BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 MATRIK

Matrik mempunyai peran yang sangat penting dalam penyelesaian progam kwadratik konvek dengan menggunakan metode Wolfe's ini, sebelum melangkah pada materi pokoknya terlebih dahulu dibahas tentang matrik sebagai teori penunjang.

<u>Definisi 1</u> :

Matrik adalah himpunan skalar (bilangan riil maupun komplek) yang disusun secara empat persegi panjang, menurut baris-baris dan kolom-kolom.

sehingga dapat ditulis :

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ll} \quad m & \quad m \qquad\qquad \end{array} \end{array}$$

matrik tersebut terdiri dari m baris dan n kolom, a_{ij} adalah elemen matriks baris ke i kolom ke j.dimana : $i = 1,2,3 \ldots\ldots\ldots m$

$j = 1,2,3 \ldots\ldots\ldots n$

<u>Definisi 2</u> :

Matrik bujur sangkar adalah matrik yang mempunyai jumlah baris dan kolom sama. jadi berdasar definisi 1 maka m = n. jika banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom atau menurut definisi (1) maka m = n.

Definisi 3 :

Diagonal utama suatu matriks bujursangkar adalah elemen a_{ij} dimana $i = j$.

sehingga dapat ditulis :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

diagonal utama

Definisi 4 :

Minor (M_{ij} dari elemen a_{ij} adalah determinan suatu matrik A yang dihilangkan baris kei dan kolom ke j.

Definisi 5 :

Kofaktor (A_{ij}) dari elemen a_{ij} adalah $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Definisi 6 :

Determinan suatu matrik bujur sangkar A berordo n adalah jumlah semua n! hasil kali bertanda dari elemen-elemen matrik A.

Dengan kata lain :

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \Sigma\, \rho\,(j_1, j_2, \ldots j_n) \cdot a_{1j_1} \ldots a_{nj_n}$$

dimana :

$\rho\,(j_1, j_2, \ldots j_n) . a_{1j_1}, a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ disebut hasil kali bertanda dari n elemen $a_{1j_1}, a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$. n! merupakan banyaknya permutasi. Sedangkan permutasi adalah barisan bilangan berurutan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dimana berlaku $j_i \neq j_k$, untuk $i \neq k$ (i dan k = 1,2,...n) serta j_i adalah salah satu dari bilangan asli (1,2,...n).

Definisi 7 :

$A = (a_{ij})$ matrik mxn , maka tranpose matrik A adalah A^T berukuran nxm yang didapat dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A, i = 1,2, ...m, sebagai kolom ke-i dari A^T. Dengan kata lain $A^T = (a_{ji})$

Definisi 8 :

Matrik simetrik adalah matrik yang tranposenya adalah dirinya sendiri, dengan kata lain bila $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j .

Definisi 9 :

Matrik A dikatakan definite positif jika harga $|A| > 0$.

Definisi 10 :

Matrik A dikatakan semi definite positif jika harga $|A| \geq 0$.

2.2 VEKTOR

Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor digambarkan sebagai segmen garis berarah, panjang segmen garis menyatakan besar vektor sedangkan arah garis menyatakan arah vektor. Vektor u diberi notasi $\bar{u}$

<u>Definisi 11</u> :

Himpunan m buah vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots . \bar{u}_m\}$ di katakan bergantung linier (linearly dependent) bila terdapat skalar $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_m$ yang tidak semua nol sedemikian hingga berlaku :

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \ldots \ldots . \lambda_m \bar{u}_m = 0$$

<u>Definisi 12</u> :

Himpunan m buah vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots . \bar{u}_m\}$ di katakan bebas linier (linearly independent) bila terdapat skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots \ldots \ldots . \lambda_m$ sedemikian sehingga berlaku :

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \ldots \ldots . \lambda_m \bar{u}_m = 0$$

hanya dipenuhi jika :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots . \lambda_m = 0$$

<u>Definisi 13</u> :

Suatu vektor $\bar{V}$ dikatakan kombinasi linear dari vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \ldots . \bar{u}_m\}$ bila terdapat skalar λ sehingga berlaku :

$$V = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \ldots \ldots . \lambda_m \bar{u}_m$$

contoh :

$\bar{a} = [2,1,2]$, $\bar{b} = [1,0,3]$, $\bar{c} = [3,1,5]$

$\bar{a}$ merupakan kombinasi linier dari $\bar{b}$ dan $\bar{c}$ jika memenuhi :

$$[2,1,2] = \lambda\ [1,0,3] + \lambda\ [3,1,5]$$

atau

$$2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$1 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

dari eliminasi persamaan (1) dan (2) diperoleh : $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$ disubtisusikan ke persamaan (3) maka

$$2 = 3.-1 + 5.1$$

$$2 = 2 \text{ (harga } \lambda \text{ memenuhi)}$$

persamaan yang dikehendaki adalah :

$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$ jadi $\bar{a}$ kombinasi linier dari $\bar{b}$ dan $\bar{c}$.

