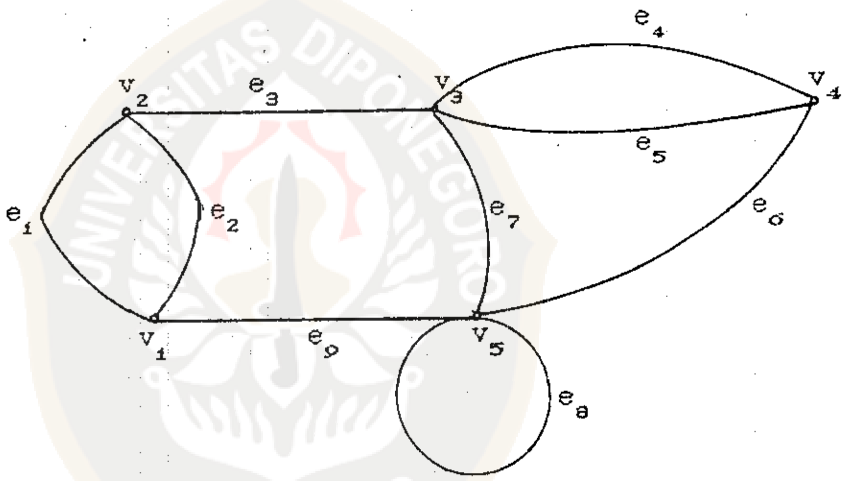
BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. PENGERTIAN GRAPH

Suatu graph $G=(V,E)$ terdiri dari himpunan terbatas yang tidak kosong $V=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ yang disebut titik-titik (vertex) dan himpunan lain $E=\{e_1,e_2,....,e_n\}$ yang disebut garis-garis (edge). Masing-masing garis e_k ditentukan oleh sepasang titik (v_i,v_j).

Contoh .



Gb.2.1.1.

Graph $G=(V,E)$ dengan 5 titik yaitu $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan 9 garis yaitu $E =\{e_1,e_2,......,e_9\}$

Garis yang ditentukan oleh satu titik disebut loop . Contohnya e_8 pada gambar 2.1.1.

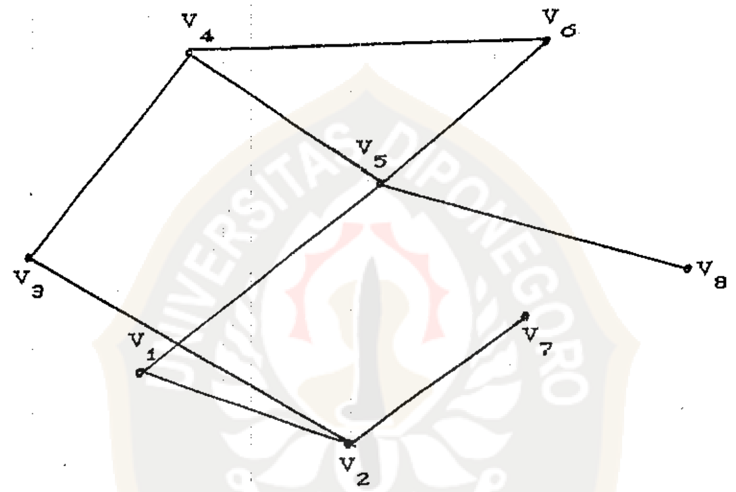
Apabila dua titik dapat dihubungkan lebih dari satu garis, disebut garis paralel. Contohnya e_1 dan e_2 ; e_4 dan e_5

pada Gb.2.1.1. Banyaknya titik dalam suatu graph disebut order. Jadi Gb.2.1.1 adalah graph dengan order 5.

DEFINISI 2.1.1.

Suatu graph dikatakan graph sederhana (simple graph) jika tidak mempunyai loop dan garis paralel.

Contoh.



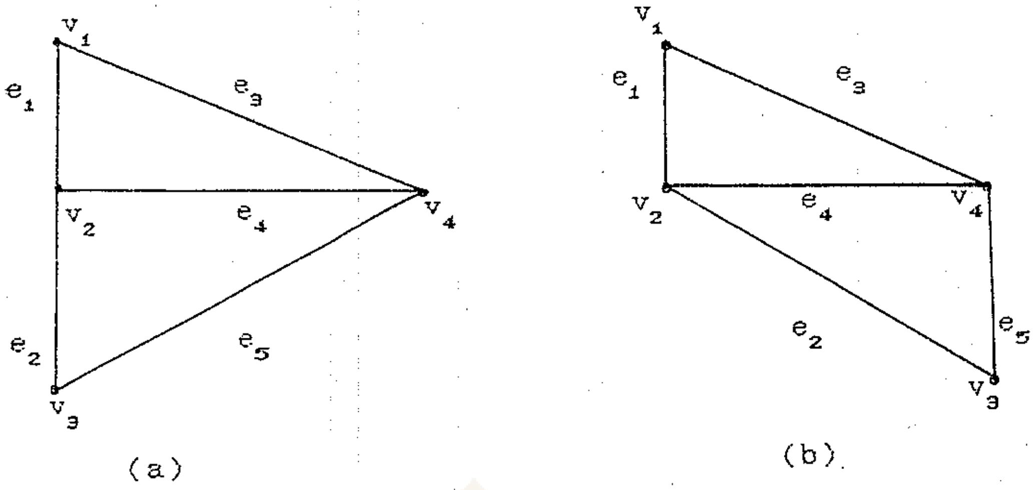
Gb.2.1.2. Graph sederhana dengan 8 titik.

Dalam gambar graph bentuk garis (lengkung maupun lurus) dan panjang pendeknya tidak menentukan apakah dua graph sama atau tidak. Tetapi yang utama adalah sifat insiden diantara garis-garis dan titik-titiknya.

DEFINISI 2.1.2.

