BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. STRATEGI CAMPURAN

Strategi campuran adalah strategi dimana ada lebih dari satu strategi yang harus dipilih.

Nilai permainan adalah nilai yang diperoleh P_1 (pemain 1), sehingga P_1 harus memaksimalkan kemenangan dan P_2 harus meminimalkan kekalahan.

CONTOH 2.1

Pandang matrik permainan sebagai berikut :

		P_2	
		s_1	s_2
P_1	s_1	1	-1
	s_2	-1	1

Matrik ini jelas tidak mempunyai titik pelana karena $\underset{x}{\text{maks}}\ \underset{y}{\text{min}}\ E(X,Y) \neq \underset{y}{\text{min}}\ \underset{x}{\text{maks}}\ E(X,Y)$, sehingga tidak dapat ditentukan strategi optimal bagi masing-masing pemain. Misalkan P_1 memilih strategi ke-1 dengan peluang $\frac{1}{2}$ dan memilih strategi ke-2 dengan peluang $\frac{1}{2}$ juga. Maka jika P_2 memilih strategi ke-1, maka ekspektasi matematik untuk P_1 adalah :

$$E_{P_1} = 1.\frac{1}{2} + (-1).\frac{1}{2} = 0$$

Demikian pula jika P_2 memilih strategi ke-2, diperoleh ekspektasi matematik untuk P_1 sebesar nol juga.

Dengan demikian jika P_1 memilih strategi ke-1, dengan peluang $\frac{1}{2}$ dan strategi ke-2 dengan peluang $\frac{1}{2}$ juga, maka

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

ia memastikan diri mendapat perolehan sebesar nol, tidak peduli apapun pilihan P_2.

Secara umum misalkan P_1 memilih strategi 1 dengan kemungkinan x dan memilih 2 dengan kemungkinan 1-x, maka :

Jika P_2 memilih 1, berlaku $E_{P_1} = 1.x + (-1).(1-x) = 2x-1$

Jika P_2 memilih 2, berlaku $E_{P_1} = (-1).x + 1.(1-x) = 1-2x$

Adapun jika $x > \frac{1}{2}$, maka :

Jika P_2 memilih strategi 1, berlaku : $E_{P_1} > 0$,

Jika P_2 memilih strategi 2, berlaku : $E_{P_1} < 0$.

Dengan demikian strategi optimal P_1 adalah memilih 1 atau 2 dengan peluang masing-masing $\frac{1}{2}$, dengan nilai permainannya sebesar nol.

Adapun dengan cara yang sama, strategi optimal bagi P_2 dapat ditentukan.

CONTOH 2.2

Selanjutnya matrik permainan sebagai berikut :

		P_2	
		s_1	s_2
P_1	s_1	1	3
	s_2	4	2

Misalkan P_1 memilih strategi 1 dengan kemungkinan x dan strategi 2 dengan kemungkinan 1-x. Juga misalkan P_2 memilih strategi 1 dengan kemungkinan y dan strategi 2 dengan kemungkinan 1-y. Maka :

$$E(X,Y) = 1.x.y + 3.x.(1-y) + 4.(1-x).y + 2(x-1).(1-y)$$

$$= -4xy + x + 2y + 2$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= -4(x-\tfrac{1}{2})\ (y-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{5}{2}$$

Dari persamaan itu, jika P_1 mengambil $x = \frac{1}{2}$ dan P_2 dengan $y = \frac{1}{4}$, maka P_1 dipastikan memperoleh kemenangan minimal $\frac{5}{2}$ sedangkan jika itu terjadi, maka P_2 menderita kekalahan maksimal sebesar $\frac{5}{2}$

Jadi strategi optimal P_1 setelah memilih strategi 1 dengan peluang $\frac{1}{2}$ atau strategi 2 dengan peluang $\frac{1}{2}$ juga, dan ditulis $\left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right]$. Adapun strategi optimal P_2 adalah $\left[\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4}\right]$ dan nilai permainannya sebesar $\frac{5}{2}$.

Selanjutnya kita melangkah ke metode yang lebih umum. Misalkan diberikan matrik permainan $A = \left[\ a_{ij}\ \right]$, dimana bilangan-bilangan asli $i = 1,2,\ldots,m$ adalah strategi murni untuk P_1 dan $j = 1,2,\ldots,n$ adalah strategi murni untuk P_2. Selanjutnya misalkan strategi campuran untuk P_1 adalah $X = \left[\ x_1 \quad x_2 \ \ldots\ x_m\ \right]$, dengan sifat bahwa : $\sum x_i = 1$, dan strategi campuran P_2 adalah $Y = \left[\ y_1 \quad y_2 \ \ldots\ y_n\ \right]$ dengan sifat bahwa : $\sum y_j = 1$, dan x_i, y_j masing-masing bilangan real non negatif.

