BAB. II

TEORI PENUNJANG

2.1 HIMPUNAN, GRAPH DAN RELASI

2.1.1 Himpunan, Relasi dan Fungsi

Himpunan adalah sekelompok obyek-obyek yang berada dalam satu kesatuan dan yang mempunyai sifat keterikatan diantara anggota-anggotanya. Jika A suatu himpunan dan x adalah elemen/anggota dari A maka dapat ditulis :

$$x \in A.$$

Apabila x bukan anggota dari A, maka ditulis $x \notin A$. Kemudian bila dituliskan himpunan {a,b,c}, ini berarti himpunan tersebut mempunyai elemen a,b dan c. Selain itu jika dituliskan himpunan $\{x/x$ punya sifat P$\}$, hal ini berarti himpunan yang beranggotakan x sedemikian hingga x mempunyai sifat P.

Definisi 2.1.1.1

Dua himpunan A dan B dikatakan sama ($A = B$) bila dan hanya bila untuk setiap anggota A adalah anggota B, dan untuk setiap anggota B adalah anggota A. Atau dapat ditulis

$$A=B \text{ bhb untuk setiap } x,\ x \in A \text{ bhb } x \in B.$$

Definisi 2.1.1.2

Misalkan A dan B adalah himpunan, dikatakan A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B bila dan hanya bila untuk setiap anggota A adalah anggota B, dinotasikan $A \subseteq B$.

Definisi 2.1.1.3

Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong dengan notasi $\emptyset$, dan untuk setiap himpunan A maka $\emptyset \subseteq A$.

Definisi 2.1.1.4

Misalkan A dan B himpunan, perkalian dari A dan B, dinotasikan $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan berurutan (a,b) sedemikian hingga $a \in A$ dan $b \in B$, atau

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Contoh 2.1.1.1

Diberikan $A = \{\underline{a}, \underline{b}\}$ dan $B = \{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$, maka

$$A \times B = \{(\underline{a},\underline{x}),(\underline{a},\underline{y}),(\underline{a},\underline{z}),(\underline{b},\underline{x}),(\underline{b},\underline{y}),(\underline{b},\underline{z})\}$$

Analog dengan definisi diatas apabila C himpunan, maka $A \times B \times C = \{ (a,b,c) / a \in A \text{ dan } b \in B \text{ dan } c \in C \}$. Disamping itu $A \times A = A^2 = \{(a_1, a_2) / a_1 \in A \text{ dan } a_2 \in A\}$.

Definisi 2.1.1.5

Union dari himpunan A dan B dinotasikan $A \cup B$, adalah himpunan yang anggotanya merupakan gabungan dari anggota-anggota A dan anggota-anggota B, atau dapat ditulis

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

Definisi 2.1.1.6

Interseksi dari himpunan A dan B dinotasikan $A \cap B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A sekaligus merupakan anggota B, atau ditulis

$$A \cap B = \{x / \ x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

Definisi 2.1.1.7

Diberikan V adalah himpunan yang beranggotakan huruf-huruf (letter). V^+ adalah himpunan dari semua kata yang mungkin dibentuk dari huruf-huruf anggota V. Anggota dari himpunan V^+ ini disebut *string*.

Contoh 2.1.1.2

Diberikan V = (a,b,c), maka

V^+ = {a,b,c,aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc,aaa,aab, aac,aba, abb,abc,aca,acb,acc,baa,bab,bac,bba, ,ccc, ..., aaaa, ... }

Definisi 2.1.1.8

Misalkan A dan B himpunan, relasi dari A ke B merupakan subset dari AxB.

Definisi 2.1.1.9

Sebuah fungsi dari A ke B ditulis $f : A \longrightarrow B$, merupakan relasi f dari A ke B sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ ada satu dan hanya satu $b \in B$, sehingga $(a,b) \in f$. Himpunan A disebut domain dan himpunan B disebut *range* dari f.

Untuk $(a,b)\in f$, dikatakan b adalah nilai (value) dari f untuk a dan $f(a)=b$. Sebagai contoh $A=\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$, $B=\{\underline{p},\underline{q},\underline{r},\underline{s}\}$, dan $f=\{(\underline{a},\underline{q}),(\underline{b},\underline{q}),(\underline{c},\underline{s})\}$, maka f adalah fungsi dari A ke B dengan $f(\underline{a})=\underline{q}$, $f(\underline{b})=\underline{q}$, dan $f(\underline{c})=\underline{s}$.

