BAB II

KONSEP DASAR GRAPH

2.1. PENGERTIAN GRAPH

DEFINISI 2.1 :

Suatu graph G(V,E) terdiri atas himpunan titik-titik V yang tidak kosong secara bersama-sama dengan himpunan E yang anggotanya berupa garis (edge-edge) tak berarah dengan bentuk pasangan (i,j) atau (j,i) yang boleh kosong, dimana i dan j dalam V.

Titik-titik i dan j kemudian dinamakan endpoints dari (i,j).

Garis (edge) (i,j) dihubungkan dari titik i ke titik j.dan (i,j) ini dikatakan insiden dengan titik i dan j atau sebaliknya i dan j insiden dengan (i,j).

Bila graph G dinyatakan secara geometris, titik-titiknya digambarkan dengan lingkaran kecil atau titik dan sepasang titik i dan j dihubungkan dengan garis lengkung atau garis lurus dari titik i ke titik j jika hanya jika (i,j) dalam E.

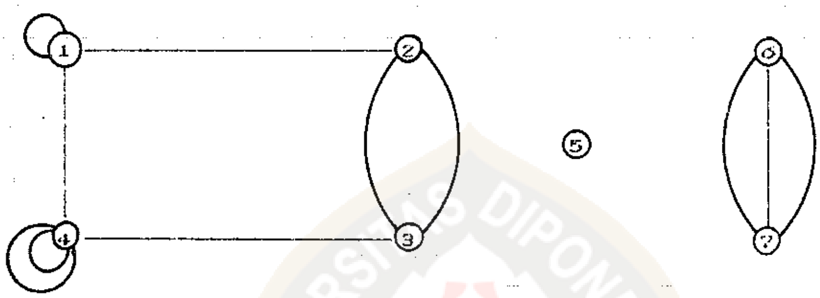
Jika titik i dan j dihubungkan oleh lebih dari satu garis maka garis-garis ini disebut edge-edge paralel dari graph G dan dituliskan dengan $(i,j)_1$, $(i,j)_2$, . . . ,$(i,j)_k$, $k \geq 2$.

Sedang jika i=j, maka garis yang menghubungkan / melingkarinya disebut loop.

Karena garis yang menghubungkan titik i dan j tak berarah / bertujuan, maka edge (i,j) = edge (j,i).

Contoh :

$$G : \begin{cases} V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\} \\ E = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,3)_1,\ (2,3)_2,\ (3,4), \\ \quad (4,4)_1,\ (4,4)_2,\ (6,7)_1,\ (6,7)_2,\ (6,7)_3\} \end{cases}$$



Gambar 2.1.

Definisi 2.2 :

Suatu titik yang tidak insiden dengan edge disebut titik terisolasi.

contoh :

Pada gambar 2.1 , titik 5 adalah titik terisolasi

2.1.1. DERAJAD DALAM GRAPH

DEFINISI 2.3 :

Derajad dari titik i dalam graph dinotasikan sebagai d (i) adalah banyaknya garis yang insiden dengan titik i.

Pada gambar 2.1

d (1) = 4 ; d (5) = 0

d (2) = 3 ; d (6) = 3

d (3) = 3 ; d (7) = 3

d (4) = 6

Theorema 2.1

Jumlah derajad titik-titik dari graph G adalah dua kali banyaknya garis/edge

Bukti :

Andaikan graph G mempunyai p edge dan n titik yaitu $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Setiap edge insiden pada dua titik yang berbeda atau pada suatu titik, jika titik ini sebagai loop, sehingga setiap edge ini memberikan dua derajad. Ini berarti banyaknya derajad untuk semua titik dalam graph G sama dengan dua kali banyaknya edge

$\sum d(i) = 2p$

Akibat 2.1 :

Banyaknya titik yang berderajad ganjil dalam suatu graph G selalu genap.

Bukti :

Dipisahkan titik-titik yang berderajad ganjil dengan titik-titik yang berderajad genap. Dari theorema 2.1, diperoleh $\sum d(i) = 2p$. Persamaan tersebut juga bisa dituliskan sebagai :

$$\sum d(i) = \sum_{J = genap} d(j) + \sum_{k = ganjil} d(k)$$

karena $\sum d(i)$ genap (dua kali p), sedangkan $\sum d(j)$ juga genap, maka pastilah $\sum d(k)$ juga genap.

d (k) adalah derajad ganjil, sedangkan $\sum d(k)$ genap, maka banyaknya titik berderajad ganjil adalah genap.

Akibat 2.1. terbukti

2.1.2. ISOMOPHISMA GRAPH

DEFINISI 2.4

Dua graph $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ isomorfis dan dinyatakan dengan $G_1 = G_2$, jika terdapat korespondensi satu-swatu antara suatu titik dalam himpunan titik V_1 dengan satu titik dalam himpunan titiki V_2, serta terdapat suatu korepondensi satu-satu antara satu edge dalam himpunan edge E_1 dengan satu edge dalam himpunan edge E_2 sedemikian sehingga edge-edge yang berkorespondensi insiden dengan titik-titik yang berkorespondensi.