Suatu garis $e_k=(v_i,v_j)$, maka e_k dan v_i dikatakan saling insiden. Begitu juga e_k dan v_j dikatakan saling insiden.

Contoh.



Gb.2.1.3.

Adalah dua graph yang berbeda tetapi mewakili graph yang sama, yaitu $G=(V,E)$ dengan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$
Karena sifat insiden diantara garis dan titik-titiknya sama.

Banyaknya garis yang insiden pada suatu titik disebut derajat. Contoh pada Gb.2.1.3. (a), v_2 mempunyai derajat 3.

DEFINISI 2.1.3.

Dua buah titik yang dihubungkan langsung oleh suatu garis disebut adjacent (bertetangga). Sebaliknya dua garis disebut adjacent jika kedua garis tersebut mempunyai paling sedikit satu titik persekutuan.

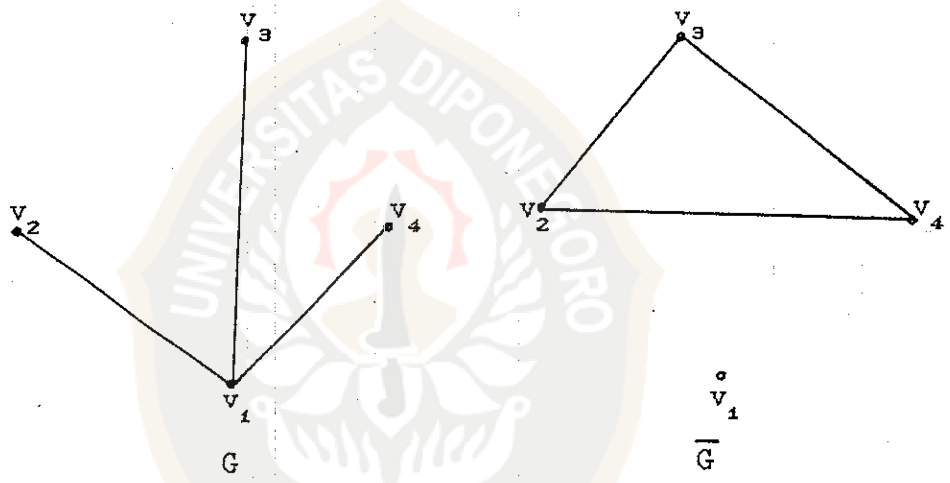
Contoh.

Titik v_2 dengan titik v_3 pada Gb.2.1.1. adalah adjacent. Sedang e_3 dan e_7 adalah dua garis adjacent.

DEFINISI 2.1.4.

Suatu graph $\overline{G} = (V,\overline{E})$ dikatakan komplemen dari graph G jika $\overline{E} = \{(x,y) \in V \times V \mid x \neq y$ dan $(x,y) \notin E\}$. Garis dari G bukan merupakan garis dari $\overline{G}$ dan sebaliknya garis dari $\overline{G}$ bukan merupakan garis dari G.

Contoh.

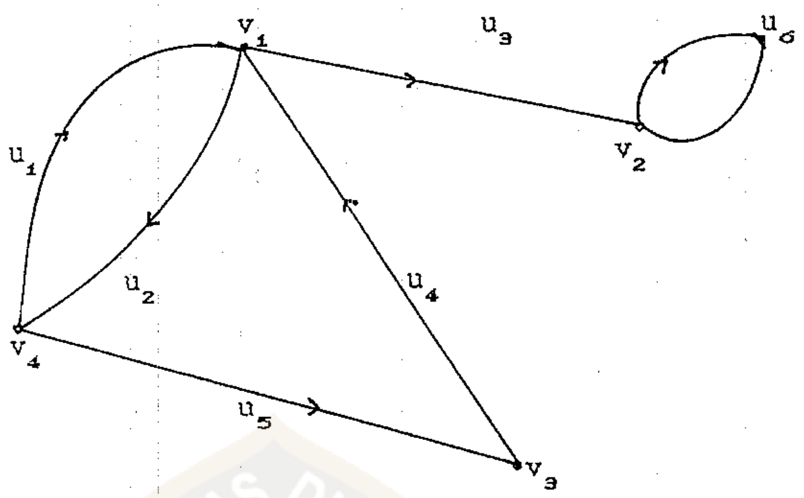


Gb.2.1.4. Graph dan komplemen graph $\overline{G}$

DEFINISI 2.1.5.

Suatu directed graph (digraph) G=(V,U) terdiri dari himpunan yang tidak kosong yang terdiri dari titik-titik $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ dan himpunan lain $U = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, yang disebut garis berarah (arc). Masing-masing arc u_k ditentukan oleh sepasang titik $(v_i,v_j) \neq (v_j,v_i)$.

Contoh



Gb.2.1.5. Digraph G=(V,U)

Terdiri dari 4 titik yaitu $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan 6 arc yaitu $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$.

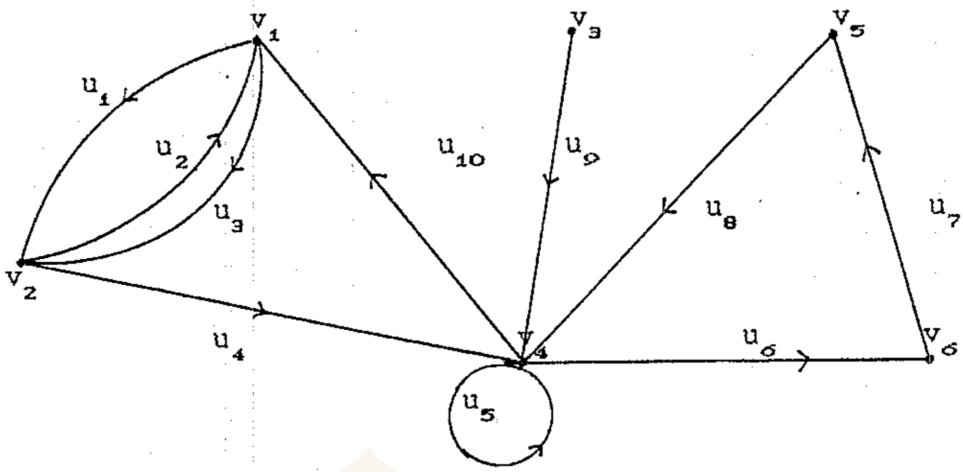
Arc $u_1=(v_4,v_1) \neq u_2=(v_1,v_4)$.