Beberapa sifat yang penting dari fungsi :

1. Bila $f : A \longrightarrow B$ mempunyai sifat untuk setiap $b\in B$ adalah mungkin untuk menjadi hasil dari f, maka f adalah *surjective* atau onto. Atau yang lebih formal dikatakan, $f : A \longrightarrow B$ surjective bila hanya bila untuk setiap $b\in B$ ada $a\in A$ sehingga $f(a)=b$.
2. Fungsi $f : A \longrightarrow B$ adalah satu-satu atau *injective* bhb untuk setiap a dan $a'\in A$, jika $a\neq a'$, maka $f(a)\neq f(a')$.
3. Jika $f : A \longrightarrow B$ adalah satu-satu dan onto maka f disebut *bijective*.

Definisi 2.1.1.10

Diberikan himpunan {T,F} adalah himpunan yang beranggotakan nilai-nilai logika, yaitu T yang berarti benar dan F yang berarti salah. Jika A suatu himpunan, maka fungsi $p : A \longrightarrow \{T,F\}$ disebut *predikat* pada A.

Contoh 2.1.1.3

Diberikan suatu predikat p pada ω (himpunan bilangan cacah) yang ditentukan sebagai berikut :

$$p(n) = \begin{cases} T & \text{jika n genap} \\ F & \text{jika n ganjil} \end{cases}$$

dengan $p(n)=$ "n modulo 2=0", yaitu p adalah predikat yang menguji apakah n modulo 2 sama dengan 0, untuk $n \in \omega$. Bila n genap, maka pernyataan n modulo 2=0 bernilai benar sehingga $p(n)$=T, sedangkan bila n ganjil, maka n modulo 2=1, sehingga $p(n)$=F

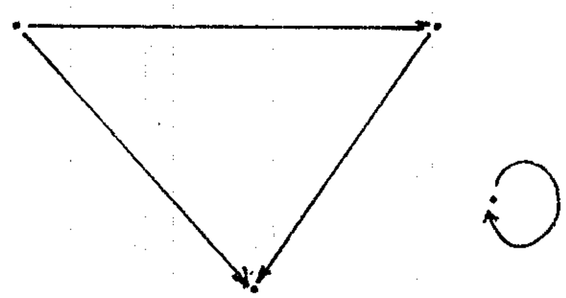
2.1.2 Relasi sebagai Graph

Definisi 2.1.2.1

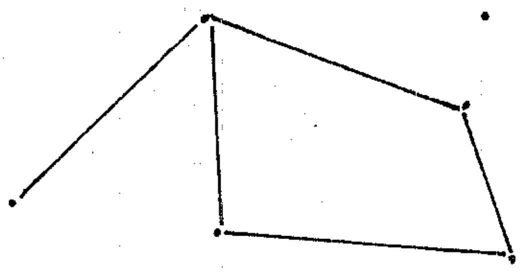
Suatu graph G adalah himpunan pasangan berurutan (V,E), dengan V merupakan himpunan titik-titik yang tidak kosong ($V \neq \emptyset$) dan berhingga, dan E merupakan himpunan berhingga garis-garis . Setiap garis terletak antara dua titik yang boleh sama.

Suatu graph yang garis-garisnya mempunyai jurusan/arah disebut *directed graph* (graph berarah), sedangkan graph yang garis-garisnya tidak mempunyai arah disebut *undirected graph*.

Contoh 2.1.2.1



Gambar 2.1.2.1 Directed Graph



Gambar 2.1.2.2 Undirected Graph

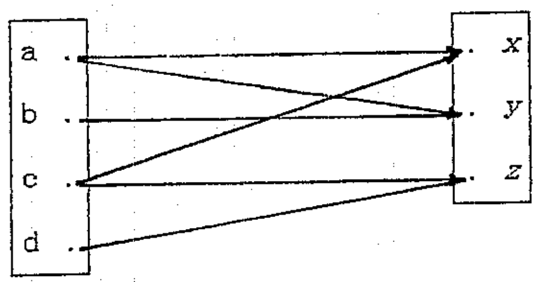
Definisi 2.1.2.2

Suatu graph G=(V,E) disebut *bipartite graph* jika himpunan titik V dapat dipisahkan dalam dua himpunan V_1 dan V_2 yang saling asing dan tidak kosong, sedemikian sehingga tidak ada garis dalam E yang menghubungkan dua titik di V_1 atau dua titik di V_2.

Suatu relasi *R* dari himpunan *A* ke himpunan *B* yang merupakan subset dari *A*x*B*, dapat digambarkan sebagai bipartite graph. Yaitu dengan menuliskan elemen-elemen *A* pada suatu kelompok dan elemen-elemen *B* pada kelompok lain dengan tanda titik untuk setiap elemen. Untuk semua $m \in A$ dan $n \in B$, apabila $(m,n) \in R$, maka dapat digambarkan dengan anak panah dari m ke n.