<u>Teorema 1</u> :

Jika m (m>1) vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots\ldots \bar{u}_m\}$ bergantung linier bila hanya bila terdapat paling sedikit satu vektor dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor lainnya.

<u>Bukti</u> :

(⇒)

Karena $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_m\}$ bergantung linier maka paling sedikit diantara skalar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m\}$

tidak nol, misalnya λ_p sehingga berlaku :

$$V = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\lambda_m\bar{u}_m$$

$$-\lambda_p\bar{u}_p = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\lambda_{p-1}\bar{u}_{p-1}$$

$$+ \lambda_{p+1}\bar{u}_{p+1}\ldots\ldots\lambda_m\bar{u}_m$$

karena $\lambda_p = 0$, maka :

$$u_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\bar{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p}\bar{u}_2\ldots\ldots\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\bar{u}_{p-1}$$

$$-\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\bar{u}_{p+1} + \ldots\ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_m}\bar{u}_m$$

$$= \mu_1\bar{u}_1 + \mu_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\ldots\mu_{p-1}\bar{u}_{p-1}$$

$$+\mu_{p+1}\bar{u}_{p+1}\ldots\ldots + \mu_m\bar{u}_m$$

Jadi $\bar{u}_p$ kombinasi linier dari vektor selebihnya.

($\Leftarrow$)

Misal $\bar{u}_p$ adalah kombinasi linier dari himpunan vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots\ldots \bar{u}_m\}$, maka

$$\bar{u}_p = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\lambda_{p-1}\bar{u}_{p-1}$$

$$+ \lambda_{p+1}\bar{u}_{p+1}\ldots\ldots\ldots\lambda_m u_m$$

jika u_p pindah ruas maka :

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_{p-1}u_{p-1} - u_p\ldots\ldots + \lambda_m\bar{u}_m = 0$$

jelas harga $\lambda \neq 0$ sebab $\lambda_p = -1$

jadi m vektor bergantung linier.

Teorema 2 :

Jika m (m>1) vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{u}_m\}$ dan m+1 vektor-vektor $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots\ldots\ldots \bar{u}_m, \bar{v}\}$ bergantung linier, maka $\bar{v}$ adalah kombinasi linier dari $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{u}_m\}$

Bukti :

Karena $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_m, \bar{v}\}$ bergantung linier maka $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots \lambda_m\bar{u}_m + \lambda_{m+1}\bar{v} = 0$ terdapat $\lambda_i \neq 0$, dalam hal ini $\lambda_{m+1} \neq 0$, sebab bila tidak demikian akan terjadi kontradiksi yaitu $\lambda_1 \neq 0$ adalah diantara i=1,2...m yang mana,

$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\ldots \lambda_m u_m \neq 0.\bar{v}$

$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_m\bar{u}_m = 0$ berakibat

$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{u}_m\}$ bergantung linier

maka bila $\lambda_{m+1}\bar{v}$ pindah ruas diperoleh :

$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots \lambda_m\bar{u}_m = -\lambda_{m+1}$ karena $\lambda_{m+1} \neq 0$

maka :

$$\bar{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\bar{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}}\bar{u}_2 \ldots \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\bar{u}_m$$

$$\bar{v} = \mu_1\bar{u}_1 + \mu_2\bar{u}_2 + \ldots\ldots\ldots + \mu_{p-1}\bar{u}_{p-1}$$

Jadi $\bar{v}$ kombinasi linier dari $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_m\}$

2.3 KOMBINASI, HIMPUNAN DAN FUNGSI KONVEK

Jika x_i $(i = 1,2,\ldots.p)$ adalah titik-titik di R^n dan $x = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$, $a_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{p} a_i = 1$, maka x dinamakan kombinasi konvek dari x_i. $K \in R^n$ disebut himpunan konvek jika setiap dua titik x_1, $x_2 \in K$ maka setiap kombinasi konvek dari x_1 dan x_2 berada dalam K.