Jika P_1 dan P_2 menggunakan strategi campuran itu, maka ekspektasi dari P_1 jika disajikan dalam bentuk matrik :

$$E\ (X,Y) = \left[\ x_1 \quad x_2 \ \ldots\ x_m\ \right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$E\ (X,Y) = X\ A\ Y$$

Sedangkan jika disajikan dalam notasi sigma :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$E(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; x_i \; y_j$$

Andaikan X^* dan Y^* disebut strategi optimal campuran berturut-turut untuk P_1 dan P_2, dan $E(X^*, Y^*)$ disebut nilai permainan. Sehingga dengan menggunakan X^*, P_1 dengan yakin akan menerima paling sedikit $E(X^*, Y^*)$, terhadap pilihan P_2, hal yang sama dengan menggunakan Y^*, P_2 dapat menahan P_1 untuk memperoleh tidak lebih dari $E(X^*, Y^*)$, maka berlaku :

$$E(X, Y^*) \le E(X^*, Y^*) \le E(X^*, Y)$$

2.2. LATAR BELAKANG GEOMETRI

Ruang Euclidean berdimensi n (E_n) diartikan sebagai kumpulan semua n pasangan ($x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$), dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ masing-masing adalah bilangan real.

Jika $X^{(1)}$ ($x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^{(1)}$) dan $X^{(2)}$ ($x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n^{(2)}$) adalah dua titik di E_n, maka didefinisikan konsep jarak antara $X^{(1)}$ dan $X^{(2)}$ sebagai berikut :

$$d(X^{(1)}, X^{(2)}) = [(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + \ldots + (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2]^{1/2}$$

DEFINISI 2.1

Himpunan $X \subset E_n$ dikatakan himpunan terbatas jika ada bilangan M sehingga untuk setiap titik :

$X^{(1)}, X^{(2)} \in X$ berlaku $d(X^{(1)}, X^{(2)}) \le M$.

DEFINISI 2.2

Titik $X \in E_n$ adalah titik limit dari $A \subset E_n$, jika

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat titik $Y \in A$ (yang berbeda dengan titik X) sehingga $d(X, Y) < \varepsilon$.

CONTOH 2.3

Jika A adalah kumpulan dari titik-titik (x , y) dari E_2, dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$, maka setiap titik dari (x_o , y_o), jika berlaku : $x_o^2 + y_o^2 = 1$ maka ia merupakan titik limit dari A.

DEFINISI 2.3

Closure (penutup) suatu himpunan adalah himpunan yang diperoleh dengan menambahkan titik limitnya.

CONTOH 2.4

A adalah kumpulan dari titik-titik (x , y) dari E_2, dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$. Jadi penutup himpunan A adalah $x^2 + y^2 \leq 1$.

DEFINISI 2.4

Suatu himpunan dikatakan tutup (closed) jika himpunan itu sama dengan penutupnya.

CONTOH 2.5

A adalah kumpulan dari titik-titik (x , y) dari E_2, dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$. Jadi himpunan tutup dari A adalah $x^2 + y^2 \geq 1$.

DEFINISI 2.5

Suatu himpunan dikatakan buka (open) jika komplemen himpunan itu bersifat tutup.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 2.6

A adalah kumpulan dari titik-titik (x , y) dari E_2, dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$, maka A merupakan himpunan buka.

CONTOH 2.7

Kumpulan titik $X \in E_1$, sehingga : $0 < x \leq 1$ adalah kumpulan yang bersifat buka dan sekaligus tutup atau bersifat tidak buka dan sekaligus tidak tutup.

DEFINISI 2.6

Interior suatu himpunan adalah komplemen dari penutup dari komplemen himpunan itu.

CONTOH 2.8

Interior kumpulan titik $X \in E_1$ yaitu $0 < x \leq 1$ adalah kumpulan titik $X \in E_1$, sehingga $0 < x < 1$

DEFINISI 2.7

Batas suatu himpunan adalah irisan antara penutup dengan penutup komplemennya.

CONTOH 2.9

A adalah kumpulan dari titik-titik (x , y) dari E_2 , dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$. Jadi batas himpunan A adalah $x^2 + y^2 = 1$

DEFINISI 2.8.

Suatu himpunan dikatakan tersambung (connected), jika tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan yang mutually exclusive dan juga tidak

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

memuat titik limit satu sama lain.

CONTOH 2.10

A adalah kumpulan dari titik-titik (x , y) dari E_2, dan berlaku $x^2 + y^2 < 1$, maka A dikatakan tersambung

CONTOH 2.11

C adalah kumpulan semua titik (x , y) dari E_2, sehingga $x \neq 0$.

C tidak dikatakan tersambung, karena misalkan $C_1 \subset E_2$ sehingga $x > 0$, dan $C_2 \subset E_2$ sehingga $x < 0$, maka $C_1 \cup C_2 = C$, dan kumpulan C_1 maupun C_2 memuat titik limit satu sama lain.

DEFINISI 2.9

Misalkan : $X^{(1)} \quad (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots\ldots\ldots, x_n^{(1)})$

$X^{(2)} \quad (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots\ldots\ldots, x_n^{(2)})$

$\vdots$

$X^{(r)} \quad (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots\ldots\ldots, x_n^{(r)})$

dan $X \quad (x_1 , x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$ adalah titik dari E_n, serta $a_i \in [0,1]$, untuk $i = 1, .., r$ dan $\sum a_i = 1$ serta pandang :

$x_j = a_1 x_j^{(1)} + a_2 x_j^{(2)} + \ldots + a_r x_j^{(r)}$, untuk $j = 1,2, .., n$. Maka titik X adalah kombinasi konvek dari titik-titik $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(r)}$ dengan bobot $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dan ditulis sebagai :

$X = a_1 X^{(1)} + a_2 X^{(2)} + \ldots + a_r X^{(r)}$.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 2.12

Titik (-1 , 2 , 11) dari E_3 adalah kombinasi konvek dengan bobot $\frac{1}{3}$ dan $\frac{2}{3}$ dari titik-titik (3 , 6 , 9) dan (-3 , 0 , 12).

