BAB III

KARAKTERISASI DALAM RANCANGAN STRUKTUR

Berikut ini adalah analisa rancangan struktur pada distribusi fungsi densitas bersyarat dari suatu bilangan yang dapat dikarakterisasikan.

Jika (X,Y) adalah suatu vektor random dan f(x,y) adalah fungsi densitas bersama maka,

$$f(x,y) = g(x \mid y)\, h(y) \qquad \ldots\ldots (3.1)$$

dimana $g(x \mid y)$ adalah fungsi densitas bersyarat dari X yang diberikan Y dan h(y) adalah fungsi densitas dari Y.

Pada umumnya dengan mengetahui fungsi densitas X yang diberikan oleh Y maka densitas bersama X dan Y tidak dapat dicari. Tetapi pada hal-hal tertentu akan ditunjukkan jika suatu densitas bersyarat mempunyai rancangan struktur tertentu maka densitas bersama dapat ditentukan secara khusus oleh struktur masing-masing.

Disini akan dipelajari theorema karakterisasi umum bagi distribusi keluarga exponsial linier dan sebagai akibatnya bisa dicari karakterisasi untuk distribusi normal.

Definisi.

Jika suatu variabel random X mempunyai fungsi probabilitas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x)^{\theta x}}{g(\theta)} & x \in S,\ g(\theta) > 0, \theta \in \Omega \\ 0 & \text{untuk yang lainnya} \end{cases} \qquad \text{....(3.2)}$$

dimana S adalah suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan riel dan $g(\theta)$ adalah faktor penormalan yaitu

$$g(\theta) = \int_S a\ (x)\ e^{\theta\ x} \qquad \text{....(3..3)}$$

dengan $\int_S$ menyatakan integral pada X yang kontinyu atau merupakan jumlahan pada setiap X yang deskrit dan Ω adalah suatu ruang parameter. Maka { $f(x)$, $\theta \in \Omega$ } dikatakan sebagai distribusi keluarga ekponensial linier

Theorema 3.1

Misalkan X, X_1, ... X_n adalah variabel random yang kontinyu, tidak turun, bebas non degenerated dan fungsi karakteristiknya tidak lenyap di nol (0). Misalkan distribusi bersyarat X diberikan $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X + X_1 + \ldots + X_n$ mempunyai struktur $C(x,z)$ dimana $Z = X_1 + \ldots + X_n + X$.

Misalkan distribusi bersyarat X_i mempunyai struktur $C_i(x_i, z)$, untuk setiap i dan untuk setiap himpunan bagian X_i, dengan $C(x,z)$ didefinisikan dengan

$$\frac{C(x,z)C(x_1,z)\ \ldots\ C(x_n,z)C(0,z)}{C(0,z)C(0,z)\ \ldots C(0,z)C(z,z)} =$$

$$\frac{h(x)h(x_1)\ \ldots\ h(x_n)}{h(z)} \qquad \ldots.(3.4)$$

untuk beberapa fungsi non negatip $h(x)$. Maka $X, X_1, \ldots, X_n$ adalah keluarga eksponensial linier dan $X_1, \ldots, X_n$ terdistribusi secara identik.

Bukti

$$\begin{aligned} & f(x)f_1(x_1)\ \ldots\ f_n(x_n) \\ &= g(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x+x_1+\ldots+x_n) \\ &\quad g_1(x_1|x, x_2, \ldots x_{n-1}, z)\ g_2(x_2|x, x_3, \ldots) \\ &\quad \ldots\ g_n(x|z)\ g_{n+1}(z) \\ &= C_1(x_1, z)C_2(x_2, z\ \ldots\ C_{n-1}(x_{n-1}, z)C(0,z)C_0(z). \end{aligned} \qquad \ldots.(3.5)$$

dimana $f(.)$, $g(.)$, $f_i(.)$ menyatakan fungsi probabilitas yang berkorespondensi dengan $(.)$, $g(.|.)$ menyatakan fungsi probabilitas bersyarat dan $g_{n+1}(z)$ adalah fungsi probabilitas bersama dari Z

Pada (3.5) ambil $x=0$ dan gantilah x_n dengan $x+x_n$ maka

$$f(0)\ f_1(x_1)\ \ldots\ f_n(x+x_n) = C_1(x_1, z)\ \ldots\ C_{n-1}(x_{n-1}, z)$$
$$C(0,z)C_0(z) \qquad \ldots.(3.6)$$

Bagilah (3.5) dengan (3.6), maka

$$\frac{f(x)\ f_n(x_n)}{f(0)\ f_n(x_n+x)} = \frac{C(x,z)}{C(0,z)} \qquad \ldots.(3.7)$$

