfrak{C}_9 = \mathfrak{C}_8''$.

Maksimum $\gamma_{ij} = 13$, terletak pada busur $(2,5)$, jadi percabangannya pada busur $(2,5)$.

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1),(\overline{2,5})\} \subseteq \mathfrak{B}_9'$

$$\mathfrak{C}_9' = \begin{array}{c|c} & i \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & \sim \\ \sim & 7 & \sim \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ j \quad 2 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1),(2,5)\} \subseteq \mathfrak{B}_9''$

$$\mathfrak{C}_9'' = \begin{array}{c|c} & i \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \\ j \quad 2 \quad 4 & \end{array}$$

Matriks $\mathfrak{C}_9'$, baris 2 dan kolom 5 direduksi masing-masing dengan $p_2=7$ dan $q_5=6$, menjadi :

$$\mathfrak{C}_9' := \begin{array}{c|c} & i \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & \sim \\ \sim & 0 & \sim \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ j \quad 2 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

menghasilkan $c(\mathfrak{B}_9') = c(\mathfrak{B}_9) + 13 = 41$ dan

$c(\mathfrak{B}_9'') = c(\mathfrak{B}_9) = 28.$

Ditetapkan $\mathfrak{B}_{10} = \mathfrak{B}_9''$, $c(\mathfrak{B}_{10}) = c(\mathfrak{B}_9'') = 28$, dan $\mathfrak{C}_{10} = \mathfrak{C}_9''$.

Dari matriks $\mathfrak{C}_{10}$ dicari percabangan berikutnya. Dengan cara sebelumnya didapatkan busur $(1,2)$ dan $(3,4)$ yang bisa menjadi busur percabangan. Misal dipilih busur $(3,4)$, yang menghasilkan :

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1),(2,5),(\overline{3,4})\} \subseteq \mathfrak{B}'_{10}$

$$\mathfrak{C}'_{10} = \begin{array}{c|cc|c} & & & i \\ & 0 & 2 & 1 \\ & 0 & \sim & 3 \\ j & 2 & 4 & \end{array}$$

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1),(2,5),(3,4)\} \subseteq \mathfrak{B}''_{10}$

$$\mathfrak{C}''_{10} = \begin{array}{c|c|c} & & i \\ & 0 & 1 \\ j & 2 & \end{array}$$

Setelah elemen kolom 4 matriks $\mathfrak{C}'_{10}$ direduksi dengan $q_4$=2, didapatkan :

$c(\mathfrak{B}'_{10})$ = 28 + 2 = 30 dan $c(\mathfrak{B}''_{10})$ = 28, serta matriks hasil reduksi :

$$\mathfrak{C}'_{10} := \begin{array}{c|cc|c} & & & i \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & \sim & 3 \\ j & 2 & 4 & \end{array}$$

Ditetapkan $\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{C}''_{10}$, $c(\mathfrak{B}_{11}) = c(\mathfrak{B}''_{10})$ = 28 dan $\mathfrak{B}_{11} = \mathfrak{B}''_{10}$.

Dari matriks $\mathfrak{C}_{11}$ tinggal busur (1,2), sehingga percabangannya terletak pada busur (1,2).

Himpunan busur eksklusi dan inklusinya masing-masing adalah :

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1),(2,5),(3,4),(\overline{1,2})\} \subseteq \mathfrak{B}'_{11}$

dengan $c(\mathfrak{B}'_{11})$ = 28, dan

$\{(\overline{5,2}),(6,3),(4,6),(5,1),(2,5),(3,4),(1,2)\} \subseteq \mathfrak{B}''_{11}$

dengan $c(\mathfrak{B}''_{11}) = 28$.

Jadi himpunan solusinya adalah :

$\mathfrak{B} = \{(6,3),(4,6),(5,1),(2,5),(3,4),(1,2)\}$

$\mathfrak{B} = \{(1,2),(2,5),(5,1),(3,4),(4,6),(6,3)\}$.

Ternyata ada 2 sirkuit lagi dalam himpunan solusi tersebut, jadi pereduksian dan penentuan busur percabangannya diulang lagi dengan mengeksklusi busur (6,3) dari himpunan solusi.

