BAB II

MATERI DASAR

2.1. Turunan Parsial

Didalam pendugaan nilai-nilai parameter populasi statistika atau model rancangan percobaan digunakan turunan parsial.

Definisi 1

Jika Z = f(x,y) adalah fungsi dari variabel bebas x dan y maka :

turunan (pertama) parsial dari Z = f(x,y) ke x dimana y dianggap konstan adalah

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

turunan (pertama) parsial dari Z = f(x,y) ke y dimana x dianggap konstan adalah

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Turunan parsial $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial Z}{\partial y}$ dari Z = f(x,y) dapat diturunkan parsial lagi ke x dan y, menghasilkan turunan parsial kedua sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) \quad ; \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

Definisi 2

Apabila Z = f(x,y) mempunyai turunan parsial pertama dan kedua dalam daerah tertentu yang memuat titik

(x_o, y_o, z_o) dimana $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$. Maka, jika $\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ di P_o, $Z = f(x,y)$ mempunyai :

minimum relatif di P_o jika $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} > 0$

maksimum relatif di P_o jika $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} < 0$

2.2. Konsep Dasar Statistika

Konsep dasar statistika yang akan disajikan disini hanyalah konsep-konsep dasar yang mendasari rancangan percobaan. Untuk itu disini yang dibahas hanyalah konsep-konsep dasar statistika yang digunakan dalam pokok pembahasan.

2.2.1. Penggunaan Operator Penjumlahan dan Perkalian

Oleh karena banyak konsep-konsep dasar dalam analisis statistika untuk penelitian percobaan menggunakan penjumlahan angka-angka, maka disini akan ditinjau secara singkat tentang penggunaan operator penjumlahan. Biasanya notasi penjumlahan yang digunakan huruf kapital Σ (baca : sigma). dari abjad Yunani.

Definisi 3

Bila terdapat n data percobaan $x_1, x_2, \ldots, x_n$, maka jumlahan seluruh data tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

seringkali $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ditulis secara singkat sebagai $\sum_{i}^{n} x_i$.

Beberapa sifat penting dari operator penjumlahan Σ adalah

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, dimana k adalah konstanta.

2. $\sum_{i=1}^{n} kx_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i$, dimana k adalah konstanta.

3. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

Definisi 4

Operator perkalian yang dinotasikan $\prod$ (baca : pi), menyatakan perkalian dari segugus data $x_1, x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 . x_2 . \ldots . x_n$$

2.2.2. Beberapa Definisi tentang Data Statistik

Dalam menganalisa suatu rancangan percobaan tentu saja perlu diketahui pengertian atau definisi-definisi mengenai data statistik. Secara singkat definisi dari data statistik disajikan sebagai berikut :

Definisi 5

Populasi adalah keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian.

Definisi 6

Sample adalah pengamatan yang merupakan himpunan bagian dari populasi.

Definisi 7

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_N$ adalah sekelompok data yang menyusun suatu populasi berhingga berukuran N dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata populasi adalah :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Definisi 8

Jika x_1, x_2, ..., x_N adalah sekelompok data yang yang merupakan sample berhingga berukuran n dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata sample adalah :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Definisi 9

Jika x_1, x_2, ..., x_N merupakan populasi berhingga dengan ukuran N, maka varians dari populasi adalah :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$$

Definisi 10

Jika x_1, x_2, ..., x_N sebarang sample acak berukuran n, maka varians dari sample populasi adalah :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n - 1}$$

2.2.3. Variabel Acak, Nilai Harapan, dan Varians (Ragam)

Sebelumnya perlu diketahui beberapa pengertian tentang beberapa variabel, yaitu :

1. Variabel acak

   yang dimaksud variabel acak adalah suatu kejadian (event) yang diucapkan dalam bentuk bilangan nyata.

2. Variabel acak diskrit

   yang dimaksud variabel acak diskrit adalah variabel acak yang hanya dapat dinyatakan dengan nilai-nilai atau harga-harga yang terbatas jumlahnya.

3. Variabel acak kontinu

   yang dimaksud variabel acak kontinu adalah variabel acak yang mempunyai nilai atau harga berupa interval.

Definisi 11

Jika X adalah variabel acak diskrit yang mengambil nilai-nilai yang berbeda x_1, x_2, ..., x_n, ...maka fungsi :

$$f(x) = P(X = x_i) \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } x \neq x_i$$

disebut fungsi kepekatan peluang diskrit (PDF) dari X, dimana $P(X = x_i)$ berarti peluang bahwa variabel acak diskrit X mengambil nilai x_i.

Definisi 12

Jika U(x) merupakan fungsi dari variabel acak diskrit dengan PDF : f(x), maka nilai harapan (expected value) dari x didefinisikan :

$$E(x) = \sum_x U(x) \, . \, f(x) = \mu$$

Definisi 13

Jika X adalah variabel acak kontinu, maka f(x) dikatakan sebagai PDF dari X jika memenuhi :

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1 \text{ dan}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = P\ (a < x \leq b).$$

dimana f(x) dx dikenal sebagai elemen probabilitas (peluang yang berkaitan dengan suatu selang yang kecil dari suatu variabel yang kontinu) dan $P(a<x\leq b)$ berarti probabilitas bahwa X terletak dalam selang a sampai b.

Definisi 14

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_r$ variabel acak x berukuran r dan $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_r)$ adalah fungsi kepekatan peluang berserikat dari x, maka $x_1, x_2, \ldots, x_r$ independen bhb :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \prod_{i=1}^{r} f(x_i)$$

Beberapa sifat penting dari nilai harapan, antara lain :

1. $E(k) = k$, dimana untuk setiap k = konstanta
2. $E(kx) = kE(x)$, k = konstanta.

   akibatnya : $E(kx^2) = k^2E(x^2)$
3. $E\left[\prod_{i=1}^{r} x_i\right] = \prod_{i=1}^{r} E(x_i)$, dimana x_i adalah variabel acak yang independen.

   $$E\left[\sum_{i=1}^{r} x_i\right] = \sum_{i=1}^{r} E(x_i)$$

Definisi 15

Jika x adalah variabel acak maka penyebaran dari nilai-nilai x disekitar nilai harapan didefinisikan sebagai :

$$\text{varians } (x) = \text{var } (x) = \sigma_x^2 = E(x - E(x))^2$$

Akibat dari definisi 12 dan definisi 15, maka :

$$\sigma_x^2 = E(x - \mu)^2$$

Definisi 16

Simpangan baku dari variabel acak x didefinisikan sebagai akar pangkat dua dari varians (x), atau dirumuskan :

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var } (x)}$$

Beberapa sifat penting dari varians

1. $\text{var } (x) = \sigma_x^2 = E(x - \mu)^2$

   $= E(x^2) - \mu^2$

   $= E(x^2) - E(X)^2$

2. $\text{var } (k) = \sigma_k^2 = 0$, untuk setiap k = konstanta.
3. Jika a dan b adalah konstanta, maka :

   $\text{var } (ax) = a^2\text{var } (x)$

   $\text{var } (ax + b) = a^2\text{var } (x)$

   $\text{var } (x + b) = \text{var } (x)$

4. $\text{var } (x + y) = \text{var } (x) + \text{var } (y)$, umtuk setiap x, y variabel acak independen.
5. $\text{var } (ax + by) = a^2\text{var } (x) + b^2\text{var } (y)$

   dimana :

   a, b = konstanta

   x, y = variabel acak independen

2.2.4. Beberapa Distribusi yang Penting

Yang dimaksud beberapa distribusi yang penting adalah beberapa distribusi yang digunakan dalam pembahasan, yaitu :

1. Distribusi Normal
2. Distribusi Khi-kuadrat
3. Distribusi t-student
4. Distribusi F

Definisi 17

Jika x variabel random dengan fungsi probabilitas f(x), maka fungsi pembangkit momen dari x adalah :

$$E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx \; ; \quad \text{untuk } x \text{ kontinu},$$

$$E\left[e^{tx}\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x) \; ; \quad \text{untuk } x \text{ diskrit},$$

dinotasikan dengan $M_x(t)$.