DEFINISI 2.10

$X \subset E_n$ dikatakan himpunan konvek jika setiap kombinasi konvek dari semua titik di X adalah titik di X.

CONTOH 2.13

Himpunan A yang terdiri dari semua titik (x , y) sehinggga : $x^2 + y^2 < 1$, dan himpunan B yang terdiri dari semua titik (x , y) sehinggga : $x^2 + y^2 \leq 1$, maka kedua himpunan itu adalah konvek.

DEFINISI 2.11

Konvek hull suatu himpunan X adalah irisan semua himpunan konveknya. Dengan kata lain konvek hull adalah himpunan konvek terkecil yang memuat himpunan X.

CONTOH 2.14

Konvek hull dari $x^2 + y^2 = 1$ dan $D \subset E_2$ adalah kumpulan semua titik dari E_2 sehingga $x^2 + y^2 \leq 1$.

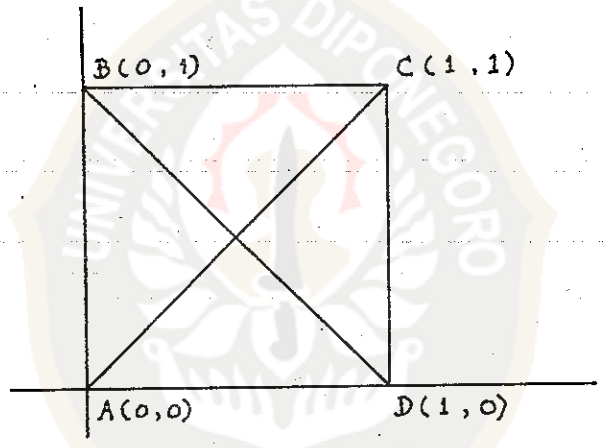
Karena E_n konvek maka setiap himpunan termuat di dalam paling sedikit satu himpunan konvek, sehingga setiap himpunan mempunyai konvek hull. Dapat ditunjukkan konvek

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

hull dari $X \subset E_n$ memuat titik-titik yang merupakan kombinasi konvek dari titik-titik X.

CONTOH 2.15

Pandanglah X yang terdiri dari titik - titik (0 , 0), (0 , 1), (1 , 0) dan (1 , 1), yang masing-masing merupakan elemen dari E_2, yaitu berbentuk bujur sangkar seperti terlihat pada gambar sebagai berikut



Dari gambar terungkap bahwa konvek hull X adalah keseluruhan dari bujursangkar itu termasuk batas-batasnya. Setiap titik dari segitiga A B D dapat diwakili sebagai kombinasi konvek dari 3 titik yaitu : A, B, dan D. Hal yang sama berlaku pula untuk segitiga B C D, yang dapat diwakili sebagai kombinasi konvek dari tiga titik yaitu B, C dan D. Sedangkan titik ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$), yang tidak terletak pada batas bujursangkar itu, dan juga tidak terletak pada diagonal AC dan BD, maka titik itu tidak dapat diwakili sebagai kombinasi dari 2 titik di X.

DEFINISI 2.12

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah n bilangan real yang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

semuanya tidak bernilai nol, b bilangan real juga, maka kumpulan semua titik (x_1, x_2,.., x_n) dari E_n sehingga berlaku $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, disebut sebagai hyperplane dari E_n.

CONTOH 2.16

Kumpulan titik (a , b , c , d) sehingga berlaku : $2a + 3b - 7c + d = 7$, adalah hyperplane dari E_4.

DEFINISI 2.13

Misalkan $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, adalah persamaan hyperplane, maka yang dimaksud dua buah setengah ruang yang berkaitan (the two half-space corresponding) dengan hyperplane, adalah :

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > b$, dan juga

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b$,

2.3. FUNGSI DISTRIBUSI

Fungsi F dikatakan fungsi distribusi komulatif atau lebih sederhana disebut fungsi distribusi digunakan untuk memberikan gambaran proses random untuk memilih bilangan dari [0, 1], untuk semua a dalam [0, 1]. F(a) adalah probabilitas memilih bilangan terbesar sama dengan a. F(0) = 0 dimana F(0) adalah probabilitas untuk memilih bilangan real dari 0 dan tidak akan lebih besar dari 0. Jika $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, maka terlihat :

$F(x_2) - F(x_1)$ = probabilitas $\{ x_1 < a \leq x_2 \}$

$F(x_2) - F(0)$ = probabilitas $\{ 0 \leq a \leq x_2 \}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