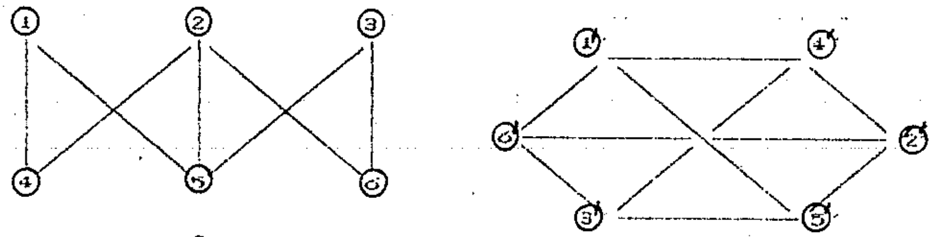
Dengan kata lain :

Dalam dua graph isomorfic, titik-titik yang berkorespondensi dihubungkan dengan edge-edge dalam salah satu graph tersebut (misalnya G_1) jika dan hanya jika, titik-titik tersebut juga dihubungkan dengan sejumlah edge-edge yang sama dalam graph yang lainnya (G_2).

Jadi syarat untuk dua graph isomorfic adalah :

1. $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ harus mempunyai jumlah titik dan edge yang sama.
2. Hubungan insidennya harus tetap terpelihara.

Contoh :



G_1 G_2

Gambar 2.2.

Gambar 2.2. menunjukkan dua graph G dan G yang isomorfic, sebab kedua syarat untuk dua graph isomorfic dipenuhi.

2.1.3. TRAIN, PATH DAN CIRCUIT

DEFINISI 2.5. :

Barisan edge (garis) dengan panjang k−1 dalam suatu graph G adalah terbatas dari edge-edge dengan bentuk $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots (i_{k-1}, i_k)$, $k \geq 2$; dimana pemunculan titik maupun edge boleh berulang.

Jika $i_k = i_1$, barisan edge ini disebut tertutup ; dan jika $i_k \neq i_1$, disebut barisan edge terbuka.

Untuk barisan edge terbuka, titik i_1 disebut titik inisial dan titik i_k disebut titik terminal.

Contoh :

Pada gambar 2.2 :

Barisan edge (1,6), (6,3), (3,5), (5,3), (3,4), (4,1), (1,6), (6,2), (2,5) adalah barisan edge terbuka (sebab titik inisial $i_1 = 1 \neq$ titik terminal $i_k = 5$) dengan panjang = 9.

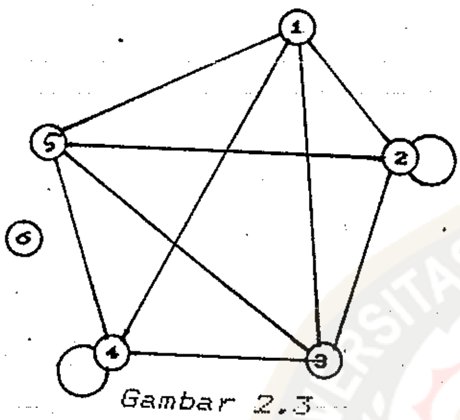
Barisan edge (4,2), (2,6), (6,3), (3,5), (5,2), (2,4), adalah barisan edge tertutup (sebab titik terminal $i_1 = 4 =$ titik terminal $i_k = 4$) dengan panjang = 6.

DEFINISI 2.6 :

Jika semua edge yang muncul dalam suatu barisan edge berbeda, barisan edge ini disebut train ; jadi pemunculan suatu titik boleh berulang, sedang pemunculan edge tidak boleh berulang.

Jika titik terminal = titik inisial, trainnya disebut train tertutup; dan jika titik terminal ≠ titik inisial, trainnya disebut train terbuka.

Contoh :



Gambar 2.3

Pada gambar 2.3 ;

- barisan edge (1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (1,5) adalah train terbuka (sebab $i_1 = 1 \neq i_k = 5$, dan ada titik yang muncul berulang , yaitu titik 1, dan tidak ada edge yang muncul berulang) dengan panjang = 5.
- Barisan edge (5,3), (3,2), (2,5), (5,4), (4,1), (1,5) adalah train tertutup ($i_1 = i_k = 5$) dengan panjang = 6.

DEFINISI 2.7 :

Suatu train terbuka dimana semua titik-titik $i_1, i_2, \ldots i_k$ berbeda dinamakan path dengan panjang k-1 ; jadi pemunculan titik maupun edge dalam barisan edge tidak boleh berulang.

Untuk titik terisolasi dianggap sebagai path dengan panjang nol.