Theorema 1

Jika x_1 dan x_2 variabel random independent dengan fungsi pembangkit momen $M_{x_1}(t)$ dan $M_{x_2}(t)$, dan $y = x_1 + x_2$ maka

$$M_y(t) = M_{x_1+x_2}(t) = M_{x_1}(t) \cdot M_{x_2}(t)$$

Bukti :

$$M_y(t) = E\left[e^{ty}\right] = E\left[e^{t(x_1+x_2)}\right]$$

$$= \int_{-x}^{x}\int_{-x}^{x} e^{t(x_1+x_2)}\, f(x_1,x_2)\, dx\, dy$$

menurut definisi 14, $f(x_1,x_2) = g(x_1) \cdot h(x_2)$, sehingga

$$M_y(t) = \int_{-x}^{x} e^{tx_1} g(x_1)\, dx_1 \;.\; \int_{-x}^{x} e^{tx_2} h(x_2)\, dx_2$$

$$= M_{x_1}(t) \,.\, M_{x_2}(t)$$

Definisi 18

Bentuk integral $\int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$ untuk $\alpha > 0$, disebut fungsi gamma dari α dan ditulis :

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

Definisi 19

Jika X segugus data yang terdiri dari elemen-elemen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maka derajat bebas (db) dari X adalah banyaknya elemen yang independen dalam X tersebut.

2.2.4.1. Distribusi Normal

Distribusi ini merupakan distribusi terpenting yang digunakan dalam rancangan percobaan, karena banyak pengukuran menyebar mengikuti atau mendekati distribusi normal.

Definisi 20

Suatu variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi normal jika PDF-nya mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

dimana μ dan σ^2 merupakan parameter rata-rata dan ragam dari distribusi normal, yang mengambil nilai : $-\infty < \mu < \infty$, serta $0 < \sigma^2 < \infty$.

Pada umumnya apabila suatu variabel acak kontinu X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2 maka dapat ditulis $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Demikian pula untuk $X \sim N(0,\sigma_1^2)$ maksudnya adalah variabel acak X berdistribusi normal independen dengan rata-rata 0 dan varian σ^2.

Theorema 2

Jika x variabel random yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2, maka

$$W = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Bukti :

fungsi distribusi G(w) dari W adalah

$$G(w) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le w\right) = P(x \le w\sigma+\mu),\ \sigma > 0\ ,\ \text{maka}$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{w\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

substitusi $y = (x-\mu)/\sigma$, maka

$$G(w) = \int_{-\infty}^{w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-y^2/2}\ dy$$

Dengan demikian PDF dari variabel random W adalah

$$g(w) = G'(w)$$

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-w^2/2}\ ,\quad -\infty < w < \infty$$

sesuai dengan definisi 20, $W \sim N(0,1)$

2.2.4.2. Distribusi Khi-kuadrat

Distribusi Khi-kuadrat sering juga disebut distribusi χ^2, dimana Tabel berbagai nilai dari distribusi χ^2 diberikan pada Lampiran.

Definisi 21

Suatu variabel random kontinu X dengan PDF berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{v/2}} x^{v/2\ -1}\ e^{-x/2}\ ,\qquad 0 < x < \infty$$

$$= 0\ ,\ \text{untuk yang lain}$$

dengan fungsi pembangkit momen $M_x(t) = (1-2t)^{-v/2}$, untuk t<1/2 disebut berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : v .

Theorema 3

Jika X variabel random dan $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$, maka variabel random $V = (x-\mu)/\sigma$ akan berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : 1.

Bukti :

Karena $V=W^2$ dimana menurut theorema 2, $W=(x-\mu)/\sigma$ berdistribusi normal baku, fungsi distribusi G(v) dari V adalah

$$G(v) = P(W^2 \le v) = P(-\sqrt{v} \le W \le \sqrt{v}\ ),\quad \text{untuk } v \ge 0$$

$$G(w) = \int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-w^2/2}\ dw\ ,\ \text{untuk } 0 \le v$$

$$G(w) = 0\ ,\ \text{untuk } v < 0$$

substitusi $w = \sqrt{y}$, maka

$$G(w) = \int_0^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{y}}\ e^{-y/2}\ dy\ ,\ 0 \le v$$

PDF dari variabel random kontinu V adalah $g(v)=G'(v)$

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{2y}}\ v^{1/2\ -1} e^{-v}\ ,\quad 0 < v < \infty$$

$$= 0\ ,\ \text{untuk yang lain}$$

sehingga $g(v) = X^2(1)$.

Theorema 4

Jika x_1, x_2, ..., x_n variabel random independen masing-masing berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas k_1, k_2, ..., k_n, maka variabel random $Y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Bukti :

Sesuai dengan definisi 21, fungsi pembangkit momen dengan db : k_i adalah $(1-2t)^{-k_i/2}$. Karena Y variabel random independent, maka sesuai theorema 1, berlaku

$$M_y(t) = M_{x_1}(t).M_{x_2}(t)\ldots M_{x_n}(t) \text{ , sehingga}$$

$$M_y(t) = (1-2t)^{-k_1/2} . (1-2t)^{-k_2/2} \ldots (1-2t)^{-k_n/2}$$

$$= (1-2t)^{-(k_1+k_2+\ldots+k_n)/2}$$

ini merupakan fungsi pembangkit momen dari variabel random yang berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Theorema 5

Jika $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$, y = pengamatan sample, $\bar{y}$ = rata-rata sample

adalah varians sample acak berukuran n yang diambil dari populasi yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2, maka :

$$U = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \text{ akan berdistribusi khi-kuadrat}$$

dengan derajat bebas v = n- 1.

Bukti :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \mu) - (\bar{y} - \mu)]^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 - \frac{1}{n-1} (\bar{y} - \mu) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu) +$$

$$\frac{1}{n-1} (\bar{y} - \mu)^2.$$

tetapi $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n} y_i - n\mu = n\bar{y} - n\mu = n(\bar{y} - \mu)$

sehingga $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{y} - \mu)^2$

maka $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

dimisalkan $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = W$ dan $\left(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 = Z$, maka menurut theorema 3, Z berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : 1 dan menurut theorema 4, $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : n, sehingga fungsi pembangkit momen-nya dapat ditulis

$$M_{W+Z}(t) = M_W(t) \,.\, M_Z(t) = (1-2t)^{-n/2}$$

$$M_W(t) \,.(1-2t)^{-1/2} = (1-2t)^{-n/2}$$

$$M_W(t) = (1-2)^{-(n-1)/2}$$

Dengan demikian W berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : (n-1).