Ditetapkan $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}'_{3}$, $c(\mathfrak{B}) = c(\mathfrak{B}_{12}) = c(\mathfrak{B}'_{3}) = 28$, dan $\mathfrak{C}_{12} = \mathfrak{C}'_{3}$.

$$\mathfrak{C}_{12} = \begin{array}{cc} & i \\ \begin{bmatrix} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 6 & 0 & \sim & 3 & 2 & \sim \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ j \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \end{array}$$

Maks $\gamma_{ij} = 2$, pada busur (6,2), jadi percabangannya terletak pada eksklusi/inklusi busur (6,2).

$$\{\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(\overline{6,2})\} \subseteq \mathfrak{B}'_{12}$$

$$\mathfrak{C}'_{12} = \begin{array}{c c c} & & i \\ & \left[\begin{matrix} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 6 & \sim & \sim & 3 & 2 & \sim \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

$$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2)\} \subseteq \mathfrak{B}''_{12}$$

$$\mathfrak{C}''_{12} = \begin{array}{c c c} & & i \\ & \left[\begin{matrix} \sim & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & \sim \\ 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sim & 0 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

Dilakukan reduksi pada matriks $\mathfrak{C}'_{12}$ $\rho_6=2$ untuk elemen-elemen baris ke-6, yang mengahasilkan :

$$\mathfrak{C}'_{12} := \begin{array}{c c c} & & i \\ & \left[\begin{matrix} \sim & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sim & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & \sim & 0 & 1 & \sim & 0 \\ 4 & \sim & \sim & 1 & 0 & \sim \end{matrix}\right] & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ j & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array} \quad \text{dan}$$

Dengan batas bawah yang diperoleh masing-masing :

$c(\mathfrak{B}'_{12}) = c(\mathfrak{B}_{12}) + 2 = 30$ dan $c(\mathfrak{B}''_{12}) = c(\mathfrak{B}_{12}) = 28$.

Dibentuk $\mathfrak{B}_{13} = \mathfrak{B}''_{12}$, $c(\mathfrak{B}_{13}) = c(\mathfrak{B}''_{12}) = 28$, dan ditetapkan $\mathfrak{C}_{13} = \mathfrak{C}''_{12}$. Dari matriks $\mathfrak{C}_{13}$ ini, percabangan selanjutnya pada busur $(1,5)$ dengan $\gamma_{15} = 2$. Sehingga eksklusi dan inklusi busur ini menghasilkan :

$$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(\overline{6,2}),(\overline{1,5})\} \subseteq \mathfrak{B}'_{13}$$

$$\mathfrak{C}''_{13} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 1 & 2 & \sim & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & \sim \\ 0 & \sim & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sim & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array} \quad \text{dan}$$

$$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(\overline{6,2}),(1,5)\} \subseteq \mathfrak{B}''_{13}$$

$$\mathfrak{C}''_{13} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & \sim \\ 0 & \sim & 0 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 0 \\ \sim & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & 1 & 3 & 4 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

Matriks $\mathfrak{C}'_{13}$ direduksi dengan $p_1 = 1$ dan $q_5 = 1$ masing-masing untuk baris $1$ dan kolom $5$, menghasilkan :

$$\mathfrak{C}'_{13} := \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 0 & 1 & \sim & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & \sim \\ 0 & \sim & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sim & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \end{array} \quad \text{dan}$$

Didapatkan $c(\mathfrak{B}_{13}') = c(\mathfrak{B}_{13}) + 2 = 30$ dan

$c(\mathfrak{B}_{13}'') = c(\mathfrak{B}_{13}) = 28.$

Dibentuk $\mathfrak{B}_{14} = \mathfrak{B}_{13}''$, $c(\mathfrak{B}_{14}) = c(\mathfrak{B}_{13}'') = 28$, dan ditetapkan $\mathfrak{C}_{13} = \mathfrak{C}_{13}''$.

Busur $(2,1)$ menjadi busur percabangan dengan $\gamma_{21} = 2$.