Dalam digraph satu arc yang ditentukan oleh satu garis disebut self-loop. Contoh : u_6 pada Gb.2.1.5. Selanjutnya untuk $u_k=(v_i,v_j)$, v_i merupakan titik inisial dan v_j merupakan titik terminal. Jika ada dua garis atau lebih yang mempunyai titik inisial dan titik terminal yang sama, garis-garis ini disebut arc paralel.

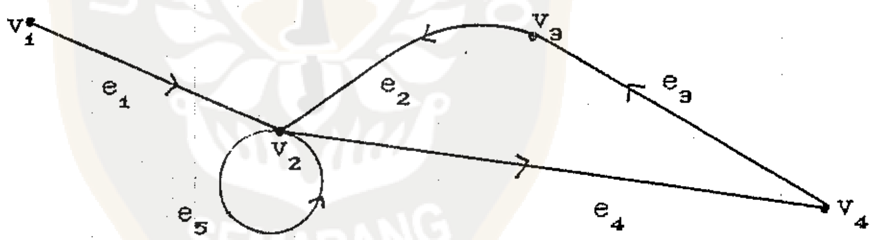
DEFINISI 2.1.6.

Suatu digraph G=(V,U) disebut p-graph jika maksimal $u_k=(v_i,v_j)$ adalah p. Sedang graph dengan p = 1 disebut 1-graph.

Contoh.



Gb.2.1.6. Adalah 2-graph karena maksimal $u_k=(v_i,v_j)$ adalah 2. yaitu $u_1=(v_1,v_2)$
$u_2=(v_1,v_2)$



Gb.2.1.7. G=(V,U) adalah 1-graph.

Suatu deretan bergantian dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik disebut walk. Jika titik dan garis itu diulang, disebut chain. Trail adalah walk yang garis-garisnya berlainan titik boleh diulang tetapi garis tidak boleh diulang. Sedangkan walk yang titik maupun garisnya tidak boleh diulang disebut path. Kecuali path tertutup (cycle) atau disebut juga sirkuit. Yaitu path dengan titik awal sama dengan titik akhir.

DEFINISI.2.1.7.

Panjang suatu path $\mu = v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ adalah k-1. (k adalah bilangan bulat positif). Titik isolasi merupakan path dengan panjang nol.

DEFINISI.2.1.8.

Panjang suatu cycle atau sirkuit $\gamma = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ adalah k. Loop juga merupakan cycle dengan panjang 1. (k merupakan bilangan bulat positif).

Contoh-contohnya dapat diambil dari Gb.2.1.7.

Chain = $v_1e_1v_2e_5v_2e_4v_4e_3v_3$

Trail = $v_1e_1v_2e_5v_2e_4v_4$

Path = $v_1e_1v_2e_4v_4e_3v_3$, mempunyai panjang 3

Cycle = $v_2e_4v_4e_3v_3e_2v_2$, mempunyai panjang 3

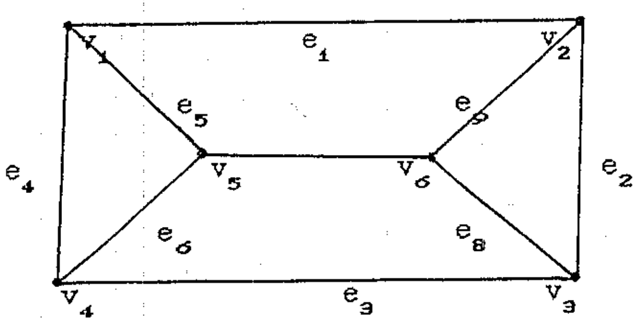
e_5 atau disebut juga loop merupakan cycle dengan panjang satu.

2.2. SUBGRAPH

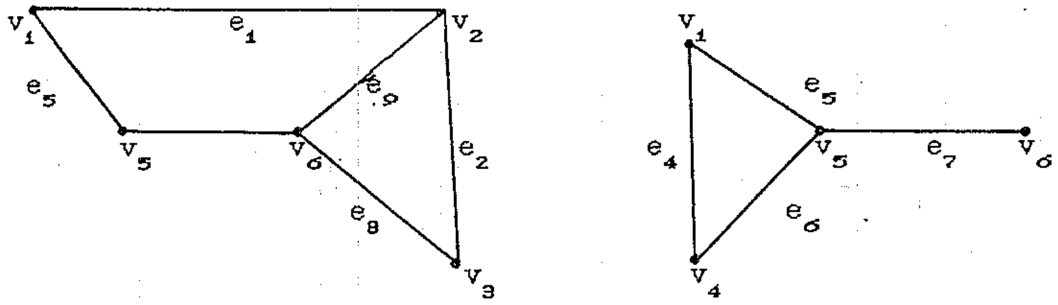
DEFINISI 2.2.1.

Suatu graph H disebut subgraph dari graph G jika semua titik dan semua garis dari H merupakan titik dan garis dari G.

Contoh.



Graph G=(V,E)



Subgraph H_1 Subgraph H_2

Gb.2.2.1. Graph G dan dua subgraphnya.