2.2.4.3. Distribusi t-Student

Definisi 22

Suatu variabel yang berdistribusi t dengan db:v adalah rasio dari variabel acak Z yang berdistribusi normal baku dengan X^2 yang merupakan variabel acak berdistribusi Khi-kuadrat dengan db:v, serta keduanya saling bebas. Dapat juga ditulis :

$$t = \frac{Z}{\sqrt{x^2/v}}$$

Theorema 6

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah data pengamatan dalam contoh acak berukuran n yang ditarik dari populasi normal, maka : $t = \dfrac{(\bar{x} - \mu)}{s/\sqrt{n}}$

akan berdistribusi t-tsudent dengan db = n -1.

Bukti :

Misalkan $U = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ dan $V = (n-1)s^2/\sigma^2$, maka menurut theorema 2, U berdistribusi normal baku dan menurut theorema 5, V berdistribusi Khi-kuadrat dengan db : n-1. Selanjutnya,

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{s/\sigma}$$

$$\frac{(\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}$$

sehingga sesuai definisi 21, maka

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s\sqrt{n}}$$ berdistribusi t dengan derajat bebas (n-1)

2.2.4.4. Distribusi F

Definisi 23

Statistik F adalah rasio dari dua variabel acak independent yang berdistribusi Khi-kuadrat yang masing-masing dibagi dengan db-nya, dapat ditulis :

$$F = \frac{U/v_1}{V/v_2}$$

dimana U dan V adalah variabel acak independent yang berdistribusi Khi-kuadrat dengan db v_1 dan v_2.

Theorema 7

Jika ada dua sample acak berukuran n_1 dan n_2 yang masing-masing dipilih dari dua populasi normal, maka rasio dari :

$$\frac{(s_1^2/\sigma_1^2)}{(s_2^2/\sigma_2^2)}$$

akan berdistribusi F dengan db $v_1 = n_1-1$ dan $v_2 = n_2-1$.

Bukti :

Menurut theorema 5, (s_1^2/σ_1^2) dan (s_2^2/σ_2^2) masing-masing berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas n_1-1 dan n_2-1, sehingga sesuai dengan definisi 23 terbukti

bahwa $$\frac{(s_1^2/\sigma_1^2)}{(s_2^2/\sigma_2^2)}$$

berdistribusi F dengan db $v_1 = n_1-1$ dan $v_2 = n_2-1$.

2.2.5. Konsep Pendugaan

Dalam analisa statistik sering diketahui atau diasumsikan bahwa suatu variabel random X mengikuti suatu distribusi probabilitas tertentu tetapi nilai dari parameter distribusi tersebut belum diketahui.

Misal X mengikuti distribusi normal maka ingin dicari nilai kedua parameternya, yaitu rata-rata dan varians.

Untuk menaksir yang tidak diketahui ini, prosedur yang biasa dilakukan adalah dengan mengasumsikan bahwa mempunyai suatu sample random dengan ukuran N dari distribusi probabilitas yang diketahui dan menggunakan data sample tadi untuk menaksir parameter atau pendugaan.

Definisi 24

Penduga adalah statistik cuplikan yang digunakan untuk memperkirakan parameter populasinya.

Definisi 25

Penduga parameter θ adalah $\hat{\theta}$ yang merupakan fungsi nilai-nilai cuplikan yang diamati.

Definisi 26

$\hat{\theta}$ adalah penduga tak bias bila $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Definisi 27

Diantara semua kemungkinan penduga tak bias bagi θ, yang variansnya terkecil adalah penduga paling efisien.

Definisi 26 dan 27 di atas merupakan ciri-ciri penduga yang baik (Best Estimator).

Dalam skripsi ini cara pendugaan parameter yang digunakan adalah cara/metode kuadrat terkesil (Least Square Method).

2.2.5.1. Metode Kuadrat Terkecil

Pada dasarnya cara kuadrat terkecil bertolak dari pengertian bahwa penduga yang baik (Best Estimator) dapat diperoleh melalui rata-ratanya dengan jumlah simpangan kuadratnya paling kecil. Sehingga berdasarkan definisi 2, untuk pengamatan cuplikan suatu variabel acak X_i dengan jumlah kuadrat simpangan masing-masing pengamatan cuplikan terhadap rata-rat μ, dirumuskan :

$\sum_{i}^{n} (X_i - \mu)^2$, untuk i=1,2,...,n berlaku :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{\partial \mu^2} > 0 \quad \text{, minimum.}$$

2.2.6. Pengujian Hipotesa

Pendugaan (Estimation) dan pengujian hipotesa (Hiphotesis Testing) merupakan 2 topik utama yang saling berkaitan erat dalam statistik inferensial untuk keperluan pembuatan keputusan dan penarikan kesimpulan.

Definisi 28

Hipotesa statistik adalah suatu anggapan atau pernyatan mengenai nilai parameter populasi.

Untuk mengetahui apakah pernyataan itu benar atau salah, maka perlu dilakukan pengujian. Proses pengujian ini dikenal sebagai pengujian hipotesa.

Definisi 29

H_o disebut hipotesa nol dan merupakan hipotesa yang akan diuji.

Definisi 30

H_1 disebut hipotesa alternatif, merupakan tandingan dari H_o, maksudnya jika H_o ditolak maka terima hipotesa alternatif H_1.

Ada dua kemungkinan membuat kesalahan dalam proses pengujian hipotesa.

Definisi 31

Kesalahan jenis I adalah penolakan hipotesa nol (H_o) yang benar.

Definisi 32

Kesalahan jenis II adalah penerimaan hipotesa nol (H_o)yang salah.

Definisi 33

Taraf nyata dinotasikan dengan α merupakan peluang untuk menerima kesalahan jenis I.

Dalam praktek biasanya lebih diperhatikan untuk meminimumkan peluang kesalahan jenis I dan biasanya dipilih tingkat yang cukup rendah dari taraf nyata, seperti $\alpha = 0,01$ atau $\alpha = 0,05$.

Sebagai gambaran untuk lebih jelasnya misal ditentukan taraf nyata $\alpha = 0,05$ atau 5 % didalam menguji hipotesa maka hal ini berarti bahwa kesempatan menolak H_o padahal seharusnya diterima adalah 5 banding 100.

Definisi 34

Taraf kepercayaan dinotasikan dengan $(\alpha-1)$ merupakan peluang $(\alpha-1)$ dalam membuat keputusan yang benar.

2.2.6.1. Langkah-Langkah pengujian Hipotesa

Langkah-langkah umum yang perlu ditempuh dalam pengujian hipotesa secara statistik adalah :

1. Merumuskan hipotesa nol H_o, serta hipotesa alternatif H_1 yang relevan dengan permasalahan yang akan diuji.
2. Menentukan taraf nyata pengujian sebesar α.
3. Memilih uji statistik yang sesuaidengan hipotesa yang akan diuji.
4. Mengadakan perhitungan statistik dari sample acak.
5. Membuat keputusan berdasarkan kriteria yang ada. Misal jika menggunakan uji nyata, maka tolak H_o apabila nilai uji berada dalam daerah kritis, selain itu terima H_o.
6. Manarik kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh.