Definisi 16 :

Himpunan titik K disebut konvek jika untuk setiap dua titik x_1 dan $x_2 \in K$ dapat ditemukan $\overset{*}{x} \in K$ sedemikian hingga berlaku:

$$\overset{*}{x} = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2,$$

dimana : $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $x_1 \neq x_2$

Definisi 17 :

Suatu fungsi $F(x) = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

R^n = ruang berdimensi n dan $x \in R^n$ adalah fungsi konvek $\in K$ jika untuk setiap dua titik x_1, x_2 akan berlaku:

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, F(x_1) + (1-\lambda)\, F(x_2)$$

dimana : $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $x_1 \neq x_2$

Teorema 3 :

Jika $Q(x) = P^T X + X^T C\; X$ berada dalam himpunan konvek K dan C adalah matrik semi definit positif maka Q (x) adalah konvek.

Bukti :

Matrik C adalah semi definit positif, maka menurut definisi 10, $|C| \geq 0$, sehingga :

$\lambda\ P^TX + X^TC\ X \geq \lambda^2\ P^TX + X^TC\ X\ ,\ 0 \leq \lambda \leq 1$

ambil $X_1, X_2 \in K$, maka

$\lambda Q(X_1) + (1-\lambda)\ Q\ (X_1)$

$= \lambda\ (P^TX_1 + X_1^TC\ X_1) + (1-\lambda)\ (P^TX_2 + X_2^T\ C\ X_2)$

$= \lambda\ P^TX_1 + (1-\lambda)\ P^TX_2 + \lambda X_2^T\ C\ (X_1 - X_2) +$

$(X_1 - X_2)^TC\ X_1 + (X_1 - X_2)^TC\ (X_1 - X_2) + X_2^TC\ X_2$

$\geq \lambda P^TX_1 + (1-\lambda)\ P^TX_2 + \lambda\ X^T\ C\ (X_1 - X_2)\ +$

$\lambda X_1 (X_1 - X_2)^T . C\ X_2 + \lambda^2 (X_1 - X_2)^TC\ (X_1 - X_2)$

$+\ X_2^T\ C\ X_2$

$= \lambda\ P^TX_1 + (1-\lambda)\ P^TX_2 + \{\ \lambda(X_1 - X_2) + X_2\}^TC$

$.\ \{\ \lambda(X_1 - X_2) + X_2\}$

$= P^T(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) + \{\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)\}^TC$

$.\ \{\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2\}$

jadi $\lambda\ Q(X_1) + (1-\lambda)\ Q(X_2) \geq Q(\ \lambda\ X_1 + (1-\lambda)\ Q(X_2)$

sehingga :

$Q(\lambda X_1 + (1-\lambda)\ X_2 \leq \lambda\ Q(X_1) + (1-\lambda) Q(X_2)$ menurut definisi 12 maka $Q(x)$ konvek.

Definisi 18 :

Suatu fungsi $f(x) = (x_1, x_2 \ldots x_n)$

R^n: ruang berdimensi n dan $x \in R^n$ adalah fungsi konkaf jika untuk setiap $x_1, x_2 \in K$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

dimana : $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $x_1 \neq x_2$

Teorema 4 :

Jika $f(x)$ fungsi konkaf dalam himpunan konvek K maka $-f(x)$ adalah fungsi konvek.

Bukti :

Ambil $x_1, x_2 \in K$

$f(x)$ fungsi konkaf dalam hmpunan konvek K maka menurut definisi 13 berlaku :

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$-\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2)$$

$-\{\ f(x)$ dimana $f(x)$ konvek }

terbukti $-f(x)$:konvek.

Teorema 5 :

Jika $f(x)$ fungsi konvek dalam himpunan konvek K maka $-f(x)$ adalah fungsi konkaf.

Bukti :

Ambil $x_1, x_2 \in K$

$f(x)$ fungsi konvek dalam hmpunan konvek K maka menurut definisi 12 berlaku :

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$-\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2)$$

$-\{\ f(x)$ dimana $f(x)$ konkaf }

terbukti $-f(x)$:konkaf.

Definisi 18 :

Fungsi linier adalah fungsi konvek yang sekaligus fungsi konkaf.