Contoh :

Pada gambar 2.3 :

- Barisan edge (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), adalah path dengan panjang = 4.

- titik (6) adalah path dengan panjang = 0 ((6) titik terisolasi).

DEFINISI 2.8 :

Suatu barisan edge i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k, dimana semua titik i_1, i_2, ..., i_{k-1} berbeda, sedang i_k = i_1 dan pemunculan suatu edge dalam barisan edge ini tidak boleh berulang disebut circuit.

Loop merupakan cicuit dengan panjang = 1

Contoh :

Pada gambar 2.3,

- barisan edge (5,4), (4,1), (1,3), (3,2), (2,5) adalah circuit dengan panjang = 5.
- Loop yang melingkupi titik (4) atau titik (2) adalah circuit demgam panjang = 1

DEFINISI 2.9 :

Panjang suatu train, path atau circuit adalah banyaknya edge yang tyerdapat dalam train, path atau circuit tersebut.

Contoh :

Pada gambar 2.3 :

Panjang train (1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (1,5) = 5

Panjang path (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), = 4

Panjang circuit (1,2), (2,3), (3,5), (5,1) = 4

2.1.4. BIPARTITE GRAPH

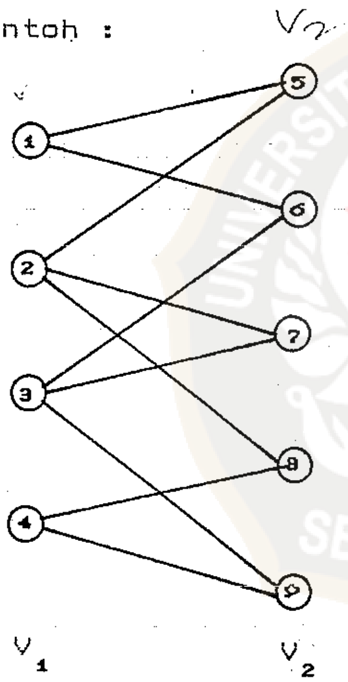
DEFINISI 2. 10 :

Suatu graph G (V,E) dikatakan bipartite jika himpunan titik V dalam G ini bisa dipisah / dipecah menjadi dua sub himpunan yang saling asing V_1 dan V_2

sedemikian sehingga masing-masing edge dalam G mempunyai satu endpoint dalam V_1 dan satu endpoint dalam V_2 ; atau dalam himpunan titik V_1 tidak ada edge (i,j) yang insiden dengan titik i dan j, demikian juga dalam himpunan titik V_1.

Semua path yang menghubungkan dua titik dalam V_1 atau dua titik dalam V_2 mempunyai panjang genap, sedang semua path yang menghubungkan satu titik dalam V_1 dengan satu titik dalam V_2 mempunyai panjang ganjil.

Contoh :



Gambar 2.4.

Pada gambar 2.4, graph G himpunan titik V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, dipisahkan menjadi sub himpunan titik V_1 = {1, 2, 3, 4} dan V_2 = {5, 6, 7, 8, 9}. G ini dikatakan bipartite sebab V, bisa dipisah menjadi V_1 dan V_2, sedemikian sehingga dalam V_1 tidak ada edge yang insiden dengan titik-titik didalamnya. Demikian juga dalam V_2.

Theorema 2.2 :

Syarat perlu dan cukup agar G bipartite adalah setiap circuit dalam G mempunyai panjang genap.

Bukti :

Syarat perlu :

G biprtite ====> setiap circuit mempunyai panjang genap.

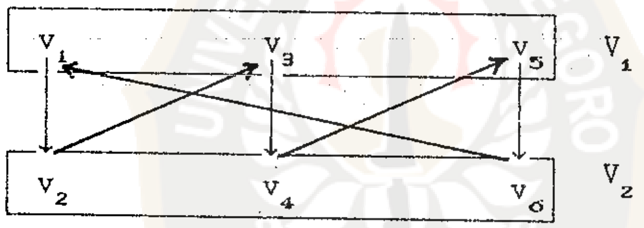
Karena G bipartite, maka V dapatdipisahkan menjadi V_1dan V_2 Kumpulkan titik-titik dengan indeks ganjil pada V_1 dan titik-titik dengan indeks genap pada V_2. Ka r ena G bipartite, maka tidak ada edge yang menghubungkan titik-titik di V_2.

Sehingga panjang circuitnya menjadi :

$$\underbrace{v_1\ v_2\ v_3 \dots v_{2n}}_{\text{ganjil}},\ \underbrace{v_1}_{1}$$

panjang = ganjil + 1

= genap.