2.3. Rancangan Percobaan

Pokok bahasan dalam skripsi ini merupakan pengembangan dari teori rancangan percobaan, maka pada bab ini dibahas beberapa pengertian, tujuan dan kegunaan rancangan, asumsi tentang model serta rancangan percobaan dasar.

Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah pembahasan mengenai dasar pemikiran teori pokok yang akan dibahas (pokok bahasan).

2.3.1. Pengertian Beberapa Istilah

a. Percobaan (Experiment)

Ialah suatu usaha yang terencana untuk mengungkapkan fakta-fakta baru, atau menguatkan atau untuk membantah hasil-hasil baru yang sudah ada sebelumnya.

b. Rancangan Percobaan (Experiment Design)

merupakan seperangkat pengetahuan yang mempelajari model-model serta cara memilih dan membuat rancangan, juga mencakup prosedur analisa statistika dari data hasil percobaan, hinga pengamilan kesimpulan yang syah.

c. Unit Percobaan (Experiment Unit)

Ialah satu atau sekumpulan materi percobaan yang kepadanya diterapkan perlakuan dengan replikasi tunggal.

d. Sesatan Percobaan (Experiment Error)

Ialah ukuran ketidakmampuan materi-materi percobaan memberikan pengaruh yang sama terhadap perlakuan yang sama pula.

e. Perlakuan (Treatment)

Ialah macam-macam prosedur yang pengaruhnya diukur dan dibandingkan satu sama lain.

f. Replikasi (Replication)

Ialah pengulangan percobaan dasar.

g. Pengacaan (Randomization)

Merupakan suatu cara untuk membuat korelasi antar kekeliruan (sesatan) sekecil-kecilnya, dan juga merupakan cara menghilangkan bias.

h. Pengelompokan (Blocking)

Ialah pengalokasian unit-unit percobaan dalam kelompok-kelompok (block-block), sedemikian sehingga unit-unit percobaan yang berada dalam masing-masing kelompok lebih homogen.

i. Analisa Ragam/Varians (Analysis of Varians)

Ialah suatu prosedur atau metode yang memungkinkan kita untuk menguji beberapa nilai tengah/rata-rata lebih dari 2 (dua) secara serentak, dengan memecah variansi total dari data yang ada menjadi komponen-komponen.

2.3.2. Tujuan dan Kegunaan Rancangan Percobaan

Tujuan rancangan percobaan adalah untuk memperoleh atau mengumpulkan informasi sebanyak-banyaknya yang diperlukan dan berguna dalam melakuka penyelidikan dari persoalan yang dibahas, meskipun demikian dalam upaya untuk mendapatkan semua informasi yag berguna itu hendaknya dugunakan rancangan yang sderhana dan percobaan yang dilaksanakan seefisien mungkin, artinya perlu dipikirkan atau diperhatikan mengenai penggunaan tenaga, waktu, biaya, dan bahan percobaannya. Hal ini sangat penting mengingat kenyatan bahwa rancangan yang sederhana akan mudah dilaksanakan dan data yang diperoleh akan lebih mudah dianalisa serta lebih ekonomis.

Jadi jelasnya rancangan percobaan sangat diperlukan dalam suatu penelitian experimental, guna memperoleh informasi yang maksimum dengan biaya minimum.

2.3.3. Asumsi Tentang Model

2.3.3.1. Sifat Normalitas

Data percobaan sebelum dianalisa harus memenuhi asumsi normalitas, yaitu kesimpulan data hasil percobaan tersebut mempunyai atau berdistribusi normal, untuk memeriksa apakah analisa ragam dapat ditempuh uju normalitas.

Pada pembahasan disini uji normalitas tidak diterapkan pada data hasil percobaan sebelum analisa ragam, bahkan tidak diadakan uji normalitas.

2.3.3.2. Homogenitas Ragam

Data hasil percobaan yang telah memenuhi sifat normalitas, harus juga memenuhi asumsi homogenitas ragam yaitu sekumpulan data sample mempounyai kesamaan ragam, dengan hipotesa :

$$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

Berdasarkan sample acak ukuran n yang masing-masing diambil dari populasi berukuran k.

2.3.3.3. Sifat Aditifitas

Asumsi aditifitas pada data hasil percobaan harus dipenuhi karena selama percobaan kadang terdapat pengamatan yang keliru atau adanya interaksi yang luput dimasukkan ke dalam model, namun hal ini dapat diatasi dengan mengadakan penelitian secara tepat dan benar.
Pada pembahsan selanjutnya sifat aditifitas ini sudah sianggap terpenuhi.

2.3.3.4. Independensi

Asumsi mengenai independensi dari sesatan ε_{ij} biasanya diambil $\varepsilon_{ij} \sim NID(0,\sigma^2_\varepsilon)$ yang berarti, kecuali mempunyai rata-rata sama dan ragam yang homogen juga berdistribusi normal dan tak berkorelasi. Salah satu cara atau usaha untuk memenuhi asumsi independensi ialah dengan jalan melakukan pengacakan.

2.3.4. Rancangan Acak Kelompok (RAK)

Apabila unit-unit percobaan sangat heterogen, maka perlu dilakukan pengelompokan-pengelompokan sehingga dalam tiap kelompok unit-unit percobaan relatif homogen.
Dalam hal ini digunakan suatu rancangan percobaan dengan mengelompokkan unit - unit percobaan ke dalam kelompok - kelompok (block) yang relatif homogen, kemudian rancangan percobaannya dinamakan Rancangan Acak Kelompok.
Data hasil percobaan pada RAK dapat disusun sebagai berikut:

Tabel 2.1. Bagan Hasil Pengamatan Percobaan Rancanangan Acak Kelompok

Perlakuan	Kelompok				Jumlah	Rata-rata
	1	2	. . . .	r		
1	y_{11}	y_{12}	. . . .	y_{1r}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	. . . .	y_{2r}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
.	.	.	. . . .	.	.	.
.	.	.	. . . .	.	.	.
.	.	.	. . . .	.	.	.
a	y_{a1}	y_{a2}	. . . .	y_{ar}	$y_{a.}$	.
Jumlah	$y_{.1}$	$y_{.2}$	. . . .	$y_{.r}$	$y_{..}$	-
Rata-rata	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	. . . .	$\bar{y}_{.r}$	-	$\bar{y}_{..}$

Notasi-notasi pengamatan pada RAK adalah :

Y_{ik} = Pengamatan pada kelompok ke-k yang memperoleh perlakuan ke-i.

$i = 1, 2, \ldots, a$ $\qquad$ $k = 1, 2, \ldots, r$

a = banyaknya taraf perlakuan

r = banyaknya kelompok

$Y_{i.}$ = total hasil pengamatan pada perlakuan ke-i.

$$Y_{i.} = \sum_{k=1}^{r} Y_{ik}$$

$\bar{Y}_{i.}$ = Rata-rata data pengamatan pada perlakuan ke-i

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{r}$$

$Y_{.k}$ = total hasil pengamatan pada kelompok ke-k.

$$Y_{.k} = \sum_{i=1}^{a} Y_{ik}$$

$\bar{Y}_{.k}$ = rata-rata data pengamatan pada kelompok ke-k.

$$\bar{Y}_{.k} = \frac{Y_{.k}}{a}$$

$Y_{..}$ = total seluruh hasil pengamatan.