2.4 Program Kwadratik Konvek

Bentuk umum :

Meminimalkan :

$$Q(x) = Q\,(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$$

x_2

$$= (\ c_{11}x_1 + c_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{1n}x_n\ )\ x_1$$

$$+ (\ c_{21}x_1 + c_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{2n}x_n\ )\ x_2$$

x_2

$$\vdots$$

x_2

$$+ (\ c_{n1}x_1 + c_{n2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{nn}x_n\ )\ x_n$$

dengan kendala linier :

$$g_1\ (x) = a_{11}x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$g_2\ (x) = a_{21}x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\vdots$$

$$g_m\ (x) = a_{m1}x_1 + a_nx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots x_n \ge 0$$

bentuk di atas mengalami perluasan yaitu berbentuk :

$$Q(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + p_nx_n$$

$$+ (\ c_{11}x_1 + c_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{1n}x_n\ )\ x_1$$

$$+ (\ c_{21}x_1 + c_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{2n}x_n\ )\ x_2$$

$$\vdots$$

$$+ (\ c_{n1}x_1 + c_{n2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{nn}x_n\ )\ x_n$$

dengan kendala linier :

$$g_1\ (x) = a_{11}x_1 + a_2x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$g_2\ (x) = a_{21}x_1 + a_2x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$g_m\ (x) = a_{m1}x_1 + a_mx_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1,\ x_2\ \dots\dots\ x_n \geq 0$$

sistem di atas dapat disajikan dalam bentuk matrik :

$$Q\ (x) = P^T X + X^T C\ X$$

dengan kendala :

$$g\ (x) = (AX - b)$$

$$X \geq 0$$

dimana :

P = matrik ukuran n x 1

X = matrik ukuran n x 1

C = matrik ukuran n x n, $|\ C\ | \geq 0$

P^T = tranpose matrik P

X^T = tranpose matrik X

contoh :

Minimalkan :

$Q\ (x) = 1/2\ x_1^2 + 1/2\ x_2^2 - x_1 - 2x_2$ dapat dituliskan

$$\underbrace{(\ -1 \quad -2\ )}_{P^T} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{(\ x_1\ \ x_2)}_{X^T} . \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

2.5 KONDISI KUHN - TUCKER

Definisi 19 :

Fungsi $f(x)$ dikatakan memiliki minimal lokal pada titik $\overset{*}{x}$ jika terdapat sebuah selang yang berpusat di x^* sedemikian hingga $f(\overset{*}{x}) \leq f(x)$ dalam selang dimana fungsinya didefinisikan.

Definisi 20 :

Fungsi $f(x)$ dikatakan memiliki minimal global di titik $\overset{*}{x}$ jika $f(\overset{*}{x}) \leq f(x)$ untuk setiap x pada fungsi yang didefinisikan.

Definisi 21 :

Suatu masalah pengoptimalan dikatakan memenuhi kondisi Kuhn-Tucker untuk minimal lokal jika memenuhi syarat :

$$* \; \frac{\partial Q(x)}{\partial x_j} \geq 0 \;, \; x \geq 0$$

$$* \; x_j \left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad , \; j = 1,2....n$$

contoh :

Minimalkan :

$$Q\ (x) = 1/2\ x_2^2 + 1/2\ x_2^2 - x_1 - x_2$$

dengan kendala :

$$g_1(x) = 2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$g_2(x) = x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$* \quad \frac{\partial Q(x)}{\partial x_1} \geq 0 \ , \ x_1 \geq 0$$

$$-1 + x_1 \geq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$* \quad x_1 \left[\frac{\partial Q(x)}{\partial x_1} \right] = 0 \ ,$$

$$x_1(-1 + x_1) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

$$* \quad \frac{\partial Q(x)}{\partial x_2} \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

$$-2 + x_2 \geq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

$$* \quad x_1 \left[\frac{\partial Q(x)}{\partial x_1} \right] = 0 \ ,$$

$$x_2(-2 + x_2) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

pada (2) diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_1 = 1$

pada (4) diperoleh $x_2 = 0$ atau $x_2 = 2$

dari (2) dan (4) diperoleh titik-titik (0,0), (0,2), (1,0), (1,2) dari titik diatas yang memenuhi (1) dan (3) adalah titik (1,2) maka $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$ adalah minimal lokal.

Kondisi Kuhn-Tucker untuk suatu minimal global dapat ditemukan apabila program disajikan dalam bentuk lagrange.