Contoh

Diberikan *A*={a,b,c,d), *B*={x,y,z} dan R = {(a,*x*),(a,*y*),(b,*y*),(c,*x*),(c,*z*),(d,*z*)}, maka R dapat digambarkan sebagai bipartite graph seperti berikut :



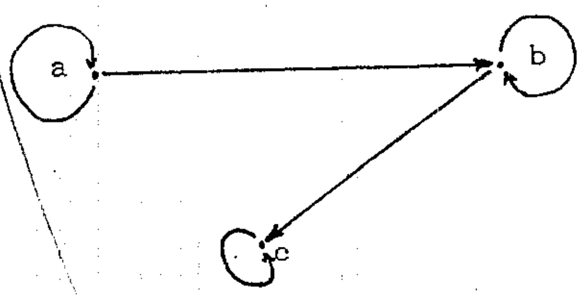
GAMBAR 2.1.2.1.

Untuk menggambarkan relasi R dari himpunana A ke himpunan A sendiri sebagai directed graph, dapat dibuat dengan menggambarkan titik pada masing-masing elemen dari A, kemudian untuk semua $x,y \in A$, apabila $(x,y) \in R$, maka digambarkan sebuah anak panah dari titik x ke titik y. Titik-titik tersebut dinamakan *node* atau *vertice* dan panah dinamakan *edge*.

Jika x suatu node, maka jumlah panah ke x disebut "*in-degree*", dan jumlah panah yang keluar dari x disebut "*out-degree*".

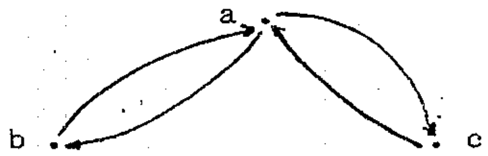
Berikut ini adalah beberapa sifat dari relasi :

1. Relasi R *reflexive* bhb untuk setiap $a \in A$, pasangan $(a,a) \in R$. Ini berarti bila digambarkan suatu directed graph yang bersesuaian untuk R, maka ada perputaran ke dirinya sendiri untuk tiap titik/node. Misal $A = \{a,b,c\}$ dan $R = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.



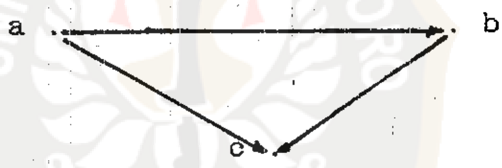
GAMBAR 2.1.2.1.

2. Relasi R *symetris* bila hanya bila untuk $(a,b)\in R$ maka $(b,a)\in R$, atau dapat dikatakan bila ada panah dari a ke b maka ada panah dengan arah dari b ke a.



GAMBAR 2.1.2.3.

3. Relasi R adalah *transitif* bhb untuk setiap $a,b,c\in A$, apabila $(a,b)\in R$ dan $(b,c)\in R$, maka $(a,c)\in R$. Dapat digambarkan sebagai berikut



GAMBAR 2.1.2.4.

Definisi 2.1.2.

Diberikan $R \subseteq A\times A$ suatu relasi. Suatu *lintasan* dari a ke b dalam R adalah suatu barisan

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$$

sedemikian sehingga

(i). $n \geq 1$

(ii). untuk masing-masing i, $a_i \in A$

(iii). $a_0 = a$, $a_n = b$

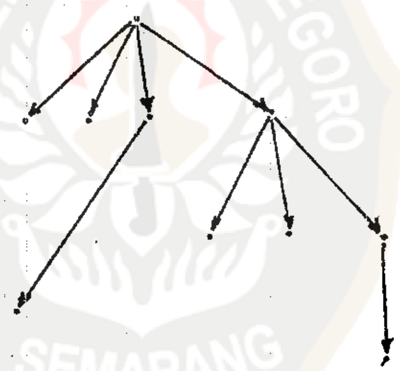
(iv). untuk masing-masing i sedemikian sehingga $0 \leq i < n$, maka $(a_i, a_{i+1}) \in R$

Panjang lintasan adalah n. Jika $a_o = a_n$, maka dikatakan lintasannya suatu *cycle*. Suatu graph yang tidak punya cycle disebut graph yang *acyclic*.

2.1.3. TREE

Definisi 2.1.3.1

Suatu tree adalah directed graph $R \subseteq A \times A$ yang acyclic dan berhingga, yang mempunyai sebuah node (dinamakan *root*) dengan in-degree 0 dan untuk setiap node yang lain mempunyai in-degree 1. Suatu node dalam suatu tree yang mempunyai out-degree 0 disebut *leaf*.