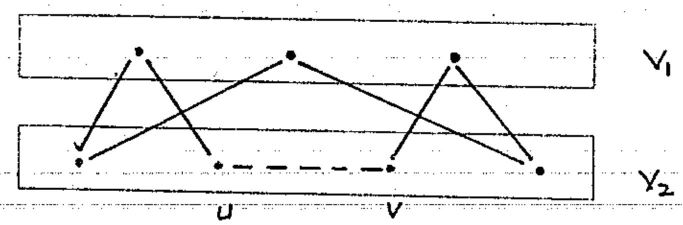


Jadi terbukti, G bipartite ===> sewtiap circuit punya panjang genap.

Syarat cukup :

Setiap circuit mempunyai panjang genap ===> G bipartite.

Andaikan ada 2 titik u dan v (di V_2) yang dihubungkan,



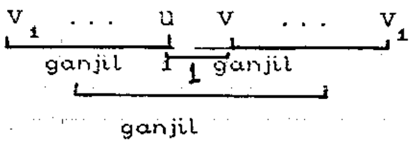
V_1 : himpunan titik dengan jarak genap terhadap V_2

V_2 : himpunan titik dengan jarak ganjil terhadap V_1

Dibentuk geodesic (path terpendek) g_1 dari v_1 ke u ; dan

g_2 dari v_1 ke v

Maka geodesicnya :



Terjadi kontradiksi, maka pengandaian harus diingkar.

Padahal diketahui circuit ini panjangnya genap.

Jadi terbukti tidak ada garis / edge yang menghubungkan dua titik di V_2.

Dengan jalan sama, tidak ada edge yang menghubungkan dua titik di V_1.

Syarat perlu dan cukup terpenuhi, maka Theorema ini terbukti.

2.1.5. REGULAR GRAPH

DEFINISI 2.11 :

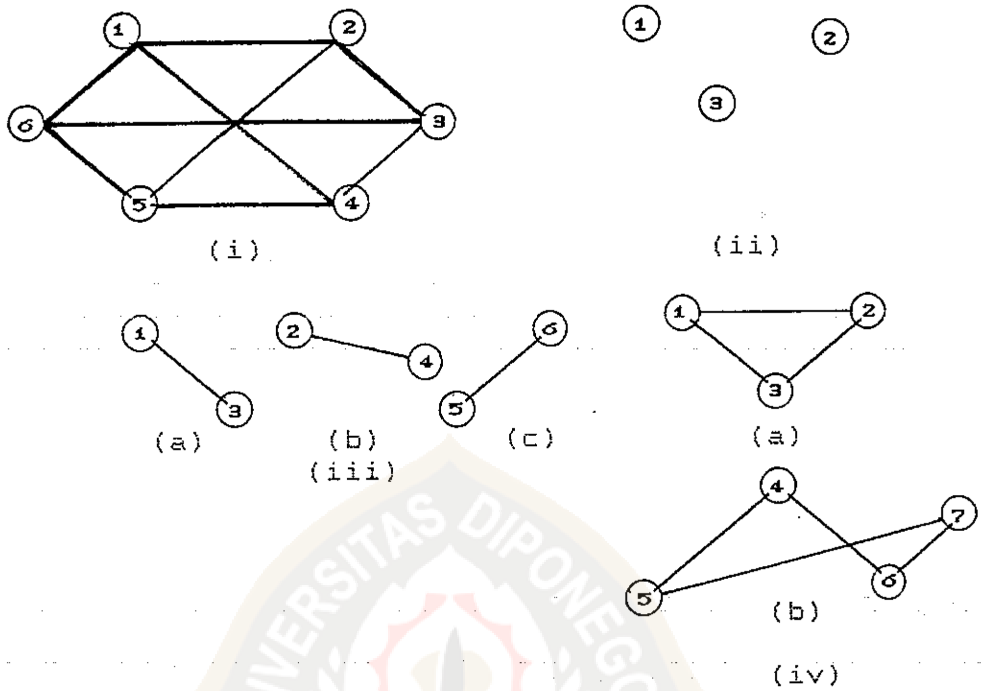
Suatu graph dikatakan regular dengan k jika derajad setiap titik i [$d(i)$] sama dengan k .

Regular graph dengan derajad 0 adalah graph yang terdiri dari himpunan titik-titik terisolasi.

Regular graph dengan derajad 1 adalah yang masing-masing komponennya hanya ada satu edge.

Regular graph dengan derajad 2 adalah yang masing-masing komponennya sebagai suatu circuit.

Contoh :



Gambar 2.5.

Gambar 2.5. :

(i) menunjukan regular graph dengan derajad 3 (setiap titik berderajad 3).

(ii) regular graph dengan derajad 0 (sebab graphnya terdiri dari himpunan titik-titik terisolasi, 1, 2, 3).

(iii) regular graph dengan derajad 1 (masing-masing komponen, (a), (b), (c), hanya terdiri dari satu edge).