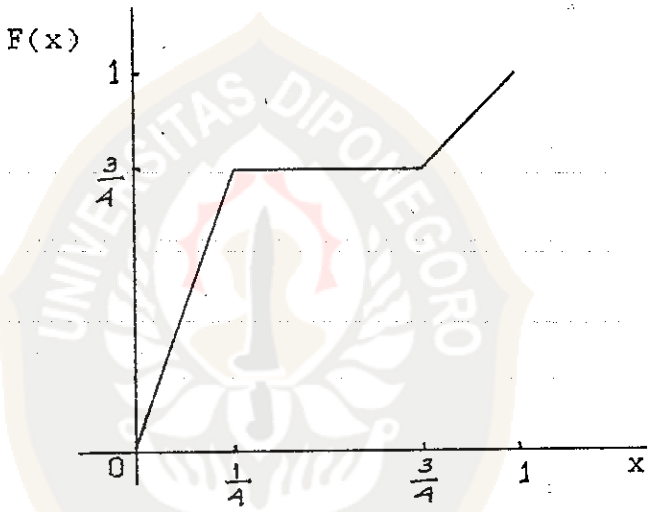
CONTOH 2.17

Fungsi distribusi F memenuhi kondisi :

$$F(x) = 3x \text{ , untuk } 0 \le x \le \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \frac{3}{4} \text{ , untuk } \frac{1}{4} < x \le \frac{3}{4}$$

$$F(x) = x \text{ , untuk } \frac{3}{4} < x \le 1$$



Interval rata - rata pada grafik ini adalah untuk $F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4}) = 0$, karena itu probabilitas memilih bilangan yang terletak dalam interval $\frac{1}{4} < x \le \frac{3}{4}$ adalah 0.

Perhatikan bahwa fungsi dalam contoh 2.17 adalah non decreasing karena $F(x_1) \le F(x_2)$ untuk $x_1 \le x_2$ (kurva itu miring keatas). Benar juga jika dilihat dari setiap fungsi distribusi, jika untuk $x_1 \le x_2$ maka probabilitas memilih bilangan terletak dalan $[0, x_2]$ harus lebih besar dari probabilitas yang terletak dalam $[0, x_1]$.

Supaya lebih sederhana disebut increasing.

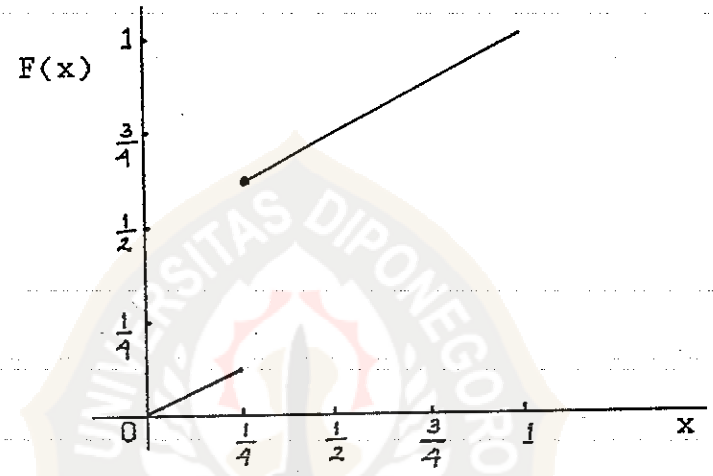
This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 2.18

Fungsi distribusi F memenuhi kondisi :

$F(x) = \frac{1}{2}\, x$, untuk $x < \frac{1}{4}$

$F(x) = \frac{1}{2}\,(1+x)$, untuk $x \geq \frac{1}{4}$



Gambar diatas adalah fungsi distribusi diskontinu . Terlihat titikberat pada bagian kiri dari garis di atas ditunjukkan $F(\frac{1}{4})$ adalah $\frac{5}{8}$, bukan $\frac{1}{8}$

Grafik ini juga memiliki lompatan di $x = \frac{1}{4}$, dimana probalitas titiknya terbatas (tidak nol) dari fungsi distribusi.

Kita perhatikan bahwa kedua grafik melalui titik (1 , 1). Harus demikian untuk semua fungsi distribusi, yaitu untuk setiap fungsi distribusi F diperoleh F(1) = 1. Ini mengikuti definisi dari fungsi distribusi, untuk pilihan dalam interval [0, 1], oleh karena itu akan membuat pilihan tidak akan lebih besar daripada 1.

Selain itu definisi khusus dari fungsi distribusi bahwa grafik harus melalui titik (0 , 0).

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Fungsi F disebut right - hand kontinu pada titik x

jika : $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x + \varepsilon) = F(x)$$

dan Fungsi F disebut left - hand kontinu pada titik x

jika : $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x - \varepsilon) = F(x)$$

Fungsi grafik pada contoh 2.18 adalah right - hand kontinu tetapi tidak left - hand kontinu pada $x = \frac{1}{4}$.

TEOREMA 2.1

Setiap fungsi distribusi adalah right - hand kontinu pada semua titik dalam interval terbuka (0, 1).