Gambar 2.1.3.1 Gambar tree

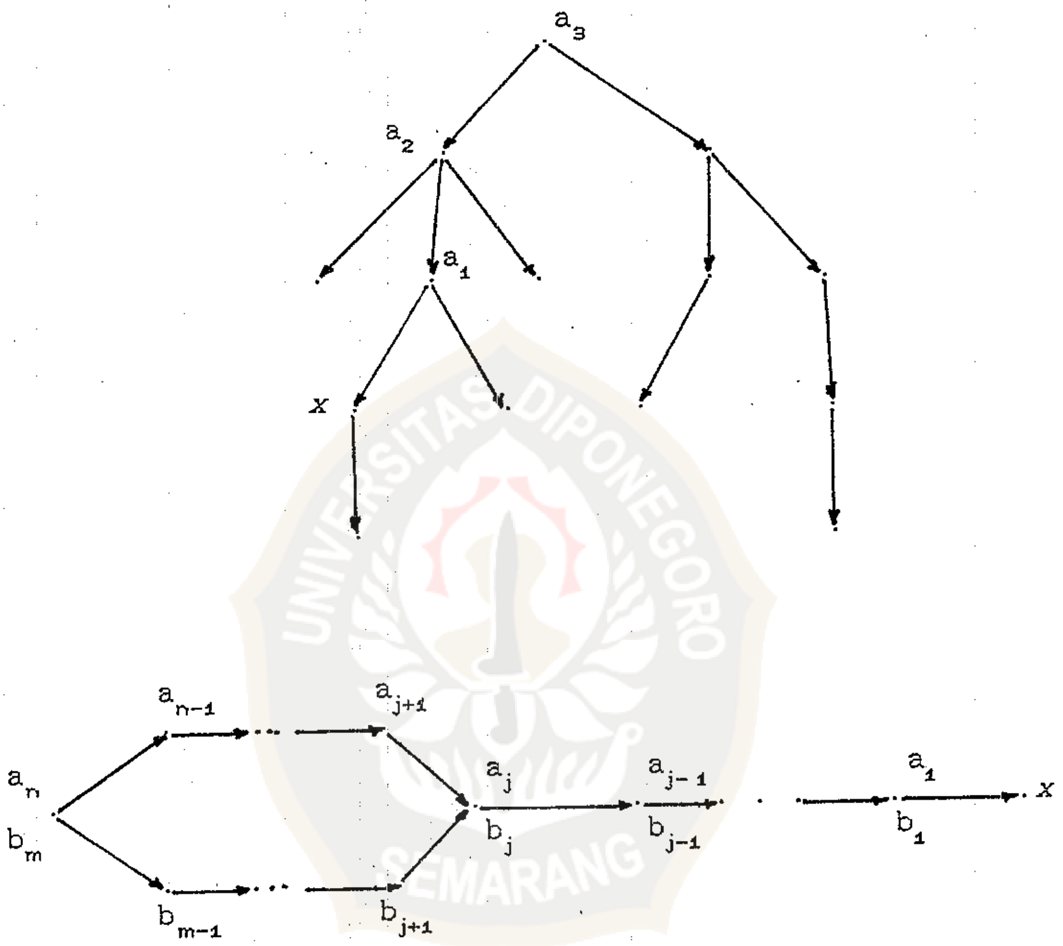
Theorema 2.1.3.1

Jika $R \subseteq A \times A$ adalah suatu tree, $x \in A$ dan x bukan root dari R, maka terdapat tepat satu lintasan dari root ke x dalam R.

<u>Bukti</u>:

Langkah pertama disusun sebuah lintasan dari root ke x (gambar 2.1.3.2). Karena x bukan root, maka x punya in-degree 1 sehingga ada lintasan $\langle a_1, x\rangle$. Kemudian diassumsikan ada susunan lintasan $\langle a_{n-1}, \ldots, x\rangle$. Jika a_{n-1}

bukan root, maka in-degree dari a_{n-1} adalah 1 , sehingga terdapat panah $(a_n, a_{n-1}) \in R$. Dengan demikian $\langle a_n, a_{n-1}, \ldots, x\rangle$ adalah lintasan dalam R.



GAMBAR 2.1.3.2

Sekarang a_n dianggap sebagai root, kemudian andaikan ada dua lintasan $\langle a_n, a_{n-1}, \ldots x\rangle$ dan $\langle b_m, b_{m-1}, \ldots, x\rangle$ dengan $a_n = b_m =$ root (gambar 2.1.3.2). Maka terdapat j sedemikian sehingga $a_{j+1} \neq b_{j+1}$, dan $a_j = b_j$, $a_{j-1} = b_{j-1}, \ldots, a_1 = b_1$. Karena $(a_{j+1}, a_j) \in R$ dan $(b_{j+1}, a_{j+1}) \in R$, maka a_j mempunyai in-degree 2, sehingga kontradiksi dengan asumsi bahwa R merupakan tree.