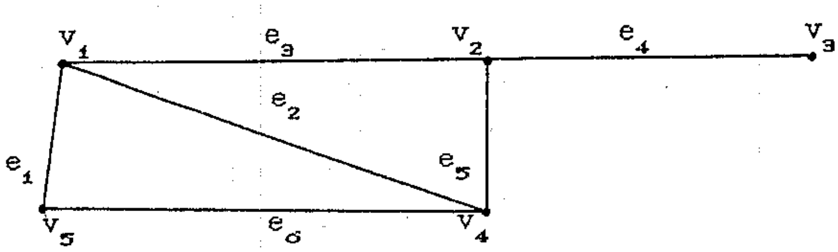
Penghapusan sebuah titik v_i dari graph G akan menghasilkan subgraph $G-v_i$ yang terdiri dari semua titik dalam G kecuali v_i dan semua garis yang tidak insiden pada v_i. Sebaliknya penghapusan garis e_j dari G menghasilkan sub-graph yang terdiri dari semua garis dalam G kecuali e_j dan semua titik dalam G. Subgraph H_1 pada Gb.2.2.1. yaitu $G-v_4$ dan subgraph H_2 $(G-\{e_1,e_2,e_3,e_8,e_9\})$.

2.3. CONNECTED GRAPH (GRAPH TERHUBUNG)

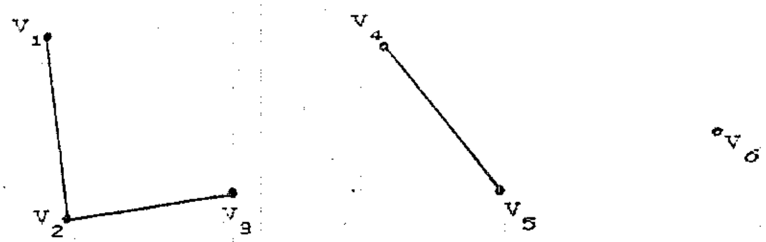
DEFINISI 2.3.1.

Graph G dikatakan terhubung (connected graph) jika antara dua titik sembarang terdapat chain yang menghubungkannya. Jika tidak demikian disebut graph tidak terhubung (disconnected graph).

Contoh.



Gb.2.3.1. Connected graph



Gb.2.3.2. Disconnected graph

DEFINISI 2.3.2.

Komponen adalah connected subgraph yang terdiri dari jumlah maksimum edge-edge.

Gb.2.3.2. adalah disconnected graph yang terdiri dari tiga komponen. Masing-masing komponen itu merupakan connected subgraph, yang tidak bisa dibagi menjadi komponen-komponen lagi. Ketiga komponen dari disconnected graph itu :

- Komponen yang terdiri dari titik-titik v_1, v_2, v_3
- Komponen yang terdiri dari titik-titik v_4, v_5
- Komponen yang terdiri dari titik v_6

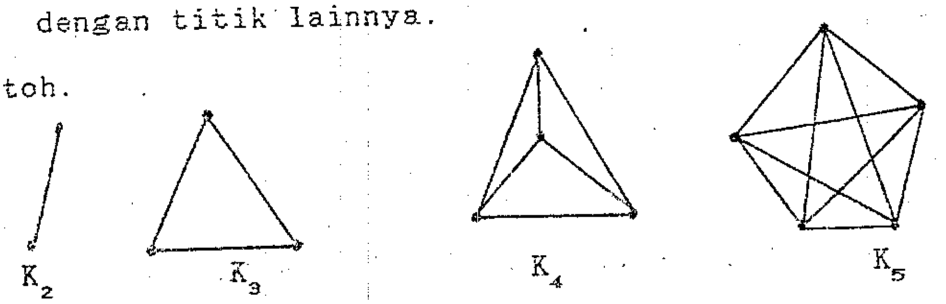
Titik isolasi juga merupakan komponen.

2.4. GRAPH LENGKAP (COMPLETE GRAPH)

DEFINISI 2.4.1.

Graph lengkap dengan p titik (K_p) adalah graph sederhana yang setiap titiknya adjacent (bertetangga) dengan titik lainnya.

Contoh.



Gb.2.4.1. Graph lengkap dengan 2,3,4, dan 5 titik.

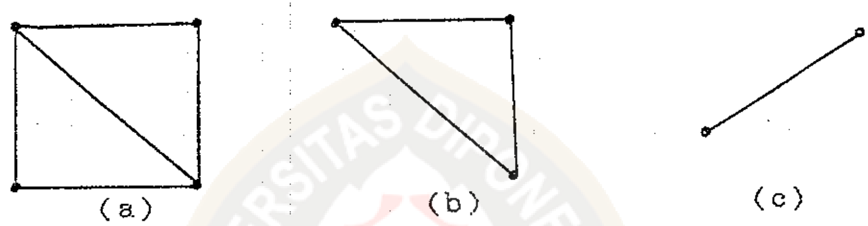
Terlihat bahwa setiap dua titik adalah adjacent.

Karena setiap titiknya adalah adjacent maka setiap titik mempunyai derajat p-1.

DEFINISI 2.4.2.

Suatu subgraph dengan n titik (H_n) disebut graph lengkap dari G jika semua titik dan garis dari H_n merupakan anggota dari G, sedemikian sehingga dipenuhi graph lengkap.

Contoh.

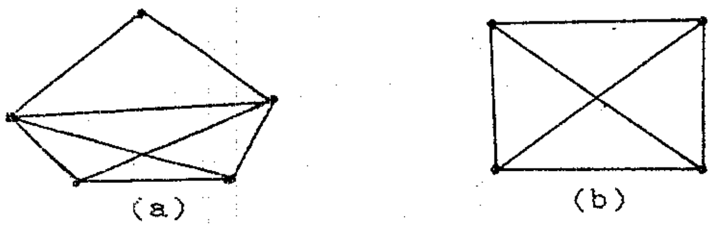


Gb.2.4.2. (b) dan (c) adalah graph lengkap dari (a)

DEFINISI 2.4.3.

Suatu graph lengkap H_m dikatakan graph lengkap terbesar dari G jika tidak terdapat H_n dalam G dengan $n > m$

Contoh.