BUKTI :

Dinyatakan F fungsi distribusi, dan dinyatakan $0 < x < 1$.

ingin ditunjukkan bahwa :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \{F(x + \varepsilon) - F(x)\} = 0$$

Sekarang persamaan :

$$F(x + \varepsilon) - F(x)$$

didefinisikan dari fungsi distribusi, probabilitas bilangan z dipilih termasuk dalam fungsi distribusi, memenuhi pertidaksamaan : $x < z \leq x + \varepsilon$

Untuk pemberian z diperoleh ε positif dimana cukup besar yang memenuhi pertidaksamaan diatas tak dapat ditentukan. Karena itu probabilitas z akan memenuhi pertidaksamaan ini

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

mendekati 0 seperti juga ε mendekati 0, maka terbukti bahwa :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \{F(x + \varepsilon) - F(x)\} = 0$$

Jadi terlihat bahwa fungsi distribusi F selalu memenuhi kondisi berikut :

i. Untuk beberapa x dalam [0, 1]. F(x) adalah bilangan real non negatif.

ii. F(0) = 0 dan F(1) = 1

iii. F adalah non decreasing fungsi dalam interval [0, 1]

iv. F adalah right-hand kontinu dalam interval terbuka (0, 1).

TEOREMA 2.2

Setiap urutan dari fungsi distribusi memuat kekonvergenan untuk fungsi distribusi F pada setiap titik kontinu dari F.

BUKTI :

Diketahui secara tepat pecahan dapat diurutkan dalam urutan tidak berhingga. Dapat ditunjukkan dengan contoh, pertama ditulis secara tepat angka penyebut dari pecahan (yaitu , $\frac{1}{2}$) adalah 2, kemudian agar besarnya pecahan tepat, angka penyebutnya 3, kemudian angka penyebutnya 4 dan seterusnya. Jadi diperoleh :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \ldots$

sudah jelas, secara tepat setiap pecahan diberikan dalam cara berikut.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Sekarang dinyatakan : r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ...
menyebut satu demi satu secara tepat dari pecahan, dan dinyatakan :

$$G_1,\ G_2,\ G_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ G_n, \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Urutannya berubah-ubah sesuai fungsi distribusi.

Pertama diperoleh urutan bilangan :

$$G_1(r_1),\ G_2(r_1),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ G_n(r_1),\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Urutan ini adalah tidak berhingga dan terbatas, berisi urutan konvergen :

$$G_{i_1}(r_1),\ G_{i_2}(r_1),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ G_{i_n}(r_1),\ \ldots\ldots\ldots$$

Terdapat pasangan

$$F_n^{(1)}(x) = G_{i_n}(x),\ \text{untuk } n = 1,2,3,\ \ldots$$

Terlihat urutan :

$$F_1^{(1)},\ F_2^{(1)},\ \ldots\ldots,\ F_n^{(1)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

yang berikutnya dari (1), konvergen untuk limit pada titik r_1. Coba pikirkan dari bilangan berikut :

$$F_1^{(1)}(r_2),\ F_2^{(1)}(r_2),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ F_n^{(1)}(r_2),\ \ldots$$

seperti sebelumnya, terlihat bahwa urutan ini berisi sebagai berikut :

$$F_{i_1}^{(1)}(r_2),\ F_{i_2}^{(1)}(r_2),\ \ldots\ldots\ldots,\ F_{i_n}^{(1)}(r_2),\ \ldots$$

adalah konvergen.

Sekarang diperoleh pasangan :

$$F_n^{(2)}(x) = F_{i_n}^{(1)}(x),\ \text{untuk } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

Disimpulkan bahwa urutannya :

$$F_1^{(2)},\ F_2^{(2)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ F_n^{(2)},\ \ldots\ldots\ldots$$

yang berikutnya dari (1), konvergen untuk limit pada r_2 seperti pada r_1.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Kekontinuan dalam cara ini diperoleh urutan dari urutannya :

$$
\begin{array}{llllll}
F_1^{(1)}, & F_2^{(1)}, & F_3^{(1)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & F_n^{(1)}, & \ldots\ldots\ldots \\
F_1^{(2)}, & F_2^{(2)}, & F_3^{(2)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & F_n^{(2)}, & \ldots\ldots\ldots \\
F_1^{(3)}, & F_2^{(3)}, & F_3^{(3)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & F_n^{(3)}, & \ldots\ldots\ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
F_1^{(m)}, & F_2^{(m)}, & F_3^{(m)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & F_n^{(m)}, & \ldots\ldots\ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Dari urutan yang pertama sampai yang ke m konvergen untuk limit pada r_1, r_2, ..., r_m. Dari urutan ini dan urutan berikutnya terbentuk urutan diagonal.

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ F_n,\ \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Diperoleh pasangan

$$F_n = F_n^{(n)}, \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jelas bahwa (2) berasal dari (1). Selain itu, dari tiap m semua bilangan berhingga untuk elemen dari (2) untuk urutan :

$$F_1^{(m)},\ F_2^{(m)},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ F_n^{(m)}$$

Karena itu urutan (2) konvergen untuk limit secara tepat semua pecahan.