2.2. INDUKSI DAN APLIKASINYA

2.2.1. Induksi Matematika

Induksi matematika dapat didefinisikan sebagai berikut : Pandang barisan pernyataan $P_0, P_1, \ldots, P_j, P_{j+1}, \ldots$. Jika "P_k benar", dan untuk setiap bilangan bulat positif j yang lebih besar atau sama dengan k, "jika P_j benar, maka P_{j+1} benar", maka P_n benar untuk semua bilangan bulat $n \geq k$. Untuk lebih jelasnya dapat ditulis

$$P_k \text{ benar, untuk } k \geq 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\text{jika } P_j \text{ benar, maka } P_{j+1} \text{ benar, untuk } j \geq k \qquad \text{(ii)}$$

kemudian dapat disimpulkan

$$P_n \text{ benar, untuk semua } n \geq k \qquad \text{(iii)}$$

Pernyataan (i) merupakan *langkah dasar*, pernyataan (ii) merupakan *langkah induksi*, dan pernyataan "P_j benar" merupakan *hipotesis induksi*.

Aturan pokok Induksi :

Pandang p predikat pada ω. Jika

(i). $p(0)$ = benar

(ii). untuk setiap j, jika $p(j)$ = benar, maka $p(j+1)$ = benar

maka $p(n)$=benar untuk setiap n.

Anggap (i) dan (ii) memenuhi, maka $p(0)$ = benar. Karena $p(0)$ benar, dengan (ii) didapat $p(1)$ = benar. Karena $p(1)$ = benar, maka dengan (ii) $p(2)$ = benar dan seterusnya. Sehingga untuk menunjukkan bahwa $p(n)$ selalu benar untuk setiap predikat p, hanya perlu ditunjukkan :

(i). $p(0)$=benar (langkah dasar)

(ii). jika $p(j)$ = benar maka $p(j+1)$ = benar (langkah induksi)

Dalam hal ini $p(j)$ disebut *hipotesis induksi* (HI), dan dalam langkah induksi, tidak perlu mengambil $p(j)$ untuk semua nilai j.

Contoh 2.2.1.1

Untuk setiap $n \in \omega$ maka $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bukti :

Pandang $p(k)$ = benar untuk n=k.

*). Langkah dasar

$p(0)$ = benar $\longrightarrow$ $0 = 0 \times 1/2 = 0$

**). Langkah induksi

Akan ditunjukkan bahwa bila $p(k)$ = benar maka $p(k+1)$ = benar.

$$
\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+k+(k+1) &= (0+1+\ldots+k) + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1), \text{ dengan HI} \\
&= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

sehingga $p(k+1)$ = benar.

2.2.2. Pendefinisian Himpunan dengan Stage (Pangkalan)

Dalam bahasan ini akan dibahas bagaimana menyusun himpunan-himpunan yang rumit dari yang sederhana. Telah diketahui beberapa metode mengkombinasi himpunan seperti pada bahasan sebelumnya yaitu perkalian, union dan interseksi.

Operasi perkalian, union dan interseksi merupakan operasi biner yaitu mengkombinasikan dua himpunan untuk mendapatkan himpunan yang baru. Sekarang akan dibahas union dari n himpunan sebagai berikut :

$$A_1 \cup, \ldots, \cup A_n = \{x / \text{untuk } i \in \{1, \ldots, n\}, x \in A_i\}$$

Bila I suatu himpunan dan untuk setiap $i \in I$, maka union dari A_i dapat ditulis $\cup_{i \in I} A_i$ atau $\cup\{a_i / i \in I\}$ yang sama dengan $\{x/\text{untuk } i \in \{1, \ldots, n\}, x \in A_i\}$. Pandang untuk $j \in I$, $A_j \subseteq \cup_{i \in I} A_i$, jika $A_j \subseteq B$ untuk setiap j, maka $(\cup_{i \in I} A_i) \subseteq B$.

Salah satu yang paling umum dalam menyusun himpunan yang rumit adalah sebagai union dari himpunan-himpunan A_i untuk $i \in \omega$. Dimulai dari himpunan sederhana A_o, untuk membentuk himpunan yang lebih lengkap A_k. Kemudian diambil union dari semua A_i.

Contoh 2.2.2.1

Diberikan $A_k = \{2j / j \in \omega \,\&\, 0 \le j \le k\}$ untuk semua $k \in \omega$ (ω himpunan bilangan cacah). Akan ditentukan $\cup_{k \in \omega} A_k$ seperti berikut

$A_o = \{0\}$ untuk j=0

$A_1 = \{0,2\}$ untuk j=0,1

$A_2 = \{0,2,4\}$ untuk j=0,1,2

$A_3 = \{0,2,4,6\}$ untuk j=0,1,2,3 dan seterusnya.

Dengan demikian , $\cup_{k \in \omega} A_k = \{2x / x \in \omega\}$. Karena nilai k tak terbatas, maka notasi $\cup_{k \in \omega} A_k$ dapat diganti dengan A.