Gb.2.4.3 (b) merupakan subgraph lengkap terbesar dari (a)

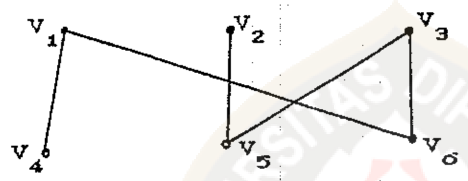
K_4 merupakan graph lengkap terbesar (H_4) dari G karena tidak terdapat H_n dengan $n > 4$

2.5. BIPARTITE GRAPH

DEFINISI 2.5.1.

Graph G disebut bipartite graph apabila himpunan titik-titik dari G dapat dipisahkan menjadi dua himpunan bebas V_1 dan V_2 sehingga garis $e \in E$ menghubungkan titik di V_1 dan titik di V_2, ditulis $G=(V_1,V_2,E)$.

Contoh.



$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$

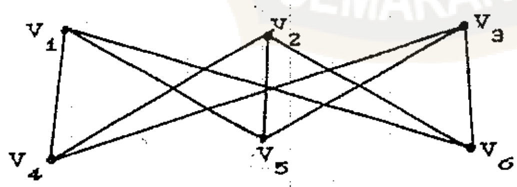
$V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$

Gb.2.5.1. Bipartite graph.

DEFINISI 2.5.2.

Jika setiap titik di V_1 adjocent dengan setiap titik di V_2 maka graphnya disebut bipartite graph lengkap.

Contoh.



Gb.2.5.2. Bipartite graph lengkap.

Bipartite graph lengkap dinotasikan sebagai $K_{m,n}$ dengan m menyatakan banyaknya titik di V_1 dan n menyatakan banyaknya titik di V_2.

Teorema 2.5.1.

Graph G dikatakan bipartite graph jika dan hanya jika setiap cyclenya mempunyai panjang genap

Bukti.

==>

Misal V_1 dan V_2 adalah himpunan bebas dari G dan C adalah cycle. Apabila C dimulai dengan menentukan titik di V_1 yaitu v_1 maka titik-titik di V_2 semuanya akan mempunyai indeks genap. Sehingga C berbentuk

$$\underbrace{\underbrace{v_1 v_2 v_3 \ldots v_{2n}}_{\text{ganjil}} \underbrace{v_{2n} v_1}_{1}}_{\text{genap}}$$

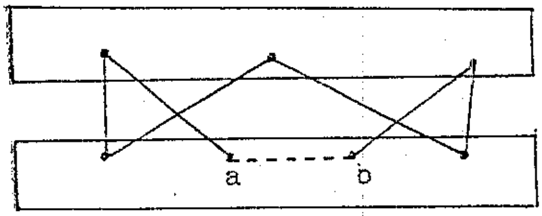
Sehinga setiap C dari G pasti mempunyai panjang genap.

<==

Diambil sembarang titik v_1 dari G. Kemudian semua titik dari G yang mempunyai path dengan panjang genap dari v_1 dikumpulkan dalam himpunan V_1 dan diberi indeks ganjil. Sedang titik lainnya dikumpulkan dalam V_2 dan diberi indeks genap. Selanjutnya akan ditunjukkan tidak ada dua titik adjocent dalam V_1, sebab jika ada dua titik yang adjocent misal v_{2n+1} dan v_3 maka :

$$\underbrace{\underbrace{v_1 v_2 v_3 \ldots v_{2n+1}}_{\text{genap}} \underbrace{v_{2n+1} v_3}_{1}}_{\text{ganjil}}$$

Sehingga cycle $v_3 v_4 \ldots v_{2n+1} v_3$ mempunyai panjang ganjil. Bertentangan bahwa cyclenya mempunyai panjang genap. Selanjutnya untuk V_2, misal titik $a,b \in V_2$ dan a adjocent dengan b



V_1

V_2

Gb.2.5.3.

g_1 adalah panjang path terpendek dari v_1 ke a dan mempunyai panjang ganjil. g_2 panjang path terpendek dari v_1 ke b yang juga mempunyai panjang ganjil. Maka panjang cycle g_1abg_2 = ganjil + ganjil + ganjil

= ganjil.

Bertentangan panjang cycle adalah genap. Maka yang benar tidak ada dua titik dalam V_2 yang adjacent. Jadi baik di V_1 dan V_2 tidak ada dua titik adjacent maka G adalah bipartite.

Dari ($\Longrightarrow$) dan ($\Longleftarrow$) terbukti teorema 2.5.1.

2.6. GRAPH REFLEKTIF, SIMETRIS DAN TRANSITIVE.

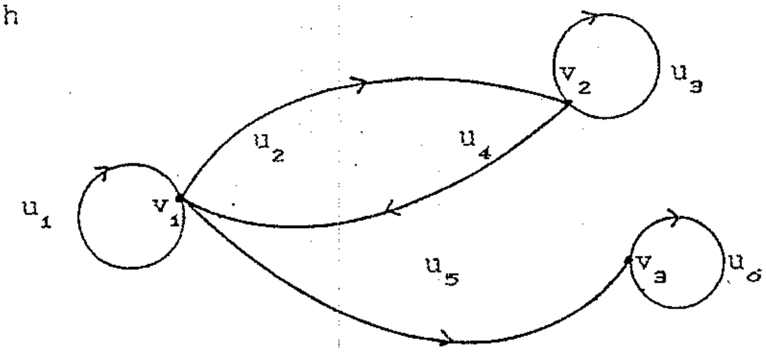
Relasi dalam graph G=(V,U) menggambarkan hubungan antara satu titik dengan titik lain dari V, yang ditunjukkan sebagai garis. Dalam graph G+(V,U) hubungan ini diberi simbol R yang ditunjukkan sebagai acr (garis berarah). sehingga G=(V,U) merupakan digraph. Atau relasi R juga merupakan kumpulan pasangan berarah $U \subset VxV$.