Didefinisikan fungsi ϕ berpasangan dengan r secara tepat pecahan.

$$\phi\,(r) = \lim_{n \to \infty} F_n\,(r) \qquad (3)$$

kemudian didefinisikan fungsi F diatas semua bilangan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dalam unit interval terbuka, diperoleh pasangan dari x beberapa bilangan berikut

$$F(x) = \inf_{r>x} \phi(r) \tag{4}$$

Juga diperoleh pasangan

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Untuk membuktikan teorema cukup ditunjukkan F adalah fungsi distribusi dan (2) konvergen untuk F pada setiap titik kontinu F.

Ditunjukkan F adalah fungsi distribusi, cukup ditunjukkan non decreasing dan right - hand kontinu sebab sudah diperoleh persamaan (5).

Jika x dan y adalah bilangan dimana $x < y$. maka kumpulan A_y dari seluruh bilangan rasional terbesar y adalah subset dari kumpulan A_x dari seluruh bilangan rasional terbesar x, karena itu

$$\inf_{r \in A_x} \phi(r) \leq \inf_{r \in A_y} \phi(r)$$

atau dari (4)

$$F(x) \leq F(y)$$

jadi F non decreasing

Selanjutnya ditunjukkan bahwa F adalah right - hand kontinu, pertama ingat fungsi ϕ, dengan definisi (3) adalah non decreasing. Sekarang diandaikan

$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

adalah urutan decreasing dari limit bilangan adalah titik x dari (0, 1), ditunjukkan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n)$$

Dari (4) terlihat, untuk setiap $\varepsilon > 0$ disini ada bilangan rasional r seperti

$$r > x \tag{6}$$

$$\phi(r) - F(x) < \varepsilon \tag{7}$$

Jika sekarang dinyatakan N integer lebih besar dari pada $x < x_N < r$, terlihat untuk semua $n > N$.

$$x < x_n < r$$

Karena itu pengandaian salah, terbukti F adalah non decreasing dan bentuk (4) menjadi

$$F(x) \leq F(x_n) \leq \phi(r) \tag{8}$$

Dari (7) dan (8) disimpulkan bahwa untuk $n > N$

$$0 \leq F(x_n) - F(x) \leq \varepsilon$$

Maka dari itu

$$\lim_{n \to \infty} \{ F(x_n) - F(x) \} = 0$$

Terbukti persamaan diatas right - hand kontinu.

Sebelum pembuktian yang terakhir, ada catatan menurut (4), untuk r rasional, x berubah ubah dan $r < x$ diperoleh

$$\phi(r) \leq F(x) \tag{9}$$

Sekarang akan ditunjukkan, akhir urutan diagonal (2) konvergen untuk F pada setiap titik kontinu dari F. Dinyatakan x titik kontinu dari F dan ε bilangan positif yang berubah-ubah. Untuk (4) juga terlihat, bahwa terdapat rasional r seperti $r > x$ dan

$$0 \leq \phi(r) - F(x) \leq \frac{\varepsilon}{6} \tag{10}$$

Untuk F kontinu pada x, terlihat ada y, sehingga $y < x$ dan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$0 \le F(x) - F(y) \le \frac{\varepsilon}{6} \qquad (11)$$

Sekarang dinyatakan bilangan rasional seperti

$$y < s < x \qquad (12)$$

Dari (12) disimpulkan, lihat juga (4) dan (9)

$$F(y) \le \phi(s) \le F(x) \qquad (13)$$

Kemudian dari (11) dan (13) diperoleh :

$$0 \le F(x) - \phi(s) \le \frac{\varepsilon}{6} \qquad (14)$$

Dari (3) didapatkan integer N, dan n > N

$$| \phi(r) - F_n(r) | \le \frac{\varepsilon}{6} \text{ dan} \qquad (15)$$

$$| \phi(s) - F_n(s) | \le \frac{\varepsilon}{6} \qquad (16)$$

Selain itu F_n adalah fungsi distribusi dan karena itu non decreasing

$$F_n(s) \le F_n(x) \le F_n(r) \qquad (17)$$

Dari (16) , (14), (10) dan (15) diperoleh :

$$\begin{aligned} |F_n(s) - F_n(r)| &\le |F_n(s) - \phi(s)| + |\phi(s) - F(x)| + \\ &\quad |F(x) - \phi(r)| + |\phi(r) - F_n(r)| \\ &\le 4\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) \\ &\le \frac{2}{3}\varepsilon \end{aligned} \qquad (18)$$

Dari (17) dan (18), diperoleh :

$$| F_n(x) - F_n(s) | \le \frac{2}{3}\varepsilon \qquad (19)$$

Dari (14), (16) dan (19) akhirnya disimpulkan umtuk semua n > N

$$\begin{aligned} | F(x) - F_n(x) | &\le | F(x) - \phi(s) | + | \phi(s) - F_n(s) | + \\ &\quad | F_n(s) - F_n(x) | \\ &\le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2}{3}\varepsilon \\ &\le \varepsilon \end{aligned}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Oleh karena itu terbukti :

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$

TEOREMA 2. 3

Jika $\{F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n\}$ kumpulan dari fungsi distribusi, $a_i \in [0, 1]$, untuk $i = 1, \ldots n$ dan $\sum a_i = 1$ serta fungsi F didefinisikan untuk semua $x \in [0, 1]$

$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots\ldots + a_n F_n(x)$

maka F merupakan fungsi distribusi

BUKTI :