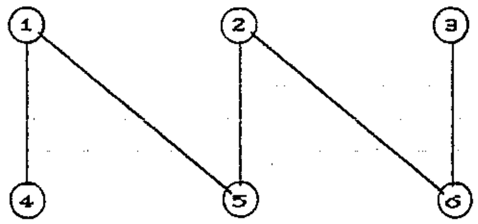
(iv) regular graph dengan derajad 2 (masing-masing komponen (a), (b) sebagai circuit.

2.1.6. CONNECTED GRAPH

DFINISI 2.12 :

Suatu graph dikatakan connected jika setiap pasang titik-titiknya dihubungkan oleh suatu path.

Contoh :



Gambar 2.6.

Gambar 2.6 menunjukan suatu connected graph, sebab setiap pasang titik-titiknya dihubungkan oleh suatu path. misalnya pasangan titik (1,2) dihubungkan oleh path (1,4), (4,3), (3,6), (6,2).

pasangan titik (5,6) dihubungkan oleh path (5,2), (2,6).

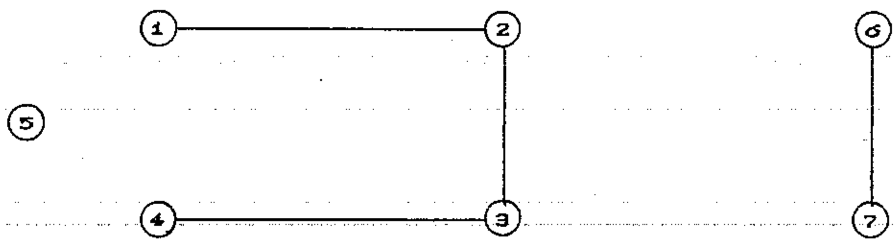
DEFINISI 2.13 :

Komponen dari suatu graph adalah suatu connected subgraph yang terdiri dari jumlah maksimum edge-edge.

Titik terisolasi adalah suatu komponen.

Jika graph tidak conected, maka graph ini pasti memuat sejumlah komponen.

Contoh :



Gambar 2.7.

Gambar 2.7. menunjukkan suatu graph yang mempunyai 3 komponen, yaitu :

- komponen yang berupa titik terisolasi (5)
- komponen yang terdiri dari titik-titik (1), (2), (3), (4).
- komponen yang terdiri dari titik-titik (6) dan (7).

2.2. PENGERTIAN DIRECTED GRAPH

DEFINISI 2.14 :

Suatu directed graph $G_d(V,E)$ adalah suatu graph yang terdiri atas himpunan titik-titik V bersama-sama dengan himpunan E yang elemen-elemennya berupa edge berarah / berjurusan yang dinyatakan dengan bentuk (i,j), dimana i dan j didalam V.

Edge (i,j) ini bergerak dari titik i dan menuju / berhenti pada titik j, dan edge (i,j) dikatakan insiden dengan titik i dan j.

Kemudian titik i dinamakan inisial, sedang titik j dinamakan titik terminal.

Dengan menghilangkan arah dari edge (i,j), maka titik i dan j dinamakan sebagai endpoint dari edge (i,j).

Bila directed grap ini digambarkan secara geometris, titik-titik dinyatakan dengan lingkaran kecil atau titik, sedang dua diantara titik-titik tersebut dihubungkan dengan garis lengkung atau garis lurus dengan anak panah dari i ke j jika dan hanya jika (i,j) dalam E.

Jika ada dua garis atau lebih yang mempunyai titik inisial dan titik terminal yang sama, garis-garis ini disebut edge paralel dan dituliskan den g an $(i,j)_1$, $(i,j)_2$ ... $(i,j)_k$, $k \geq 2$.

Sedang garis yang titik inisial sama dengan titik terminal atau mempunyai endpoint yang sama disebut loop.

Contoh :

Gambar 2.8.

Gambar 2.8 : menunjukan suatu directed graph, dengan himpunan titik $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan himpunan edge

$$E = \{(1,1), (1,2), (2,3)_1, (2,3)_2, (1,4), (4,3), (6,7), (7,6)_1, (7,6)_2\}.$$

2.2.1. DERAJAD OUTGOING DAN INCOMING

DEFINISI 2.15 :

Untuk suatu directed graph $G_d(V,E)$ banyaknya edge yang keluar / meninggalkan titik i sebagai titik inisial $[d^+(i)]$ disebut derajad outgoing dari titik i.

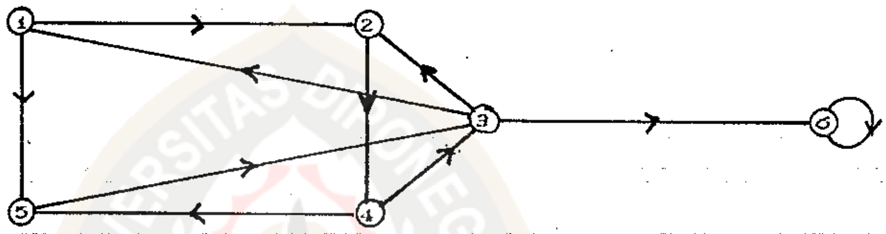
Sedang banyaknya edge yang masuk / menuju titik i sebagai titik terminal $[d^-(i)]$ disebut derajad incoming dari titik i.