Dalam masalah ini dapat didefinisikan A_k secara lebih jelas yaitu

$$A_k = \{2x / x \in \omega \text{ dan } x \le k\}.$$

Masing masing A_k adalah bagian dari A yang terbatas pada k. Untuk mendapatkan A cukup dengan menghilangkan batas, dengan demikian $A = \{2x / x \in \omega\}$, dan variabel k tidak muncul lagi.

Jadi himpunan $A_k = \{2j/j\in\omega \& 0\le j\le k\}$ untuk semua $k\in\omega$ adalah sama dengan himpunan $A = \{2x/x\in\omega\}$.

2.2.3. Pendefinisian Himpunan dengan Induksi

Definisi 2.2.3.1

Diberikan himpunan U, $f: U \longrightarrow U$ dan $S\subseteq U$, dikatakan S *tertutup dalam f* bila hanya bila, jika $x\in S$ maka $f(x)\in S$.

Pandang himpunan U $(\omega x\omega)$ dengan ω adalah himpunan bilangan cacah. Seperti pada bahasan sebelumnya suatu operasi dimulai dengan himpunan $A_o\subseteq U$, kemudian dibentuk $A_{k+1} = A_k \cup \{f(x)/x\in A_k\}$ untuk semua $f: U \longrightarrow U$, sehingga pada akhirnya menghasilkan $A = \cup_{k\in\omega} A_k$ (gabungan dari semua $A_{i\in k}$). Karena himpunan A subset dari U, maka himpunan A adalah *tertutup dalam f* seperti definisi diatas.

Pada umumnya, suatu himpunan U dan $f: U \longrightarrow U$; akan terdapat banyak subset dari U yang tertutup dalam f. Himpunan kosong selalu tertutup dalam f, tetapi dalam hal ini himpunan kosong ini tidak penting karena tidak mengandung anggota.

Selain himpunan A yang memuat A_o, biasanya terdapat banyak subset- subset S dari U dengan $A_o\subseteq S$ dan S tertutup dalam f.

Contoh 2.2.3.1

Diberikan $U = \omega x\omega$

$f = \{(x+1, y+2)/(x, y)\in\omega x\omega\}$

$A_o = \{(0,0)\}$

Dengan stage $A_o=\{(0,0)\}$ dapat dibentuk $A=\{(x,2x)\}$ yang tertutup dalam f. Masing-masing subset dari $\omega x\omega$ berikut adalah tertutup dalam f dan memuat A_o sebagai subset :

(i). $\{(x,2x)/x\in\omega\}$

(ii). $\{(x,2x)/x\in\omega\} \cup \{(x,2x+5)/x\in\omega$ dan $x\geq 3\}$

(iii). $\{(x,2x)/x\in\omega\} \cup \{(x,2x+5)/x\in\omega$ dan $x\geq 2\} \cup$
$\{(x,2x-5)/x\in\omega$ dan $x\geq 3\}$

Diantara subset-subset dari $\omega x\omega$, himpunan A yang dibentuk dengan stage mempunyai sifat khusus yaitu merupakan subset dari subset-subset $\omega x\omega$ yang lain. Dengan kata lain himpunan A merupakan subset terkecil dari U yang memuat A_o sebagai subsetnya dan tertutup dalam f.

Theorema 2.2.3. (Teori Fundamental Induksi)

Diberikan U himpunan, $C\subseteq U$, dan $f : U \longrightarrow U$.

$$A_o = C$$
$$A_{k+1} = A_k \cup \{f(x)/x\in A_k\}$$
$$A = \cup\{A_k/k\in\omega\}$$

maka :

(i). A tertutup dalam f

(ii). Jika S suatu subset dari U yang memuat A_o sebagai subsetnya dan tertutup dalam f, maka $A\subseteq S$.

<u>Bukti</u> :

(i). Untuk menunjukkan bahwa A tertutup dalam f, harus ditunjukkan bahwa bila $x\in A$, maka $f(x)\in A$. Jika $x\in A$, maka untuk suatu k, $x\in A_k$. Kemudian $f(x)\in A_{k+1}\subseteq A$, sehingga $f(x)\in A$.

(ii). Diberikan S subset dari U yang tertutup dalam f dengan $A_o \in S$. Akan ditunjukkan bahwa $A \in S$. Hal ini cukup menunjukkan bahwa untuk setiap k, $A_k \subseteq S$, selanjutnya $\cup A_k = A \subseteq S$. Anggap $p(k)$ predikat dari "$A_k \subseteq S$" dan dikerjakan dengan induksi sebagai berikut :

*). langkah dasar

$A_o \in S$ adalah benar.