$F_i \subset D$ (untuk $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$) F_i memenuhi 4 kondisi yang telah ditentukan. Untuk membuktikan $F \subset D$, hanya perlu dibuktikan F juga memenuhi 4 kondisi yang diberikan:

(i) Karena $F_i(x)$ fungsi distribusi, maka $F_i(x) \geq 0$, dan $a_i \geq 0$. Jadi dapat disimpulkan $F(x) \geq 0$

(ii) Karena $F_i(x)$ fungsi distribusi maka $F_i(1) = 1$ dan $F_i(0) = 0$

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + \ldots\ldots + a_nF_n(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_iF_i(x)$$

$$F(1) = \sum_{i=1}^{n} a_iF_i(1)$$

$$= 1$$

$$F(0) = \sum_{i=1}^{n} a_iF_i(0)$$

$$= 0$$

Jadi $F(1) = 1$ dan $F(0) = 0$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

(iii) Untuk menunjukkan F adalah non decresing dinyatakan u dan v bilangan dalam [0 , 1] sehingga $u \geq v$, ingin ditunjukkan $F(u) \geq F(v)$.

Karena F_i non decreasing maka $F_i(u) \geq F_i(v)$, karena $a_i \geq 0$ maka $a_i F_i(u) \geq a_i F_i(v)$

Ketidaksamaan ini berlaku :

$a_1 F_1(u) + \ldots + a_n F_n(u) \geq a_1 F_1(v) + \ldots + a_n F_n(v)$.

atau $F(u) \geq F(v)$ telah ditunjukkan.

(iv) Untuk melengkapi pembuktian, hanya tinggal ditunjukkan F adalah right - hand kontinu dalam (0 ,1) andaikan x adalah bilangan positif yang berubah - ubah dalam (0 , 1), maka F_i adalah right - hand kontinu pada x, diperoleh :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(x + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ a_1 F_1(x + \varepsilon) + \ldots + a_n F_n(x + \varepsilon) \}$$

$$= a_1 \lim_{\varepsilon \to 0} F_1(x+\varepsilon) + \ldots + a_n \lim_{\varepsilon \to 0} F_n(x+\varepsilon)$$

$$= F(x)$$

Jadi F terbukti merupakan fungsi distribusi.

Fungsi distribusi harus right hand kontinu, tetapi dalam fungsi distribusi terdapat kelas khusus fungsi distribusi diskontinu yaitu tahap fungsi. Didefinisikan dengan fungsi

$$I_a(x) = 0, \text{ untuk } x<a$$

$$I_a(x) = 1, \text{ untuk } x \geq a$$

andaikan terdapat $I_a(x)$ fungsi distribusi dimana : $0 \leq a \leq 1$ memilih diskontinu pada $x = a$, dengan lompatan 1 pada a. Dikatakan $I_a(x)$ tahap fungsi dengan 1 tahap pada a

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Fungsi distribusi :

$$F(x) = a_1 I_{x_1}(x) + a_2 I_{x_2}(x) + \ldots + a_n I_{x_n}(x)$$

dimana : $a_i \geq 0$, $\sum a_i = 1$, dan $0 \leq x_i \leq x_{i-1} \leq 1$ adalah tahap fungsi dengan n tahap.

2.4. INTEGRAL STIELTJES

Andaikan pemain 1 (P_1) memperoleh hasil G(x) jika memilih strategi x. Selanjutnya andaikan P_1 memilih strategi x berarti dari perlengkapan random dimana yang terbaik x termasuk dari probabilitas fungsi distribusi F(x). Diinginkan menentukan ekspektasi dari G(x) sesuai probabilitas x pada fungsi distribusi F(x).

Andaikan interval [0, 1] dibagi dalam titik-titik :

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$

pandang $\|\Delta\| = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{maks}} (x_i - x_{i-1})$

dan $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i$, untuk $1 \leq i \leq n$

Kemudian dapat diperkirakan ekspektasi dari G(x)

$$\sum_{i=1}^{n} G(z_i) \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} \qquad (1)$$

$$\text{jika} \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} G(z_i) \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} \qquad (2)$$

ada dan independent dari pemilihan z_i, maka limit ini disebut integral stieltjes dari G sedang F dari 0 sampai 1 dan dinyatakan dengan :

$$\int_0^1 G(x)\, d\, F(x)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

CONTOH 2.19

Dinyatakan : $G(x) = F(x) = 0$, untuk $0 \le x < \frac{1}{2}$

$G(x) = F(x) = 1$, untuk $\frac{1}{2} \le x \le 1$

Diperoleh $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0$ atau 1, diambil $F(x_k) - F(x_{k-1}) = 1$ sehingga $G(z_k) = 0$ atau 1 tergantung pada pilihan z_k.

Jadi limit pada persamaan (2) tidak independent dari pilihan z_i dan $\int_0^1 G(x)\, d\, F(x)$ tidak ada.