Jika d (i) menyatakan banyaknya edge dari G_d yang insiden dengan titik i. maka $d(i) = d^+(i) + d^-(i)$, tetapi apabila edge tersebut merupakan loop yang insiden dengan titik i maka $d(i) = d^+(i) + d^-(i)$-jumlah loopnya.

Karena setiap edge keluar dari satu titik dan berakhir pada titik yang lain, maka banyaknya edge dari G_d ini sama dengan jumlah derajad outgoing = jumlah derajad incoming.

$b = \sum_i d^+(i) = \sum_i d^-(i)$; i berlaku untuk semua titik dalam G_d.

Contoh :



Gambar 2.9.

Pada gambar 2.9 :

$d^+(1) = 2$; $d^-(1) = 1$ ===> $d(1) = 3$

$d^+(2) = 1$; $d^-(2) = 2$ ===> $d(2) = 3$

$d^+(3) = 3$; $d^-(3) = 2$ ===> $d(3) = 5$

$d^+(4) = 2$; $d^-(4) = 1$ ===> $d(4) = 3$

$d^+(5) = 1$; $d^-(5) = 2$ ===> $d(5) = 3$

$d^+(6) = 1$; $d^-(6) = 2$ ===> $d(6) = 2$

$\sum d^+(i) = 10$ $\quad\quad$ $\sum d^-(i) = 10$

$\therefore\ b = \sum d^+(i) = \sum d^-(i) = 10$

2.2.2. ISOMORPHISMA DIRECTED GRAPH

DEFINISI 2.16 :

Dua directed graph $G_{d_1}(V_1, E_1)$ dan $G_{d_2}(V_2, E_2)$ dikatakan isomorfic jika :

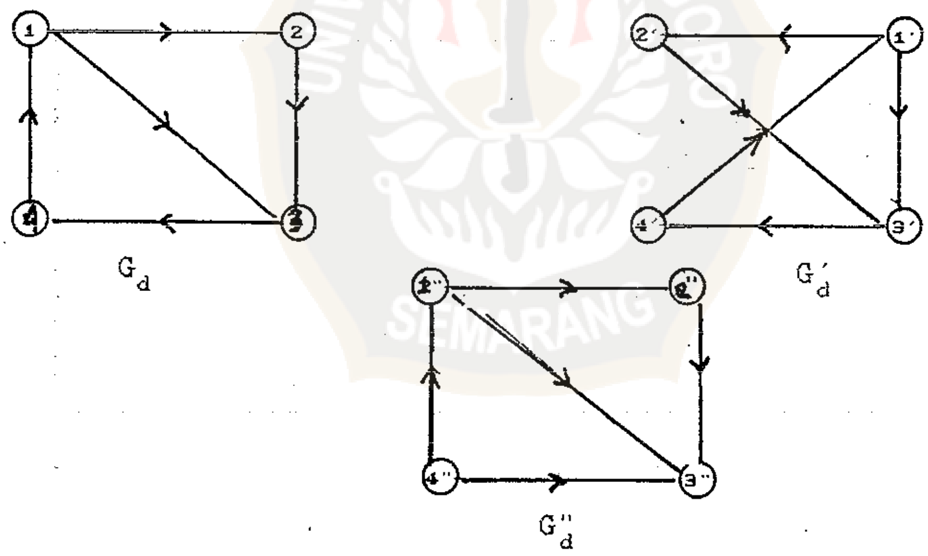
1. Assosiated undirected graphs-nya isomorfic.

2. Tujuan / arah darei edge-edge yang berkorespondensi terpelihara untuk korespondensi dari assosiated undirected graphnya.

Dengan kata lain :

Jika G_{d_1} dan G_{d_2} adalah dua n-titik directed graph yang isomorfic, dimana masing-masing titiknya 1, 2, ... n dan 1\`, 2\`, ... ,n´, sedemikian sehingga untuk beberapa i dan j, edge (i,j) ada dalam G_{d_1}, jika dan hanya jika edge $(i`,j`)$ ada dalam G_{d_2}.

Contoh :



Gambar 2.10.

Pada gambar 2.10 :

G_d dan G'_d adalah dua directed graph yang isomorfic, sebab :

- Assosiated undirected graphnya isomorfic.
- Arah dari edge-edge yang berkorespondensi terpelihara :

(1,2) ; (2,3) ; (3,4) ; (4,1) dan (1,3).

(1',2') ; (2',3') ; (3',4') ; (4',1') dan (1',3').

G_d dan G''_d tidak isomorfic, sebab :

- Arah dari edge-edge yang berkorespondensi tidak terpelihara :

  (1,2) ; (2,3) ; (3,4) ; (4,1) dan (1,3).