DEFINISI 2.6.1.

Suatu graph G=(V,U) disebut reflektif jika semua titik mempunyai loop, atau berlaku

$(\forall x \in V)(\exists u \in U), u = (x,x)$

Contoh



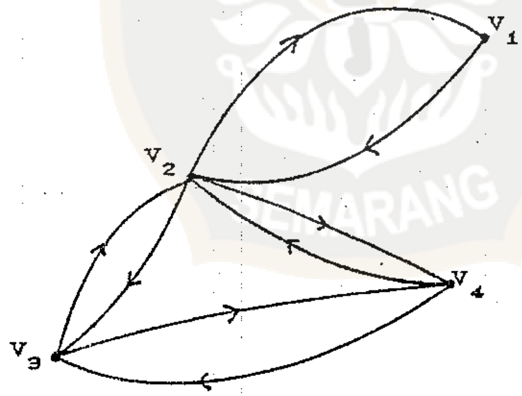
Gb.2.6.1. Graph reflektif.

DEFINISI 2.6.2.

Suatu graph G=(V,U) disebut simetris jika untuk setiap $x,y \in V$ memenuhi

$(x,y) \in U \Longrightarrow (y,x) \in U$

Contoh.



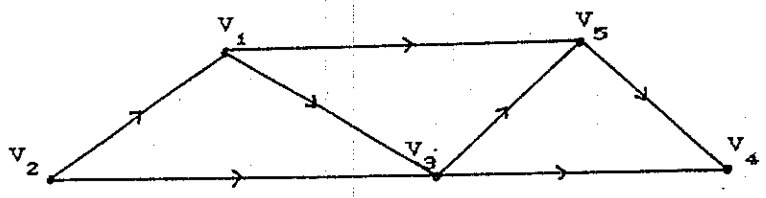
Gb.2.6.2. Graph simetris.

DEFINISI.2.6.3.

Suatu graph G=(V,U) disebut transitive jika terdapat $x,y,z \in V$ memenuhi

$(x,y) \in U,\ (y,z) \in U \Longrightarrow (x,z) \in U$

Contoh.

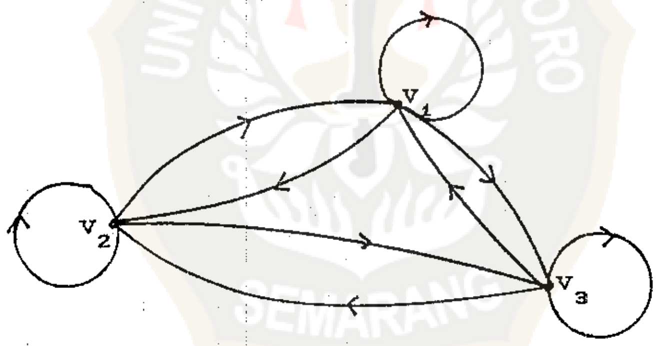


Gb.2.6.4. Graph transitive.

DEFINISI 2.6.4.

Suatu graph G=(V,U) dikatakan ekivalen jika mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitive.

Contoh.



Gb.2.6.4. Graph ekivalen.

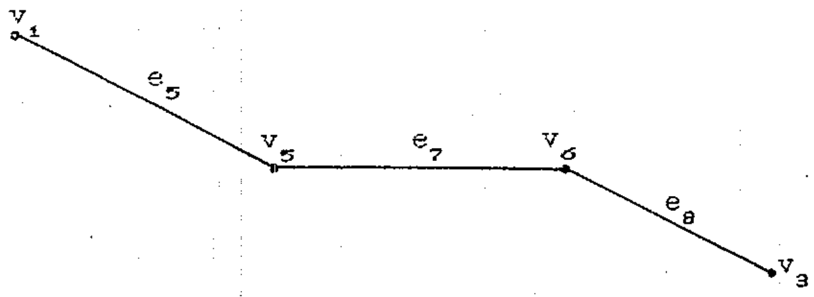
2.7. INDUCED SUBGRAPH

DEFINISI 2.7.1.

Graph $G_A=(A,E_A)$ dikatakan induced subgraph dari graph $G=(V,E)$, jika $A \subset V$ dan

$E_A = \{e = (x,y) \in E \mid x \in A \text{ dan } y \in A \}$.

Contoh.



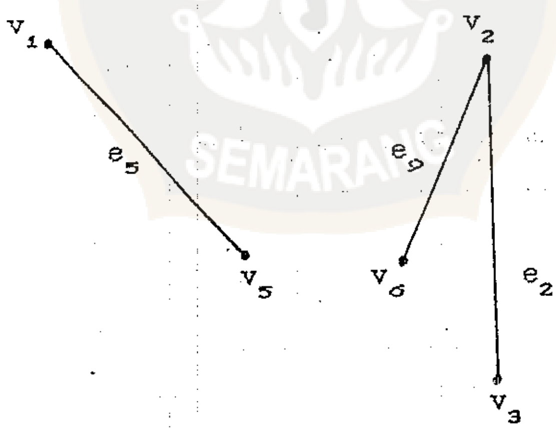
Gb.2.7.1. Induced subgraph $G_{\langle v_1, v_3, v_5, v_6 \rangle}$ dari Gb.2.2.1.

Untuk $v \in A$ berlaku $Adj_A(v) = Adj(v) \cap A$.

Dengan $Adj(v)$ merupakan himpunan titik $v \in V$ yang adjacent. Sedang $Adj_A(v)$ merupakan himpunan $v \in V \cap A$ yang adjacent.

Tidak semua subgraph dari G merupakan induced subgraph dari G.

Contoh.



Gb.2.7.2.

Subgraph dari G pada Gb.2.2.1 tetapi bukan merupakan induced subgraph. Karena tidak terdapat edge yang menghubungkan titik v_5 dan v_6, v_1 dan v_2, v_3 dan v_6.