Sebelum membahas teorema 2.4 perlu dinyatakan notasi-notasi dibawah ini :

$$M_k = \underset{x_{k-1} \le x \le x_k}{\text{maks}} G(x),$$

$$m_k = \underset{x_{k-1} \le x \le x_k}{\min} G(x),$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} M_i \, [\, F(x_i) - F(x_{i-1}) \,]$$

$$l = \sum_{i=1}^{n} m_i \, [\, F(x_i) - F(x_{i-1}) \,]$$

TEOREMA 2.4

Jika G fungsi kontinu pada interval tertutup [0, 1] dan $F_1, F_2, \ldots$ adalah urutan fungsi distribusi yang konvergen untuk fungsi distribusi F pada setiap titik kontinu F maka

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^1 G(x)\, dF_i(x) = \int_0^1 G(x)\, dF(x)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

BUKTI :

Dinyatakan ε dan δ bilangan positif, jika Δ_1 adalah bagian dari [0, 1] dimana $\|\Delta_1\| < \delta$, maka $L_1 - l_1 < \varepsilon$. Pilih Δ bagian dari [0, 1] untuk $\|\Delta\| < \delta$, seperti titik-titik bagian dari $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dari Δ, kecuali x_0 dan x_n adalah titik kontinu dari F. Kemudian $F_t(x_i)$ konvergen untuk $F(x_i)$ (untuk $i = 0, 1, \ldots n$) ada bilangan bulat T dan jika $t \geq T$, maka

$$| F_t(x_i) - F(x_i) | < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ untuk } i = 0, 1, \ldots, n \qquad (3)$$

Kemudian $L - l < \varepsilon$, sebagai berikut :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} - \int_0^1 G(x)\, d\, F(x) \right| < \varepsilon \qquad (4)$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_i \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} - \int_0^1 G(x)\, d\, F(x) \right| < \varepsilon \qquad (5)$$

Selain itu :

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \{F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})\} \geq \int_0^1 G(x)\, d\, F_t(x) \qquad (6)$$

$$\int_0^1 G(x)\, d\, F_t(x) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \{F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})\} \qquad (7)$$

Dinyatakan $A = \underset{0 \leq x \leq 1}{\text{maks}} | G(x) |$

Kemudian $M_i \leq A$ (untuk $i = 1, 2, \ldots, n$)

Jika $t \geq T$, maka :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i \{F(x_i) - F(x_{i-1})\} - \sum_{i=1}^{n} M_i \{F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})\} \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} M_i \{F(x_i) - F_t(x_i) + F_t(x_{i-1}) - F(x_{i-1})\} \right|$$

$$\leq A \left\{ \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F_t(x_i)| + \sum_{i=1}^{n} |F_t(x_{i-1}) - F(x_{i-1})| \right\} \qquad (8)$$

$$\leq 2 A \varepsilon \quad \text{(dari (3))}$$

Dari (4) dan (8) diperoleh

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\left| \int_0^1 G(x)dF(x) - \sum_{i=1}^{n} M_i \left\{F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})\right\} \right| \leq (1+2A)\varepsilon \qquad (9)$$

Menggunakan (5) dan (8) diperoleh :

$$\left| \int_0^1 G(x)dF(x) - \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{F_t(x_i) - F_t(x_{i-1})\right\} \right| \leq (1+2A)\varepsilon \qquad (10)$$

Dari (9) dan (10) diperoleh, berarti dari (6) dan (7)

$$\left| \int_0^1 G(x)\, d\, F(x) - \int_0^1 G(x)\, d\, F_t(x) \right| \leq (1+2A)\varepsilon \qquad (11)$$

Kemudian 2A + 1 adalah tertentu dan ε adalah berubah-ubah, dari (11) terbukti :

$$\lim_{t \to \sim} \int_0^1 G(x)\, d\, F_t(x) = \int_0^1 G(x)\, d\, F(x)$$

2.5. PERMAINAN KONTINU

Jika P_1 memilih strategi x pada [0, 1] dari fungsi distribusi F dan P_2 memilih strategi y pada [0, 1] dari fungsi distribusi G sedang M adalah fungsi hasil permainan kontinu. Ekspektasi P_1 menggunakan strategi x dari fungsi distribusi F, jika P_2 menggunakan strategi y maka :

$$E\ (F,\ y) = \int_0^1 M\ (x,\ y)\ d\ F(x)$$

Ekspektasi P_1 menggunakan strategi x dari fungsi distribusi F, jika P_2 menggunakan strategi y dari fungsi distribusi G maka :

$$E\ (F,\ G) = \int_0^1 \int_0^1 M\ (x,\ y)\ d\ F(x)\ d\ G(y) \qquad (1)$$

Sedangkan ekspektasi P_2 adalah $-E\ (F,\ G)$.

Andaikan F_o dan G_o merupakan strategi optimal sehingga $F_o,\ G_o \in E\ (F,\ G)$ maka akan berlaku :

$$E\ (F,\ G_o) \leq E\ (F_o,\ G_o) \leq E\ (F_o,\ G)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sesuai persamaan (1) akan berlaku :

$$\int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF(x)\, dG_o(y) \le \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_o(x)\, dG_o(y)$$

$$\le \int_0^1 \int_0^1 M(x, y)\, dF_o(x)\, dG(y)$$

Penyelesaian untuk integral diatas tidak lain adalah penyelesaian nilai optimal permainan, serta diperoleh strategi optimal permainan.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)