Matriks eksklusi dan inklusinya adalah :

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2),(1,5),(\overline{2,1})\} \subseteq \mathfrak{B}_{14}'$

$$\mathfrak{C}_{14}' = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 2 & 8 & \sim \\ 0 & \sim & 0 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 0 \\ \sim & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & 1 & 3 & 4 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2),(1,5),(2,1)\} \subseteq \mathfrak{B}_{14}''$

$$\mathfrak{C}_{14}'' = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \sim & 0 & 3 \\ 0 & \sim & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} i \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & 3 & 4 & 6 \end{matrix} & \end{array}$$

Setelah matriks $\mathfrak{C}_{14}'$ direduksidengan $\rho_2=2$ untuk baris ke-2, menghasilkan $c(\mathfrak{B}_{14}') = c(\mathfrak{B}_{14}) + 2 = 28 + 2 = 30$ dan $c(\mathfrak{B}_{14}'') = c(\mathfrak{B}_{14}) = 28$, serta matriks hasil reduksi $\mathfrak{C}_{14}'$ sebagai berikut :

$$\mathfrak{C}'_{14} := \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cccc} \sim & 2 & 8 & \sim \\ 0 & \sim & 0 & 3 \\ 3 & 0 & \sim & 0 \\ \sim & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 6 \end{array} & \end{array} \quad \begin{array}{c} i \\ j \end{array}$$

Dengan menetapkan $\mathfrak{C}_{15} = \mathfrak{C}''_{14}$, $c(\mathfrak{B}_{15}) = c(\mathfrak{B}''_{14}) = 28$, dan $\mathfrak{B}_{15} = \mathfrak{B}''_{15}$, percabangan berikutnya pada busur $(3,4)$, dengan $\gamma_{34} = 4$.

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2),(1,5),(2,1),(\overline{3,4})\} \leq \mathfrak{B}'_{15}$

$$\mathfrak{C}'_{15} := \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{ccc} \sim & \sim & 3 \\ 0 & \sim & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 6 \end{array} & \end{array} \quad \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \text{ dan}$$

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2),(1,5),(2,1),(3,4)\} \leq \mathfrak{B}''_{15}$

$$\mathfrak{C}''_{15} := \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cc} \sim & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3 & 6 \end{array} & \end{array} \quad \begin{array}{c} i \\ j \end{array}$$

Baris ke-3 dan kolom-4, dari matrik $\mathfrak{C}'_{15}$ direduksi masing-masing dengan $p_3 = 3$ dan $q_4 = 1$, yang menghasilkan $c(\mathfrak{B}'_{15}) = c(\mathfrak{B}_{15}) + 4 = 32$, dan $c(\mathfrak{B}''_{15}) = c(\mathfrak{B}_{15}) = 28$.

Dibentuk $\mathfrak{B}_{16} = \mathfrak{B}''_{15}$, $c(\mathfrak{B}_{16}) = c(\mathfrak{B}''_{15}) = 28$, dan ditetapkan $\mathfrak{C}_{16} = \ddot{\mathfrak{C}}_{15}$.

Percabangan pada reduksi selanjutnya terletak pada busur - busur (4,6), (5,3) dan (5,6). Jika dipilih busur (5,6) sebagai percabangan, jelas tidak akan mendapatkan solusi tunggal, karena setelah diinklusi, busur terakhir yang tersisa adalah (4,3), padahal busur (4,3) tidak boleh terpilih. Jadi dipilih busur (4,6) atau (5,3).

Andai dipilih busur (5,3), maka percabangan terakhir yang terpilih setelah busur (5,3) diinklusi pada solusi adalah (4,6). Jadi himpunan eksklusi dan inklusi yang diperoleh pada reduksi ke-17 adalah :

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2),(1,5),(2,1),(3,4),(5,3),(\overline{4,6})\} \subseteq \dot{\mathfrak{B}}_{17}$ dan

$\{(\overline{5,2}),(\overline{6,3}),(6,2),(1,5),(2,1),(3,4),(5,3),(4,6)\} \subseteq \ddot{\mathfrak{B}}_{17}$, dengan $c(\mathfrak{B}_{17}) = c(\dot{\mathfrak{B}}_{17}) = c(\ddot{\mathfrak{B}}_{17}) = 28$.

Dan himpunan buaur solusi yang didapatkan adalah :