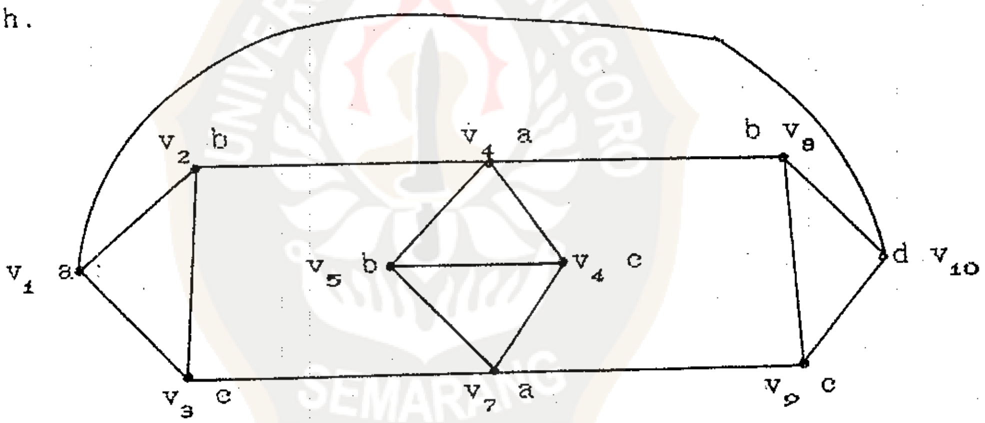
2.8. BILANGAN KROMATIK

Apabila diberikan suatu graph G yang terdiri dari n titik. Untuk mewarnai titik-titik tersebut sedemikian sehingga tidak ada dua titik bertetangga (adjacent) mempunyai warna sama. Hal ini disebut pewarnaan (coloring).

DEFINISI 2.8.1.

Bilangan kromatik adalah banyaknya warna paling sedikit yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik dari graph G agar tidak ada dua titik bertetangga mendapat warna yang sama.

Contoh.



Gb. 2.8.1.

Complete subgraph terbesar dari Gb.2.8.1. adalah segitiga. Dari segitiga tersebut bisa dibentuk pewarnaan dengan 3 warna. Ambil segitiga $v_4v_5v_6$. Misal v_4 diwarnai dengan warna a, v_5 dengan warna b, dan v_6 dengan warna cUntuk segitiga $v_5v_6v_7$, v_7 adjacent dengan v_5 dan v_6, yang masing-masing berwarna b dan c. Maka v_7 diwarnai dengan a. v_2 dan v_3 masing-masing adjacent dengan v_4 dan v_7 yang keduanya berwarna a. Ambil warna b untuk mewarnai v_2

sehingga v_3 diwarnai dengan c, v_1 dengan a, v_8 dengan b dan v_9 dengan c. Karena v_1 dan v_{10} adjacent maka diambil warna lain untuk v_{10} yaitu d.

Jadi bilangan kromatik dari Gb.2.8.1. adalah 4.

DEFINISI 2.8.2.

Apabila banyaknya macam warna yang dapat untuk melakukan pewarnaan pada graph G adalah k.

Jika $\chi(G) \leq k$, graphnya disebut terwarnai k

Jika $\chi(G) = k$, graphnya disebut k-kromatik.

Contoh.

Gb.2.8.1. Graphnya 4-kromatik sebab $\chi(G) = 4$. Dan dapat disebut terwarnai 4 atau terwarnai 5. Karena dengan 4 atau 5 pewarnaan dapat dilakukan.

Untuk graph lengkap dengan n titik (K_n) maka $\chi(K_n)=$ n sebab setiap titik dalam K_n bertetangga dengan titik lainnya sehingga setiap titik harus mempunyai warna yang berbeda.

Teorema 2.8.1.

Misal G=(V,E) suatu graph sederhana dan $\Delta(G)$ adalah derajat tertinggi dari titik-titik dari G maka

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bukti.

Teorema akan dibuktikan dengan hipotesa induksi.

Anggap teorema benar untuk graph yang mempunyai n titik.

Untuk n=1 maka G mempunyai 1 titik dan tidak mempunyai garis. $\Delta(G)=0$ dan $\chi(G)=1$. Jadi memenuhi $\chi(G)\leq \Delta(G)+1$.

Untuk graph yang mempunyai n-1 titik, akan dibuktikan bahwa teorema benar. Misal x adalah titik sembarang dalam G. Dan $G'=G_{V-\langle x\rangle}$ merupakan graph G tanpa garis yang insiden dengan titik x. Maka G′ adalah graph dengan n-1 titik sehingga menurut hipotesa induksi G′ memenuhi

$$\chi(G') \le \Delta(G')+1$$

dan karena $\Delta(G') \le \Delta(G')$

maka diperoleh $\chi(G') \le \Delta(G)+1$

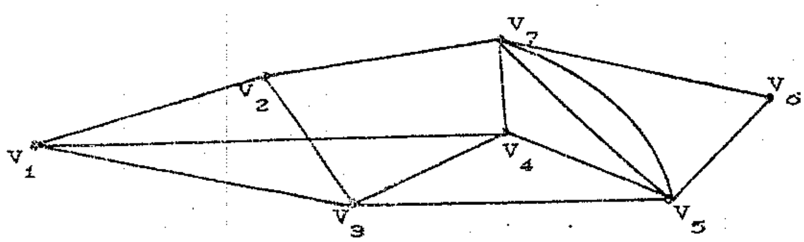
Ambil pewarnaan dari G′ dengan $\Delta(G)+1$ warna. Misal $y_1, y_2, \ldots, y_k$ adalah titik-titik dari G yang adjacent dengan x maka $k \le \Delta(G)$. Jadi dalam pewarnaan G′, satu dari $\Delta(G)+1$ warna, misal warna a, tidak digunakan pada pewarnaan titik-titik $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Bila proses ini diperluas dari G′ ke G dengan mewarnai titik x dengan warna a, maka diperoleh pewarnaan dengan $\Delta(G)+1$ warna. Jadi $\chi(G) \le \Delta(G)+1$.