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} Y_{ik}$$

$\bar{Y}_{..}$ = rata-rata data seluruh pengamatan.

$$\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{ar}$$

2.3.4.1. **Model Linier dan Analisa Ragam Rancangan**

Definisi 35

Model statistika yang sesuai untuk Rancangan Acak Kelompok adalah :

$$\bar{Y}_{ik} = \mu + \alpha_i + \rho_k + \delta_{ik} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

$i = 1, 2, \ldots, a$

$k = 1, 2, \ldots, r$

dimana :

Y_{ik} = pengamatan pada kelompok ke-k yang memperoleh perlakuan ke-i.

μ = rata-rata dari data sesungguhnya.

α_i = efek perlakuan pada taraf ke-i.

ρ_k = efek kelompok ke-k.

δ_{ik} = pengaruh galat yang muncul pada perlakuan ke-i dalam kelompok ke-k.

Asumsi yang mendasar dari model ini adalah :

$$\delta_{ik} \sim NID(0,\sigma^2_\delta)$$

RAK yang dibahas disini adalah rancangan dengan model tetap dan banyaknya replikasi setiap perlakuan sama.

Definisi 36

Efek perlakuan dan efek kelompok untuk model tetap (fixed) didefinisikan sebagai deviasi-deviasi terhadap rata-rata keseluruhan sedemikian sehingga :

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 \quad \text{dan} \quad \sum_{k=1}^{r} \rho_k = 0$$

Akibat dari definisi *36* adalah : $\sum_{i=1}^{a} \hat{\alpha}_i = 0$ dan $\sum_{k=1}^{r} \hat{\rho}_k = 0$,

dimana $\hat{\alpha}_i$ = penduga untuk efek perlakuan dan $\hat{\rho}_k$ = penduga untuk efek kelompok.

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil akan diperoleh penduga μ, α_i, ρ_k sebagai berikut :

$$\text{(i).}\quad \frac{\partial \sum_i \sum_k \hat{\delta}_{ik}^2}{\partial \hat{\mu}} = 0 = 2 \sum \sum (Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k)(-1)$$

$$\text{(ii).}\quad \frac{\partial \sum_k \hat{\delta}_{ik}^2}{\partial \hat{\alpha}_i} = 0 = 2 \sum_k (Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k)(-1)$$

$$\text{(iii).}\quad \frac{\partial \sum_i \hat{\delta}_{ik}^2}{\partial \hat{\rho}_k} = 0 = 2 \sum_i (Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k)(-1)$$

dari (i) diperoleh :

$$\sum_i \sum_k (Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k)(-1) = 0$$

$$\sum_i \sum_k Y_{ik} - ar\hat{\mu} - r\sum_i \hat{\alpha}_i - a\sum_k \hat{\rho}_k = 0$$

dengan batasan : $\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$, $\sum_k \hat{\rho}_k = 0$, maka :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i \sum_k Y_{ik}}{ar}$$

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{..} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

dari (ii) diperoleh :

$$\sum_k (Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k) = 0$$

$$\sum_k Y_{ik} - r\hat{\mu} - r\hat{\alpha}_i - \sum_k \hat{\rho}_k = 0$$

dengan batasan $\sum_k \hat{\rho}_k = 0$, maka:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_k Y_{ik}}{r} - \mu$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

dari (iii) diperoleh :

$$\sum_i (Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k) = 0$$

$$\sum_i Y_{ik} - a\hat{\mu} - \sum \hat{\alpha}_i - a\hat{\rho}_k = 0$$

dengan batasan $\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$, maka :

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_k Y_{ik}}{a} - \hat{\mu}$$

$$\hat{\rho}_k = \bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

Penduga dari δ_{ik} adalah :

$$\hat{\delta}_{ik} = Y_{ik} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\rho}_k$$

$$= Y_{i.} - \bar{Y}_{..} - (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) - (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})$$

$$= Y_{ik} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

Setelah model (2.1) diganti dengan penduga - penduganya diperoleh hubungan :

$$Y_{ik} = Y_{..} + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{ik} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..}) \quad \text{atau}$$

$$(Y_{ik} - \bar{Y}_{..}) = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{ik} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..}) \quad \ldots (2.6)$$

Selanjutnya persamaan (2.6) kedua ruasnya dikuadratkan dan dijumlahkan menurut i dan k, diperoleh :

$$\sum_i\sum_k (Y_{ik} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i\sum_k \{(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..}) + (\bar{Y}_{ik} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..})\}^2$$

$$= \sum_i\sum_k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i\sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i\sum_k (Y_{ik} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.k} + \bar{Y}_{..})^2$$

$$+ 2\sum_i\sum_k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..}) + 2\sum_i\sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})(Y_{.k} - \bar{Y}_{.k})$$

$$- 2\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})+2\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})+(Y_{ik}-\bar{Y}_{i.})$$

$$- \sum_i\sum_k(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

Akan dibuktikan bahwa hasil pergandaan-pergandannya sama dengan nol sebagai berikut :

$$\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})(Y_{ik}-\bar{Y}_{.k}) = \sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})Y_{ik}-\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{.k}$$

$$= a\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{.k}-a\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{.k}$$

$$= 0$$

$$\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..}) = \sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{i.}-\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{..}$$

$$= a\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{..}-a\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{..}$$

$$= 0$$

$$\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(Y_{ik}-\bar{Y}_{i.}) = \sum_i\sum_k(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})Y_{ik}-\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{i.}$$

$$= r\sum_i(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{i.} - r\sum_i(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})\bar{Y}_{i.}$$

$$= 0$$

Sehingga rumus (2.7) menjadi :

$$\sum_i\sum_k(Y_{ik}-\bar{Y}_{..})^2=\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2+\sum_i\sum_k(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})^2+\sum_i\sum_k(Y_{ik}-\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{.k}+\bar{Y}_{..})^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

Definisi 37

Variasi total hasil-hasil percobaan dengan RAK dinyatakan dalam bentuk :

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r}(Y_{ik}-\bar{Y}_{..})^2$, dan diberi nama "Jumlah Kuadrat Total", disingkat JKT.

- Bentuk : $\sum_{i}\sum_{k}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$ disebut sebagai "Jumlah Kuadrat Perlakuan" dan disingkat JKP.
- Bentuk : $\sum_{i}\sum_{k}(\bar{Y}_{.k}-\bar{Y}_{..})^2$ disebut sebagai "Jumlah Kuadrat Kelompok" dan disingkat JKK.
- Bentuk : $\sum_{i}\sum_{k}(Y_{ik}-\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.k}+ \bar{Y}_{..})^2$ disebut sebagai : "Jumlah Kuadrat Sesatan" dan disingkat JKS.

Akibatnya dari definisi 45 maka dari rumus (2,8) diperoleh hubungan sebagai berikut :

$$JKT = JKP + JKK + JKS \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

Definisi 38

Faktor Koreksi (FK) adalah kuadrat dari jumlah seluruh pengamatan dibagi total banyaknya seluruh pengamatan.