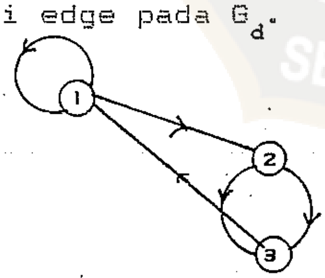
  (1",2") ; (2",3") ; (4",3") ; (4",1") dan (1",3").

  Jadi pada G_d arah garis / edge dari titik 3 ke titik 4, sedang pada G''_d arah garis / edge dari titik 4" ke titik 3".

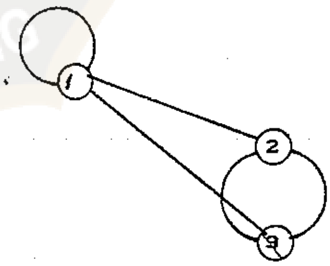
DEFINISI 2.17 :

Pada directed graph G_d, suatu associated undirected graph G_u, dibentuk dari himpunan titik dan himpunan edge yang sama dengan himpunan titik dan himpunan edge pada directed graph G_d dengan menghapus / menghilangkan arah dari edge pada G_d.

Contoh :



(i)



(ii)

Gambar 2.11.

Pada gambar 2.11, graph (ii) adalah associated undirected graph yang dibentuk dari directed graph (i).

2.2.3. BIPARTITE DIRECTED GRAPH

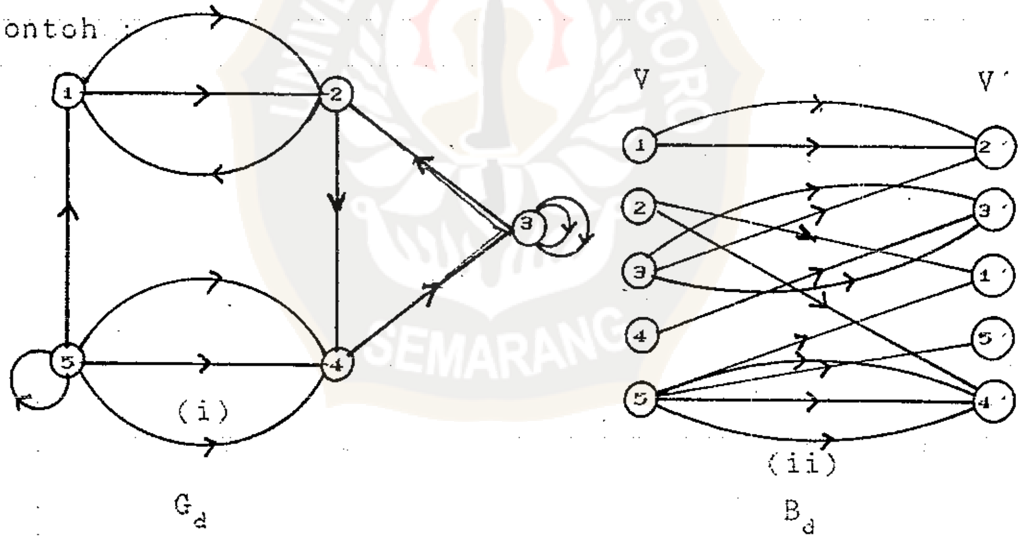
DEFINISI 2.18 :

Dalam suatu directed graph G_d, suatu directed bipartite graph B_d bisa dibentuk apabila dari himpunan titik V dalam G_d, bisa dibentuk V′ yang elemennya di dalam korespondensi satu-satu dengan titik-titik dalam V.

Edge (i,j'), i dalam V dan j' dalam V′ merupakan edge dalam B_d jika dan hanya jika edge (i,j) dalam G_d.

Jumlah edge paralel berarah dalam G_d $[\alpha\ (i,j)]$ = jumlah edge paralel berarah dalam B_d $[\alpha(i,j')]$.

Contoh :



Ganbar 2.12.

Pada gambar 2.12 :

Gambar (i) menunjukkan suatu directed graph $G_d(V,E)$.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{(1,2)_1, (1,2)_2, (2,1), (2,4), (3,2), (3,3)_1, (3,3)_2, (4,3), (5,1), (5,4)_1, (5,4)_2, (5,4)_3, (5,5)\}$.