**). langkah induksi

Diasumsikan bahwa $A_k \subseteq S$. Harus dibuktikan bahwa bila $y \in A_{k+1}$, maka $y \in S$. Bila $y \in A_{k+1}$, maka $y \in A_k$ atau $y \in \{f(x)/x \in A_k\}$. Bila $y \in A_k$, maka $y \in S$, dengan hipotesis induksi. Bila $y \in \{f(x)/x \in A_k$, maka $y = f(x^*)$ untuk $x^* \in A_k$. Dengan hipotesis induksi $x^* \in S$. Karena S tertutup dalam f, maka $f(x^*) = y \in S$.

Definisi 2.2.3.2 (Definisi Scheme)

Diberikan himpunan U, C⊆U, dan $f: U \longrightarrow U$. Jika pernyataan berikut

(i) $C \subseteq A$

(ii) jika $x \in A$, maka $f(x) \in A$,

maka didefinisikan $A = \cup\{A_k / k \in \omega\}$

Definisi ini merupakan pendefinisian himpunan secara induktif. Jika sinyatakan (i) dan (ii), maka himpunan terkecil yang memenuhi (i) dan (ii) adalah hanya $A = \cup\{A_k / k \in \omega\}$.

Contoh 2.2.3.2

Diberikan definisi induktif himpuan seperti berikut

(i). $(0,0)\in A$

(ii). jika $(x,y)\in A$, maka $(x+1,y+2)\in A$.

Dengan menggunakan theorema 2.2.3. akan dibuktikan bahwa $A=\{(x,2x)/x\in\omega\}$.

Untuk membuktikan ini dimisalakan himpunan $S=\{(x,2x)/x\in\omega\}$, kemudian ditunjukkan bahwa $A=S$. Anggap bahwa S tertutup dalam f dengan $f(x,y)=(x+1,y+2)$. Karena S tertutup, jika $(x,2x)\in S$, maka $f(x,2x) = (x+1,2x+2) = (x+1,2(x+1))\in S$. Kemudian karena $\{(0,0)\}\subseteq S$, maka menurut theorema 2.2.3 (ii) didapat $A\subseteq S$.

Sekarang akan ditunjukkan dengan induksi bahwa $S\subseteq A$.

*). langkah dasar

$(0,0)\in A$, benar dari (i)

**). langkah induksi

Dianggap $(k,2k)\in A$ benar untuk $k\in\omega$. Maka dengan (ii) $(k+1,2k+2) = (k+1,2(k+1))\in A$. Sehingga untuk semua $k\in\omega$, berlaku $(k,2k)\in A$. Karena untuk semua $k\in\omega$ $(k,2k)\in S$, maka $S\subseteq A$.

Karena $A\subseteq S$ dan $S\subseteq A$, maka $A=S=\{(x,2x)/x\in\omega\}$.

2.2.4. Pendefinisian Fungsi dengan Induksi

Jika suatu himpunan didefinisikan dengan induksi, maka cara terbaik untuk mendefinisikan suatu fungsi dari himpunan itu ke himpunan lain adalah dengan induksi. Sebelum mendefinisikan fungsi akan didefinisikan apa yang disebut *expresi*. *Expresi* adalah suatu ungkapan yang menyatakan perhitungan dari suatu nilai yang tergantung pada kejadian-kejadian dari perhitungan. Misalnya untuk expresi integer maka nilainya adalah suatu integer dan untuk expresi logika maka nilainya adalah nilai logika yaitu benar atau salah.

Sekarang diberikan suatu contoh cara pendefinisian fungsi dengan induksi. Didefinisikan suatu fungsi M, yaitu suatu expresi matematika yang menghasilkan nilai dari suatu expresi atau *fungsi arti (Meaning Function).* Yang pertama harus didefinisikan himpunan A dari expresi-expresi untuk dievaluasi. Diberikan $V=\omega\cup\{\underline{+},\underline{(},\underline{)}\}$. Himpunan A merupakan subset dari V^{+}, yaitu expresi-expresi yang menjadi string dengan karakter integer atau tanda-tanda punctuasi $\underline{+}$, $\underline{(}$ atau $\underline{)}$. Didefinisikan himpunan A sebagai berikut :

(i). $\omega\in A$

(ii). bila $x,y\in A$, maka $\underline{(}x\underline{)}\ \underline{+}\ \underline{(}y\underline{)}\in A$

Fungsi M adalah fungsi $A \longrightarrow \omega$ yang merupakan subset dari $A\times\omega$. Sehingga fungsi M dapat didefinisikan sebagai berikut:

(i). $\{(k,k)/k\in\omega\} \subseteq M$

(ii). jika (x,k) dan (y,k') anggota dari M, maka

$(\underline{(}x\underline{)}\underline{+}\underline{(}y\underline{)},k+k')\in M$