Akibat dari definisi 38, untuk RAK Faktor Koreksinya adalah :

$$FK = \left[\sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}\right]^2 / ar \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

Dalam analisa data, untuk memudahkan pemakaian, maka Jumlah Kuadrat - Jumlah Kuadrat untuk RAK dirumuskan :

$$\begin{aligned} JKT = \sum_{i}\sum_{k}(Y_{ik}-\bar{Y}_{..})^2 &= \sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}^2 - 2\sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}.\bar{Y}_{..} + \sum_{i}\sum_{k} \bar{Y}_{..}^2 \\ &= \sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}^2 - 2ar\ \bar{Y}_{..}^2 + ar\ \bar{Y}_{..}^2 \\ &= \sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}^2 - \left[\sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}\right]^2 / ar \\ &= \sum_{i}\sum_{k} Y_{ik}^2 - FK \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.11) \end{aligned}$$

$$JKP = \sum_{i}\sum_{k}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i}\sum_{k} \bar{Y}_{i.}^2 - 2\sum_{i}\sum_{k} \bar{Y}_{i.}.\bar{Y}_{..} + \sum_{i}\sum_{k} \bar{Y}_{..}^2$$

$$= r \sum_i \left[\sum_k Y_{ik}\right]^2 / r^2 - 2ar\,\bar{Y}^2_{..} + ar\,\bar{Y}^2_{..}$$

$$= \sum_i \bar{Y}^2_{i.} / r - FK \quad \text{.............} (2.12)$$

$$JKK = \sum_i \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_k \bar{Y}^2_{.k} - 2\sum_i \sum_k \bar{Y}_{.k}.\bar{Y}_{..} + \sum_i \sum_k \bar{Y}^2_{..}$$

$$= a \sum\left[\bar{Y}^2_{.k}\right] / a^2 - 2ar\,\bar{Y}^2_{..} + ar\,\bar{Y}^2_{..}$$

$$= \sum_i \sum_k \bar{Y}^2_{.k} / a - FK \quad \text{.............} (2.13)$$

Sedangkan untuk JKS dirumuskan :

$$JKS = JKT - JKP - JKK \quad \text{......................} (2.14)$$

Definisi 39

Derajat bebas suatu Jumlah Kuadrat (JK) adalah banyaknya elemen independent dalam JK tersebut.

Contoh :

$$JK = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$$

JK tersebut terdiri dari n elemen, yaitu $(Y_1 - \bar{Y})$, $(Y_2 - \bar{Y})$, ..., $(Y_n - \bar{Y})$.

elemen-elemen ini tidak semuanya independent karena :

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y}) = 0$$

Jadi ada (n-1) yang independent, sehingga JK tersebut mempunyai derajat bebas (n-1).

Derajat bebas dari JK - JK pada RAK ditentukan sebagai berikut :

$$JKT = \sum_i \sum_k (Y_{ik} - \bar{Y}_{..})^2$$

JKT mempunyai a buah perlakuan dan r buah replikasi, maka JKT mempunyai ar buah elemen. Sesuai dengan definisi 39, maka JKT mempunyai derajat bebas sebesar :

(ar-1)...(2.15)

$$JKP = \sum_i \sum_k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = r \sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

JKP mempumyai a buah elemen, yaitu a perlakuan, sehingga sesuai definisi 39, JKP mempunyai derajat bebas sebesar :

(a-1)...(2.16)

$$JKK = \sum_i \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2 = a \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2$$

JKK mempunyai r buah elemen, yaitu r replikasi. Sehingga sesuai definisi 39, JKK mempunyai db sebesar :

(r-1)...(2.17)

Selanjutnya dari persamaan (2.14) diperoleh hubungan sebagai berikut :

db JKS = db JKT - db JKP - db JKK ....(2.18)

= (ar-1) - (a-1) - (r-1)

= (a-1)(r-1)

Jadi db JKS adalah (a-1)(r-1)........................(2.19)

Definisi 40

Rata-rata Jumlah Kuadrat (RJK) adalah perbandingan antara Jumlah Kuadrat (JK) dengan derajat bebas (db) dari JK tersebut.

Akibat dari definisi 40, maka rata-rata Jumlah Kuadrat untuk RAK dapat ditentukan sebagai berikut :

dari (2.15) diperoleh : $RJKT = \frac{JKT}{ar-1}$ ....(2.20)

dari (2.16) diperoleh : $RJKP = \frac{JKP}{a-1}$ ....(2.21)

dari (2.17) diperoleh : $RJKK = \frac{JKK}{r-1}$ ....(2.22) dari (2.19) diperoleh : $RJKS = \frac{JKS}{(a-1)(r-1)}$ ....(2.23)

Analisa selanjutnya adalah mencari nilai harapan dari rata-rata Jumlah Kuadrat - Jumlah Kuadrat pada RAK dengan mengingat kembali batasan bahwa $\sum_i \alpha_i = 0$ dan $\sum_k \beta_k = 0$

Dari (2.20) :

$$E(RJKT) = \frac{E(JKT)}{ar-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.24)$$

$$E(JKT) = E\left[\sum_i \sum_k (Y_{ik} - \bar{Y}_{..})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i \sum_k \left(Y_{ik} - \left[\sum_{ik}\sum Y_{ik}\right] / ar \right)^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{ik}\sum(\mu+\alpha_i+\rho_k+\delta_{ik}-\mu-\frac{1}{a}\sum_i \alpha_i - \frac{1}{r}\sum_k \rho_k - \frac{1}{ar}\sum_{ik}\sum\delta_{ik})^2\right]$$

$$= E\left[\sum\sum(\alpha_i+\rho_k+\frac{(ar-1)}{ar}\delta_{ik} - \frac{1}{ar}\sum_{i'\neq i}\sum_{k'\neq k}\delta_{i'k'})^2\right]$$

$$= \sum_i \sum_k \left[\alpha_i^2+\rho_k^2+\frac{(ar-1)^2}{ar}\sigma_\delta^2 + \frac{1}{(ar)^2}(ar-1)\sigma_\delta^2\right]$$

$$= \sum_i \sum_k \left[\alpha_i^2+\rho_k^2+\frac{(ar-1)ar}{(ar)^2}\sigma_\delta^2\right]$$

$$E(JKT) = r\sum_i \alpha_i^2 + a\sum_k \rho_k^2 + (ar-1)\sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.25)$$

Dengan demikian persamaan (2.24) menjadi :

$$E(RJKT) = \frac{1}{ar-1}\left\{ r\sum_i \alpha_i^2 + a\sum_k \rho_k^2 + (ar-1)\sigma_\delta^2 \right\}$$

$$= \frac{r}{ar-1}\sum_i \alpha_i^2 + \frac{a}{ar-1}\sum_k \rho_k^2 + \sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots(2.26)$$

Dari (2.21) diperoleh :

$$E(RJKP) = \frac{E(JKP)}{a-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.27)$$

$$E(JKP) = E\left[\sum_i \sum_k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2\right]$$

$$= E\left[r\sum_i \left(\frac{\sum_k Y_{ik}}{r} - \frac{\sum_i \sum_k Y_{ik}}{ar} \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\sum_i \left(\sum_k Y_{ik} - \frac{\sum_i \sum_k Y_{ik}}{a} \right)^2 \Big/ r \right]$$

$$= \frac{1}{r} E\left[\sum_i \left(r\mu + r\alpha_i + \sum_k \rho_k + \sum_k \delta_{ik} - r\mu - \frac{r}{a}\sum_i \alpha_i - \sum_k \rho_k - \frac{1}{a}\sum_i\sum_k \delta_{ik} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{r} E\left[\sum_i \left(r\alpha_i + \frac{a-1}{a} \sum_k \delta_{ik} - \frac{1}{a} \sum_{i' \neq i} \sum_k \delta_{i'k} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\sum_i \left(r^2 \alpha_i^2 + \frac{(a-1)^2}{a^2} r\sigma_\delta^2 + \frac{1}{a^2} (a-1)r\,\sigma_\delta^2 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\sum_i \left(r^2 \alpha_i^2 + \frac{(a-1)ar}{a^2} \sigma_\delta^2 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[r^2 \sum_i \alpha_i^2 + (a-1)r\,\sigma_\delta^2 \right]$$

$$E(JKP) = r \sum_i \alpha_i^2 + (a-1)\,\sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.28)$$