2.9. BILANGAN STABLE

Himpunan $S \subset V$ dari graph $G=(V,E)$ dikatakan stable jika tidak ada dua titik dari S yang bertetangga. Diberikan ζ adalah keluarga semua himpunan stable dari graph G.

Bilangan stable terbesar dari keluarga himpunan stable maka $\alpha(G) = \max_{S \in \zeta} |S|$

Contoh



Gb.2.9.1. Graph G=(V,E)

S_i adalah himpunan stable dari G.

$S_1 = \{v_1, v_7\}$

$S_2 = \{v_1, v_6\}$

$S_3 = \{v_1, v_5\}$

$S_4 = \{v_2, v_4\}$

$S_5 = \{v_2, v_5\}$

$S_6 = \{v_2, v_6\}$

$S_7 = \{v_3, v_6\}$

$S_8 = \{v_3, v_7\}$

$S_9 = \{v_4, v_6\}$

$S_{10} = \{v_2, v_4, v_6\}$

$\zeta = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$

Jadi $\alpha(G) = \text{Max } \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$

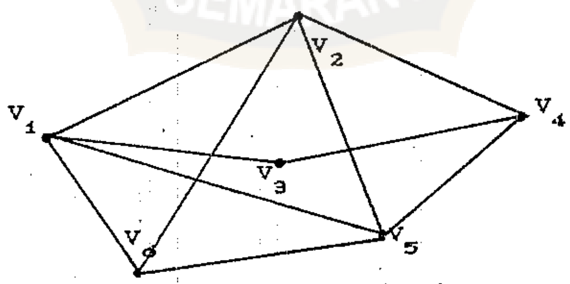
$= 3.$

2.10. CLIQUE (KLIK) DAN CLIQUE COVER NUMBER

DEFINISI 2.10.1.

Himpunan C ($C \subset V$) dari graph $G=(V,E)$ dikatakan clique jika setiap dua titik yang berbeda dalam C adalah adjocent. Himpunan C dalam m titik adalah m-clique dan ditulis C_m.

Contoh.



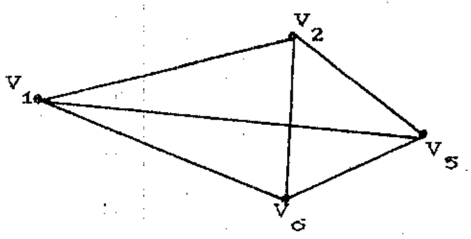
Gb.2.10.1. Graph $G=(V,E)$ dengan

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Ambil $C=\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$

$C \subset V$

Kalau C digambarkan menjadi graph lengkap dengan 4 titik menjadi:



Gb.2.10.2. 4-clique (C_4) dari graph G pada Gb.2.10.1.

Sebuah titik tunggal dikatakan 1-clique.

DEFINISI 2.10.2.

Suatu clique C_m dari G dikatakan maksimum jika tidak ditemukan clique C_n dalam G, dengan n>m. Clique number dari G ($\omega(G)$) adalah jumlah titik dalam clique maksimum.

Contoh.

Gb.2.10.2. adalah clique maksimum dari graph pada gb.2.11.1. Dan $\omega(G)=4$ karena clique maksimum tersebut terdiri dari 4 titik.

DEFINISI 2.10.3.

Apabila titik-titik dalam G=(V,E) dapat dibagi menjadi clique-clique dimana $V=C_1+C_2+...+C_k$, yaitu $C_i(i=1,2,,...,k)$ adalah clique. Maka clique cover number ($k(G)$) adalah pembagian minimum dari V menjadi clique-clique.

Contoh.

Pada Gb.2.10.1. $V = C_1+C_2$

$C_1=\{v_1,v_2,v_5,v_6\}$

$C_2=\{v_3,v_4\}$

Jadi clique cover number dari G, $k(G)=2$

2.11. POHON (TREE)

Struktur tree adalah salah satu bentuk khusus dari suatu graph. Misal diberikan suatu connected graph, maka terdapat chain yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda.

DEFINISI 2.11.1.

Tree (pohon) adalah suatu connected graph sederhana yang tidak mempunyai cycle.

Contoh.

Gb.2.11.1. Suatu graph yang merupakan tree

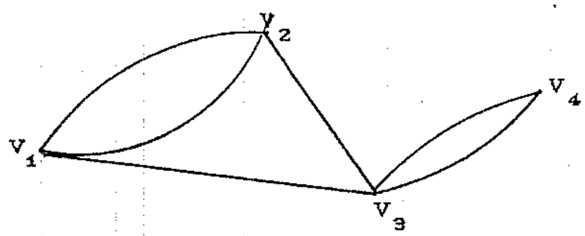
Setiap pasang titik pada tree hanya dihubungkan oleh satu lintasan, maka tree tidak mungkin mempunyai cycle.

2.12. HIMPUNAN ARTIKULASI.

DEFINISI 2.12.1.

Jika G=(V,E) adalah connected graph, himpunan A yang anggotanya adalah titik-titik dalam G ($A \subset V$) dikatakan himpunan artikulasi apabila subgraph dari G yang dihasilkan dari titik-titik V-A (G_{V-A}) adalah disconnected. Himpunan artikulasi dengan titik tunggal disebut titik artikulasi.

Contoh.



Gb.2.12.1.Connected graph G=(V,E)

$A=\{v_1, v_3\}$ adalah himpunan artikulasi. Graph G diambil titik v_1, v_3 (G_{V-A}) merupakan disconnected graph.

$A=\{v_3\}$ adalah titik artikulasi.

Graph G tanpa titik v_3 (G_{V-A}) merupakan subgraph yang tidak connected.