Dengan menggunakan notasi yang lebih dikenal, $M(x) = k$ untuk $(x,k)\in M$, maka fungsi M dapat didefinisikan sebagai berikut :

(i). $M(k) = k$, untuk $k\in\omega$

(ii). $M(\underline{(}x\underline{)}\underline{+}\underline{(}y\underline{)}) = M(x) + M(y)$

Definisi yang pertama disebut bentuk *relasional* dan yang kedua disebut bentuk *fungsional.* Dari kedua bentuk tersebut akan dicoba untuk menghitung

$$((7) \pm ((3) \pm (4))) \pm (3)$$

*). <u>bentuk relasional</u> :

$3 \in A$	$(3,3) \in M$
$4 \in A$	$(4,4) \in M$
$7 \in A$	$(7,7) \in M$
$(3) \pm (4) \in A$	$((3) \pm (4)),7) \in M$
$(7) \pm ((3) \pm (4)) \in A$	$((7) \pm ((3) \pm (4)),14) \in M$
$((7)+((3)+(4)))+(3) \in A$	$(((7)+((3)+(4)))+(3),17) \in M$

sehingga $M(((7) \pm ((3) \pm (4))) \pm (3)) = 17$

**). <u>bentuk fungsional</u> :

Dalam himpunan A, jika $w \in A$ maka $w \in \omega$ atau $w = (x)\pm(y)$ untuk $x, y \in A$. Bila $w \in \omega$ maka $M(w) = w$. Jika $w = (x)\pm(y)$ maka $M(w)$ adalah jumlah dari $M(x)$ dan $M(y)$.

Misal $w = ((7) \pm ((3) \pm (4))) \pm (3)$, maka

$$\begin{aligned} M(w) &= M(((7) \pm ((3) \pm (4))) \pm (3)) \\ &= M((7) \pm ((3) \pm (4))) + M(3) \\ &= (M(7) + M((3) \pm (4))) + M(3) \\ &= (M(7) + (M(3) + M(4))) + M(3) \\ &= (M(7) + (3+4) + M(3) \\ &= (7+7) + M(3) \\ &= 14+3 = 17 \end{aligned}$$

2.2.5. Penggunaan Informasi Global

Dalam pembicaraan ini akan dibahas tentang penggunaan variabel. Hal ini mencakup pendefinisian himpunan dari expresi-expresi dengan variabel. Bila VAR adalah himpunan dari variabel-variabel, maka untuk definisi (i) dari himpunan A pada bahasan sebelumnya diubah sebagai berikut :

$$\text{(i) } \omega \cup \text{VAR} \subseteq A$$

Dengan definisi baru ini, suatu variabel dapat tampil dimana saja walaupun sebagai integer. Sekarang dapat didefinisikan secara singkat suatu fungsi $M : A \longrightarrow \omega$ yang memetakan ke masing-masing expresi nilainya. Bila ALPHA dan BETA adalah anggota dari VAR, maka M(ALPHA ± BETA) akan berbeda-beda tergantung nilai dari ALPHA dan BETA.

Oleh karena itu diperlukan informasi tambahan yaitu "*Environment (lingkungan)*" yang mana ALPHA dan BETA akan dievaluasi didalamnya. Environment dapat digambarkan seperti pada gambar berikut :

$$\text{nama variabel} \longrightarrow \boxed{\text{Environment}} \longrightarrow \text{nilai}$$

dengan pemasukan nama variabel dihasilakan nilai.

Sehingga dapat dikatakan bahwa environment merupakan fungsi nama-nama variabel ke nilai, atau environment adalah fungsi $I : \text{VAR} \longrightarrow \omega$. Himpunan ENV dari semua environment adalah himpunan dari semua fungsi $\text{VAR} \longrightarrow \omega$. Sekarang dapat ditulis suatu definisi dari A dan fungsi $M : \text{ENV} \times A \longrightarrow \omega$, yang memberikan nilai-nilai dari expresi dalam suatu environment.

Definisi dari A

(i). $\omega \subseteq A$

(ii). $\text{VAR} \subseteq A$

(iii). jika $x, y \in A$, maka $(x) \pm (y) \in A$

Definisi dari M

(i). M(I,k) = k, untuk $k \in \omega$

(ii). M(I,v) = I(v), untuk $v \in VAR$

(iii). $M(I,\underline{(x) \pm (y)}) = M(I,x) + M(I,y)$

Sehingga jika ALPHA,BETA $\in$ VAR dan I(ALPHA) = 3 dan I(BETA) = 5, maka

$$M(I,\underline{ALPHA} \pm \underline{BETA}) = M(I,\underline{ALPHA}) + M(I,\underline{BETA})$$
$$= I(\underline{ALPHA}) + I(\underline{BETA})$$
$$= 3 + 5 = 8$$