Dengan demikian (2.27) menjadi :

$$E(RJKP) = \frac{1}{a-1} \left[r \sum_i \alpha_i^2 + (a-1)\,\sigma_\delta^2 \right]$$

$$= \frac{r}{a-1} \sum_i \alpha_i^2 + \sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.29)$$

Dari (2.22) diperoleh :

$$E(RJKK) = \frac{E(JKK)}{r-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.30)$$

$$E(JKK) = E\left[\sum_i \sum_k (\bar{Y}_{.k} - \bar{Y}_{..})^2 \right]$$

$$= E\left[a \sum_k \left(\frac{\sum_i Y_{ik}}{a} - \frac{\sum_i \sum_k Y_{ik}}{ar} \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\sum_k \left(\sum_i Y_{ik} - \frac{\sum_i\sum_k Y_{ik}}{r}\right)^2 / a\right]$$

$$= \frac{1}{a} E\left[\sum_k \left(a\mu + \sum_i \alpha_i + a\rho_k + \sum_i \delta_{ik} - a\mu - \sum_i \alpha_i - \frac{a}{r}\sum_k \rho_k - \frac{1}{r}\sum_i\sum_k \delta_{ik}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{a} E\left[\sum_k \left(a\rho_k + \frac{r-1}{r}\sum_k \delta_{ik} - \frac{1}{r}\sum_i \sum_{k'\neq k} \delta_{ik'}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sum_k \left(a^2\rho_k^2 + \frac{(r-1)^2}{r^2} a\sigma_\delta^2 + \frac{1}{r^2} a(r-1)\sigma_\delta^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sum_k \left(a^2\rho_k^2 + \frac{(r-1)ar}{r^2}\sigma_\delta^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[a^2\sum_k \rho_k^2 + (r-1)a\sigma_\delta^2\right]$$

$$E(JKK) = a\sum_k \rho_k^2 + (r-1)\sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.31)$$

Dengan demikian (2.30) menjadi :

$$E(RJKK) = \frac{1}{r-1}\left[a\sum_k \rho_k^2 + (r-1)\sigma_\delta^2\right]$$

$$= \frac{a}{r-1}\sum_k \rho_k^2 + \sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.32)$$

Dari (2.14) diperoleh hubungan :

$$E[JKS] = E[JKT] - E[JKP] - E[JKK] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.33)$$

dengan mensubstitusikan (2.25),(2.28), dan (2.31) ke (2.33) diperoleh :

$$E(JKS) = r\sum_i \alpha_i^2 + a\sum_k \rho_k^2 + (ar-1)\sigma_\delta^2 - r\sum_i \alpha_i^2 - (a-1)\sigma_\delta^2$$

$$- a\sum_k \rho_k^2 - (r-1)\sigma_\delta^2$$

$$= [(ar-1) - (a-1) - (r-1)]\sigma_\delta^2$$

$$E[JKS] = (a-1)(r-1)\sigma_\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.34)$$

Dari (2.23) diperoleh hubungan :

$$E[RJKS] = \frac{E[JKS]}{(a-1)(r-1)} \qquad (2.35)$$

Sejanjutnya dengan mensubstitusikan (2.34) ke (2.35) diperoleh :

$$E[RJKS] = \frac{(a-1)(r-1)\sigma_\delta^{\ 2}}{(a-1)(r-1)}$$

$$= \sigma_\delta^{\ 2} \qquad (2.36)$$

Berdasarkan definisi-definisi dan analisa yang telah dilakukan maka dapat disusun tabel analisa ragam untuk RAK.

Tabel 2.2. Analisa Ragam Rak untuk model tetap dengan replikasi sama.

Sumber Keragaman	Derajat bebas (db)	Jumlah Kuadrat (JK)	Rata-rata JK [RJK]	E[RJK]
Perlakuan	a-1	JKP	RJKP	$\sigma_\delta^2 + \frac{r}{a-1} \sum_i \alpha_i^2$
Kelompok	r-1	JKK	RJKK	$\sigma_\delta^2 + \frac{a}{r-1} \sum_k \rho_k^2$
Sesatan	(a-1)(r-1)	JKS	RJKS	σ_δ^2
Total	ar-1	JKT	-	-

2.3.4.2. Uji Hipotesa Perlakuan pada R A K

Apabila akan diselidiki apakah pengaruh perlakuan berbeda nyata atau tidak, maka dari tabel 2.2 diambil :

$$F = \frac{E(RJKP)}{E(RJKS)} \qquad (2.37)$$

Definisi 41

Hipotesa nol (H_o) dan hipotesa tandingannya (H_1) untuk RAK didefinisikan :

H_o : $\alpha_i = 0$, dimana i = 1,2,3 ... ,a

H_1 : minimal ada salah satu dari α_i tidak sama dengan 0.

Atau dengan perkataan lain :

H_0 : pengaruh perlakuan tidak berbeda nyata

H_1 : pengaruh perlakuan berbeda nyata

Karena E(RJKP) dapat diduga dengan RJKP dan E(RJKS) dapat diduga dengan RJKS, maka persamaan (2.37) menjadi :

$$F = \frac{RJKP}{RJKS}$$

$$= \frac{JKP \;/\; (a-1)}{JKS \;/\; (a-1)(r-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.38)$$

Mengacu pada definisi 35 maka pengamatan-pengamatan Y_{ik} akan berdistrbusi normal independen dengan rata-rata $\mu + \alpha_i$ dan varians σ^2. Sehingga apabila H_0 benar dimana $\alpha_i = 0$ maka Y_{ij} berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varians σ^2, yang berakibat bahwa JKT, JKP, JKK dan JKS merupakan jumlahan dari kuadrat variabel-variabel yang berdistribusi normal.

Sesuai theorema 5, jika H_0 : α_i = 0 benar maka :

$$\frac{JKP}{\sigma^2} = \frac{(a-1)\;RJKP}{\sigma^2}$$ akan berdistribusi Khi-kuadrat

dengan db = a − 1 $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.39)$

$$\frac{JKS}{\sigma^2} = \frac{(a-1)(r-1)\;RJKS}{{}^2}$$ akan berdistribusi

Khi-kuadrat dengan db = (a − 1)(r − 1) $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.40)$

sesuai dengan definisi 23 maka :

$$F = \frac{RJKP}{RJKS} = \frac{JKP / (a-1)}{JKS / (a-1)(r-1)}$$

akan berdistribusi F dengan db = ((a - 1);(a - 1)(r-1)) Selanjutnya persamaan 2.38 merupakan uji statistik untuk hipotesa kesamaan dari rata-rata perlakuan pada RAK dan disebut juga F_{hitung} disingkat F_{hit}.