$\mathfrak{B} = \{(6,2),(1,5),(2,1),(3,4),(5,3),(4,6)\}$

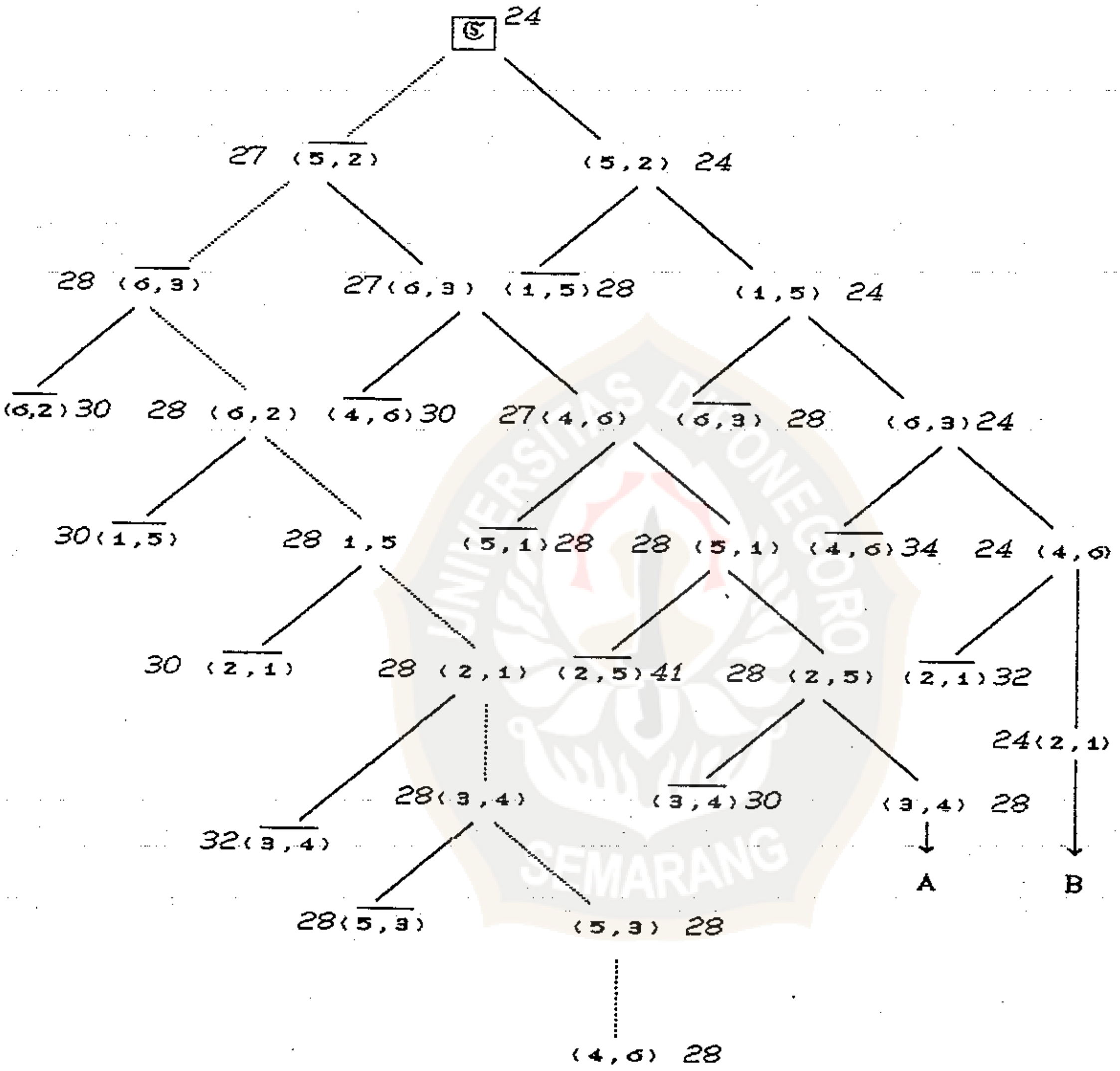
$\quad = \{(1,5),(5,3),(3,4),(4,6),(6,2),(2,1)\}$

dengan $c(\mathfrak{B}) = c(\ddot{\mathfrak{B}}_{17}) = 28$.

Sehingga perjalanan keliling dengan panjang busur yang minimal adalah :

$c_{15} + c_{53} + c_{34} + c_{46} + c_{62} + c_{21} = 5 + 8 + 5 + 3 + 4 + 3 + 4 = 28$.

Sedangkan struktur pohon dari proses pereduksian dan percabangannya ditunjukkan oleh *gambar 3.4.2*.




*Gambar 3.4.2*

Pada percabangan A dan B, himpunan busur - busur percabangannya bukan merupakan solusi, karena terdapat 2 sirkuit. Sedangkan solusi yang dimaksudkan adalah percabangan seperti yang ditunjukkan oleh garis patah -

patah, yang menghasilkan sirkuit tunggal yaitu (1,5) -(5,3) - (3,4) - (4,6) - (6,2) - (2,1), dengan panjang sirkuit (busur) 28.