Gambar (ii) menunjukkan suatu directed bipartite graph B_d yang dibentuk dari directed graph gambar (i), sebab

- jumlah edge pada G_d = jumlah edge B_d = 13
- edge (i,j'), i dalam V dan j' dalam V' merupakan edge pada B_d <===> (i,j) dalam G_d.

  misal edge $(1,2) \in G_d$ <===> $(1,2') \in B_d$

  $(5,4) \in G_d$ <===> $(5,4') \in B_d$

  $(3,3) \in G_d$ <===> $(3,3') \in B_d$

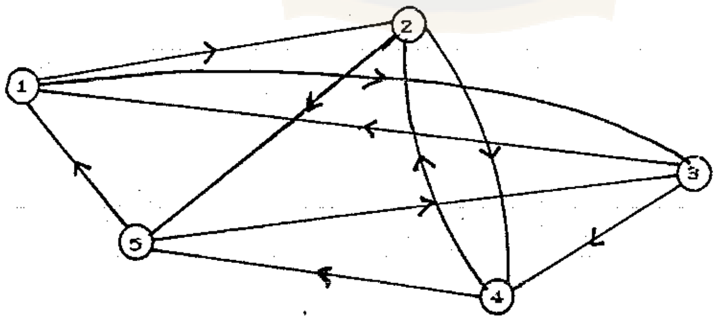
2.2.4. REGULAR DAN SEMI REGULAR DIRECTED GRAPH

DEFINISI 2.19 :

Suatu directed graph dikatakan regular dengan derajad k jika derajad outgoing = derajad incoming = k untuk setiap titik i.

Directed circuit adalah reguler directed graph dengan derajad 1.

Contoh :



Gambar 2.13.

Gambar 2.13 menunjukan regular directed regular graph dengan derajad 2 sebab titik mempunyai derajad outgoing = derajad incoming = 2.

misal , titik 1 : $d^+(1) = d^-(1) = 2$

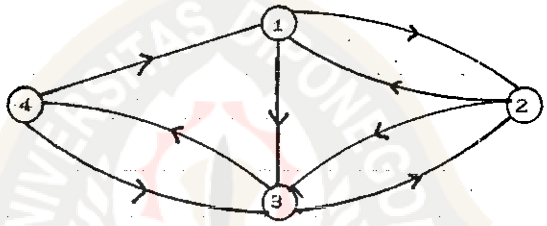
$d^+(2) = d^-(2) = 2$

$d^+(5) = d^-(5) = 2$

DEFINISI 2.20 :

Suatu directed graph dikatakan semi-regular dengan derajad incoming atau outgoing k jika $d^-(\iota)$ atau $d^+(\iota)$ sama dengan k untuk setiap titik ι.

Contoh :



Gambar 2.14

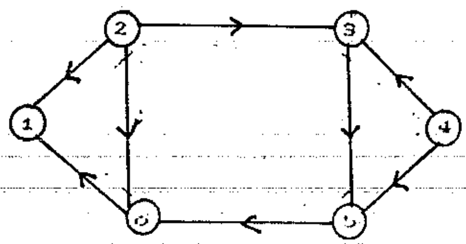
Gambar 2.14 menunjukan semi-regular directed graph dengan derajad outgoing [$d^+(\iota)$] = 2, ι = 1, 2, 3, 4.

2.2. 5. CONNECTED DIRECTED GRAPH

DEFINISI 2.21 :

Suatu directed graph dikatakan connected jika asociated undirected graph G_u - nya connected.

Contoh :



Gambar 2.15

Gambar 2.15 menunjukan suatu connected directed graph, sebab associated undirected graphnya connected.

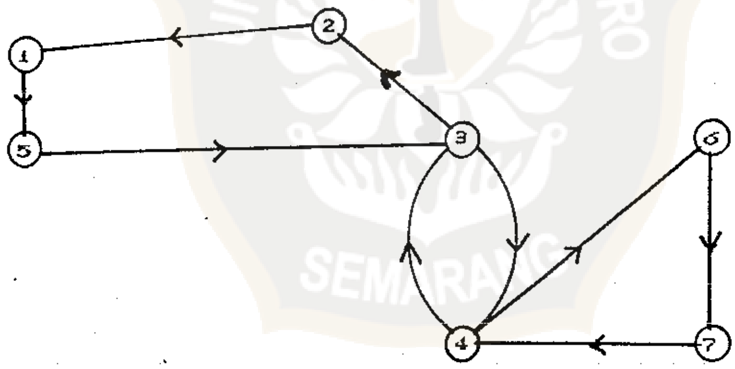
misal pasangan titik (2,5) dihubugkan oleh path (2,3), (3,5)

pasangan titik (3,6) dihubungkan oleh path (3,5), (5,6)

DEFINISI 2. 22 :

Suatu directed graph G_d dikatakan strongly connected (terhubung kuat) jika untuk setiap pasang titik i dan j yang berbeda, terdapat directed path dari titik i ke titik j begitu juga dari j ke i.

Contoh :



Gambar 2.16

Gambar 2.16 menunjukkan suatu strongly connected directed graph.

misal * pasangan titik (1,3) terdapat path (1,5), (5,3).

pasangan titik (3,1) terdapat path (3,2), (2,1).

* pasangan titik (3,7) terdapat path (3,4), (4,6), (6,7).

pasangan titik (7,3) terdapat path (7,4), (4,3).