Fungsi lagrange untuk penyelesaian permasalahan II dengan menggunakan Metode Wolfe's dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\Phi\ (x,u) = Q(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i . g_i(x)$$

$$\Phi\ (x,u) = Q(x) + U^T(AX - b)$$

dimana :

u_i = pengganda lagrange

($i = 1,2......m$)

$Q(X)$ = fungsi obyektif

$g_i(x)$= kendala linier

contoh :

Minimalkan :

$$Q\ (x) = 1/2\ x_2^2 + 1/2\ x_2^2 - x_1 - x_2$$

dengan kendala :

$$g_1(x) = 2x_1 + 3x_2 \le 6$$

$$g_2(x) = x_1 + 4x_2 \le 5$$

fungsi lagrange :

$$\Phi\ (x,u) = 1/2\ x_2^2 + 1/2\ x_2^2 + u_1(2x_1 + 3x_2 - 6) + u_2(x_1 + 4x_2 - 5)$$

Fungsi lagrange ini merupakan karakteristik dari penyelesaian dengan menggunakan Metode Wolfe's.

Definisi 22 :

Suatu masalah pengoptimalan dikatakan memenuhi kondisi Kuhn-Tucker untuk minimal global jika memenuhi syarat :

$$* \quad \frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x_j} \geq 0 \ , \ x_j \geq 0$$

$$* \quad x_j \left(\frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad , \ j = 1,2....n$$

$$* \quad \frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial u_i} \geq 0 \ , \ u_i \geq 0$$

$$* \quad u_i \left(\frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial u_i} \right) = 0 \quad , \ j = 1,2....n$$

dimana :

x_j = variabel pada fungsi kendala

u_i = variabel yang tak ada pada fungsi kendala

2.6 Metode Simplek Dantzig

Metode yang paling penting dalam penyelesaian program linier adalah metode simplek Danzig, yang dapat dijelaskan secara singkat sebagai berikut :

Meminimalkan :

$$L\ (X) = P^T X \quad ....(1)$$

dengan kendala :

$$AX = b \quad ....(2)$$

$$X \geq 0 \quad ....(3)$$

dimana :

A adalah matrik m x n, m < n

Assumsikan bahwa A mempunyai rank baris penuh $r = m$ maka pada persamaan (2) sedikitnya satu dari variabel persamaan itu adalah kombinasi linier dari yang lainnya dengan demikian persamaan (2) dapat dipecah untuk m pada n variabel x_i dengan memberi indek sehingga x_1 sampai x_m dan variabel m ini dianggap sebagai fungsi linier dari sisa n - m, maka diperoleh :

$$x_h = d_{ho} + \sum_{k=1}^{n-m} d_{hk}\, x_{m+k}, \quad h = 1,2.......m, \quad .. (4)$$

disubtitusikan ke persamaan (1) diperoleh :

$$L = \alpha_o + \sum_{k=1}^{n-m} \alpha_k . x_{m+k} \quad .... (5)$$

dimana :

$$\alpha_o = \sum_{k=1}^{n-m} P_h . d_{ho}$$

$$\alpha_k = P_{m+k} . \sum_{k=1}^{n-m} P_h . d_{hk}$$

Harga-harga pada variabel x_h dan fungsi obyektif L, dijelaskan oleh harga-harga pada variabel x_{m+k}. Sebuah penyelesaian persamaan (2) dimana variabel x_{m+k}hilang dinamakan solusi dasar. Variabel-variabel x_h dan fungsi obyektif L mempunyai harga d_{ho} dan α_o untuk solusi dasar. Jika $d_{ho} \geq 0$, variabel tak bebasnya tidak negatif, yang menghubungkannya dengan solusi dasar adalah terbatas juga untuk (3). Hal ini dapat terlihat pada (2) dan (3) mempunyai solusi awal yang terbatas jika (2) dan (3) mempunyai solusi terbatas. Variabel bebas yang terdapat pada solusi dasar dinamakan variabel dasar. Solusi dasar dikatakan non degenerete jika $d_{ho} > 0$ hal ini, bila semua variabel dasar semuanya positip. Jika diasumsikan bagian dari variabel bebas dapat dipilih didalam satu cara dan himpunan dari solusi dasar adalah terbatas dan non degenerete, maka dapat dimulai membuat tabel simplek dengan menuliskan persamaan (4) dan (5) bentuk tabel simplek sebagai berikut :

	1	x_{m+1}	$\cdots$	x_{m+ko}	$\cdots$	x_n
x_1	d_{ho}	d_{11}	$\cdots$	d_{1ko}	$\cdots$	$d_{1,n-m}$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
x_{ho}	d_{ho}	d_{h1}	$\cdots$	d_{hoko}	$\cdots$	$d_{h,n-m}$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
x_m	d_{mo}	d_{m1}	$\cdots$	d_{mko}	$\cdots$	$d_{m,n-m}$
L	α_o	α_1	$\cdots$	α_{ko}	$\cdots$	α_{n-m}