F_{hit} ini akan dibandingkan dengan F_{tabel} dengan derajat bebas ((a - 1);(a - 1)(r - 1)) dengan tingkat kepercayaan α, yang dinotasikan

$$F_{\alpha}\ [(a - 1);(a - 1)(r - 1)]$$

Dari perbandingan (2.37) apabila H_o ditolak maka F > 1, karena $\sum_i \alpha_i^2 \geq 0$, sehingga disimpulkan tolak H_o jika :

$$F_{hit} > F_{\alpha}\ [(a - 1);(a - 1)(r - 1)] \quad \text{........(2.41)}$$

Contoh percobaan menggunakan RAK :

Suatu percobaan di bidang pertanian tentang pengaruh berbagai campuran ransum (makanan), katakanlah campuran A, B, C dan D terhadap pertambahan berat badan sapi *P.O. Kereman*. Sapi yang digunakan untuk percobaan dikelompokkan menjadi 4 kelompok sesuai umur sapi, sebagai berikut:

kelompok 1 : umur (6 - 10) bulan

kelompok 2 : umur (11 - 15) bulan

kelompok 3 : umur (16 - 20) bulan

kelompok 4 : umur (21 - 25) bulan.

Dalam setiap kelompok tersebut ada 10 sapi yang diamati, dimana setelah 4 bulan pengamatan diperoleh hasil rata-rata pertambahan berat (dalam kg) sebagai berikut :

Tabel 2.8 Data Hasil Percobaan dengan RAK

Makanan	Kelompok					Rata - rata
	1	2	3	4	Jumlah	
A	42,7	41,5	38,2	30,8	153,2	38,2
B	41,5	42,6	35,6	34,9	154,6	38,65
C	49,6	47,2	39,7	38,9	175,4	43,85
D	39,2	40,1	34,7	30,2	144,2	36,3
Jumlah	173,0	171,4	148,2	134,8	627,4	-
Rata-rata	43,25	42,85	37,05	33,7	-	39,84

Berdasarkan hasil percobaan di atas, analisa data dilakukan sebagai berikut :

1. Model

Asumsi bahwa yang diteliti dalam percobaan tersebut hanyalah berurusan dengan keempat macam makanan, maka model yang dihadapi adalah model tetap. Model linier untuk percobaan di atas :

$$Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \rho_k + \delta_{ik} \quad ; \; i = 1, 2, \ldots ,4$$
$$k = 1, 2, \ldots ,4$$

dimana :

Y_{ik} = pertambahan berat badan sapi pada kelompok ke-kdan campuran makanan ke-i

μ = rata-rata umum (keseluruhan)

α_i = efek perlakuan makanan ke-i

ρ = efek kelompok sapi (kelompok umur)

δ_{ik} = pengaruh galat percobaan pada sapi kelompok ke-k dan makanan ke-i.

Asumsi yang mendasar dari model di atas adalah :

$\delta_{ik} \sim NID\ (0, \sigma_\delta^2)$

2. Analisa Ragam.

Prosedur analisa ragam dilakukan sebagai berikut :

a. Menghitung FK dan JKT sebagai berikut :

$$FK = \frac{Y_{..}^2}{ar} = \frac{(637,4)^2}{16} = 24601,92$$

$$JKT = \sum_i \sum_k Y_{ik}^2 - FK$$

$$= (42,7)^2 + \ldots + (30,2)^2 - 24601,92$$

$$= 411,95$$

$$JKP = \frac{\sum_i Y_{i.}^2}{r} - FK$$

$$= \frac{(153,2)^2 + \ldots + (144,2)^2}{4} - 24601,92$$

$$= 130,63$$

$$JKK = \frac{\sum_k Y_{.k}^2}{a} - FK$$

$$= \frac{(173,0)^2 + \ldots + (134,8)^2}{4} - 24601,92$$

$$= 258,39$$

$$JKS = JKT - JKP - JKK$$

$$= 411,95 - 130,63 - 258,39$$

$$= 22,93$$

b. Menentukan derajad bebas (db) untuk setiap komponen sumber keragaman.

db kelompok = r - 1 = 4 - 1 = 3

db perlakuan = a - 1 = 4 - 1 = 3

db galat = (a - 1)(r - 1) = 9

c. Menentukan rata-rata Jumlah Kuadrat (RJK) untuk setiap komponen sumber keragaman :

$$RJKK = \frac{JKK}{r-1} = \frac{258,39}{3} = 86,13$$

$$RJKP = \frac{SKP}{a-1} = \frac{130,63}{3} = 43,54$$

$$RJKK = \frac{JKS}{(a-1)(r-1)} = \frac{22,93}{9} = 2,55$$

d. Menyusun daftar analisa ragam sebagai berikut :

sumber keragaman	db	JK	RJK	F_{hit}	F tabel 5%	F tabel 1%
Kelompok	3	258,39	86,13	-		
Perlakuan	3	130,63	43,54	17,07**	3,86	6,99
Galat	9	22,93	2,55			
Total	15	411,95	-	-		

** = sangat nyata pada α = 0,01.

3. Kesimpulan.

Karena F_{hitung} lebih besar dari pada F_{tabel}, maka disimpulkan ada perbedaan yang nyata diantara perlakuan-perlakuan yang diamati (dalam hal ini makanan).

2.3.4.3. Uji Beda Nyata Terkecil (BNT)

Apabila uji hipotesa yang dilakukan menolak hipotesa nol (H_o) maka perlu dilakukan pengujian tentang nilai rata-rata perlakuan mana yang berbeda. Dalam masalah ini digunakan uji beda nyata terkeci (BNT).

Definisi 42

Apabila setiap perlakuan dari suatu percobaan mempunyai ulangan yang sama yaitu n, dan derajat bebas galat percobaan adalah v, maka formula untuk menghitung nilai BNT pada taraf nyata α adalah :

$$BNT_{(\alpha)} = t_{(v;\alpha)}\sqrt{2\,\frac{RJKS}{n}}$$

Didalam melakukan pengujian,apabila harga mutlak dari selisih dua nilai tengah perlakuan lebih besar dari harga $BNT_{(\alpha)}$ maka dikatakan dua nilai tengah tersebut berbeda nyata.

Contoh :

Sebagai gambaran penggunaan Uji BNT , akan digunakan data pada Tabel 2.3 mengenai pengaruh makanan terhadap pertambahan berat badan sapi *P.O. Kereman.*

Dari data tersebut diperoleh :

banyaknya replikasi perlakuan (n) = 4

Rata-rata Jumlah Kuadrat Sesatan (RJKS) = 2,55

derajat bebas galat = 9

maka :

$$BNT_{(5\%)} = t_{(9;5\%)}\sqrt{2\left(\frac{2,55}{4}\right)}$$
$$= 2,262 \times 1,129$$
$$= 2,554$$

Bila akan dianalisa pengaruh antara makanan A dan makanan B berbeda atau tidak, maka selisih harga mean-nya adalah :

$$|\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.}| = |38,65 - 38,2|$$
$$= 0,45$$

Karena $|\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.}| < BNT_{(5\%)}$ maka disimpulkan bahwa antara makanan A dan makanan B tidak memberikan pengaruh yang berbeda nyata terhadap pertambahan berat sapi.