Garis dobel menunjukkan harga-harga variabel dasar dan fungsi obyektif ditunjukkan pada x_{m+k}. Ada tiga kasus yang perlu diperhatikan yang mungkin terjadi pada penggunaan simplek dantzig ini, yaitu :

<u>Kasus I</u> : $\alpha_{ko} \geq 0$ untuk semua k

Dikatakan solusi dasar optimal karena x_{m+k}, beberapa penambahan dari variabel bebas, menghilangkan variabel x_{m+k}(oleh (3) sebuah pengurangan adalah hal yang tidak mungkin) tidak dapat menurunkan harga L karena koefisien $\alpha_k$non negatif., selanjutnya minimum L dengan kondisi (2) dan (3) dapat dicapai.

<u>Kasus II</u> : $\alpha_{ko} \geq 0$ untuk paling sedikit $k = k_o$ dan $d_{hko} \geq 0$ untuk semua h.

Dalam kasus ini harga L dapat dikurangi tanpa mengabaikan keterbatasan dari $X \geq 0$. Sebagai contoh, jika variabel tak bebas, menghilangkan variabel x_{m+ko} diperbolehkan mengalami penambahan, dan pada saat yang sama variabel tak bebas lainnya juga hilang secara kontinyu, maka L akn turun monoton karena $\alpha_k < 0$. Walaupun, karena $d_{hko} \geq 0$, variabel-variabel bebas tidak dapat diturunkan, dan kondisi (3) dipenuhi. Diperoleh proses optimal :

$$x_{m+k} = 0 \ , \ k \neq ko$$
$$x_{m+k} = \lambda \ , \ (\lambda > 0)$$
$$x_h \ = d_{ho} + \lambda \ d_{hko},$$

maka $L = \alpha_o + \lambda \ \alpha_{ko} \longrightarrow -$

<u>Kasus III</u> : $\alpha_k < 0$ untuk sedikitnya satu k dan satu h untuk setiap k .

Dalam kasus ini dapat dibuat elemen pivot yang menyebabkan terdapat solusi dasar yang baru dengan harga L yang lebih kecil. elemen pivot dapat dibuat dengan ketentuan sebagai berikut :

ambil $\alpha_k < 0$ $\quad \dfrac{d_{hoo}}{|d_{hoko}|} = \min \dfrac{d_{ho}}{|d_{hko}|}$ untuk semua h

dengan $d_{hko} < 0$, pertemuan antara kolom dan baris diambil sebagai elemen pivot maka akan didapat harga sebagai berikut :

* $x' = x_h$, $h \neq ho$

* $x'_{ho} = x_{m+ko}$

* $x'_{+k} = x_{m+k}$, $k \neq ko$

* $x'_{+ko} = x_{ho}$

* $d'_{hoko} = \dfrac{1}{d_{hoko}}$

* $d'_{hko} = \dfrac{d_{hko}}{d_{hoko}}$, $h = 1,2 \ldots\ldots\ldots m$

* $d'_{hok} = - \dfrac{d_{hok}}{d_{hoko}}$, $k = 0,1,2\ldots\ldots,n-m$

* $d'_{hk} = d_{hk} - d_{hko} \cdot \dfrac{d_{hok}}{d_{hoko}}$

$= d_{hk} + d_{hko} \cdot d'_{ok}$

* $\alpha'_{ko} = \dfrac{\alpha_{ko}}{\alpha_{hoko}}$

$$* \; \alpha'_k = \alpha_k - \alpha_{ko} \cdot \frac{d_{hok}}{d_{hoko}}$$

$$= \alpha_k + \alpha_{ko} \cdot d'_{ok}$$

	1	x_{m+1}	....	x_{ho}	....	x_n
x_1	d'_{ho}	d'_{11}	....	d'_{1ko}	....	$d'_{1,n-m}$
⋮	⋮			⋮		⋮
x_{m+ko}	d'_{ho}	d'_{h1}	....	d'_{hoko}	....	$d'_{h,n-m}$
⋮	⋮			⋮		⋮
x_m	d'_{mo}	d'_{m1}	....	d'_{mko}	....	$d'_{m,n-m}$
L	α'_o	α'_1	....	α'_{ko}	....	α'_{n-m}