Dari(3.7) ambil $x_n=0$ dan gantilah x_{n-1} dengan $x_{n-1}+x_n$ maka

$$\frac{f(x)\ f_n(0)}{f(0)\ f_n(x)} = \frac{C(x,z)}{C(0,z)} \qquad \ldots.(3.8)$$

Jika $f(x)\ f_1(x_1)\ \ldots\ f_n(x_n)$ dapat dituliskan sebagai distribusi bersama $X, X_1, \ldots X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n, Z$, maka

$$\frac{f(x)\ f_i(0)}{f(0)\ f_i(x)} = \frac{C(x,z)}{C(0,z)} \qquad \ldots.(3.9)$$

Persamaan (3.9) ini menyatakan bahwa $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi secara identik.

Dari (3.7) ambil $x_n = 0$, gantilah x dengan $x+x_n$, dan sampai ditemukan

$$\frac{f(x+x_n)\ f_n(0)}{f(0)\ f_n(x+x_n)} = \frac{C(x+x_n)}{C(0,z)} \qquad \ldots.(3.10)$$

Sekarang dari (3.10) ambil x = 0 dan gantilah x_{n-1} dengan $x + x_{n-1}$ didapatkan

$$\frac{f(x_n)\ f_n(0)}{f(0)\ f_n(x_n)} = \frac{C(x_n,z)}{C(0,z)} \qquad \ldots.(3.11)$$

Kalikan (3.7) dengan (3.11) maka didapatkan

$$\frac{f(x)\ f(x_n)\ f_n(0)}{f(0)\ f(0)\ f_n(x+x_n)} = \frac{C(x,z)\ C(x_n,z)}{C(0,z)\ C(0,z)} \qquad \ldots.(3.12)$$

Dari (3.7) ambil $x_n = 0$ dan gantilah x dengan $x+x_n$, maka

$$\frac{f(x+x_n)\ f_n(0)}{f(0)\ f_n(x+x_n)} = \frac{C(x+x_n,z)}{C(0,z)} \qquad \text{....(3.13)}$$

Kemudian (3.12) dibagi dengan (3.13), maka didapatkan

$$\frac{f(x)\ f(x_n)\ f(0)}{f(0)\ f_n(x+x_n)} = \frac{C(x,z)\ C(x_n,z)\ C(0,z)}{C(0,z)\ C(0,z)\ C(x+x_n,z)} \qquad \text{....(3.14)}$$

Sekarang dari persamaan (3.14) ambil $x_1=0$ dan gantilah x dengan $x+x_1$, mendapatkan

$$\frac{f(x+x_1)\ f(x_n)\ f(0)}{f(0)\ f(x+x_1+x_n)} = \frac{C(x+x_1,z)\ C(x_n,z)\ C(0,z)}{C(0,z)\ C(0,z)\ C(x+x_1+x_n,z)} \qquad \text{....(3.15)}$$

Dari (3.15) ambil x = 0 dan gantilah x_n dengam x_n+x maka

$$\frac{f(x_1)\ f(x+x_n)}{f(0)\ f(x+x_1+x_n)} = \frac{C(x_1,z)\ C(x+x_n,z)}{C(0,z)\ C(x+x_1+x_n,z)} \qquad \text{....(3.16)}$$

Gandakan persamaan (3.14) dengan persamaan (3.16) maka

$$\frac{f(x)\ f(x_1)\ f(x_n)\ f(0)}{f(0)\ f(0)\ f(0)\ f(x+x_1,x)} = \frac{C(x,z)\ C(x,z)\ C(x_n,z)\ C(0,z)}{C(0,z)\ C(0,z)\ C(x+x_1+x_n,z)} \qquad \text{....(3.17)}$$

Jadi dengan cara yang sama didapatkan

$$\frac{f(x)\ \ f(x_1)\ \ldots\ f(x_n)\ f(0)}{f(0)\ f(0)\ f(0)\ \ldots\ f(0)\ f(z)} =$$

$$\frac{C(x,z)\ C(x_1,z)\ \ldots\ C(x_n,z)\ C(0,z)}{C(0,z)\ C(0,z)\ \ldots\ C(0,z)\ C(z,z)} \quad \ldots.(3.18)$$

yaitu

$$\frac{f(x)\ f(x_1)\ \ldots\ f(x_n)\ f(0)}{f(0)\ f(0)\ \ldots\ f(0)\ f(z)} = \frac{h(x)\ h(x_1)\ \ldots\ h(x_n)}{h(z)} \quad \ldots.(3.19)$$

Dengan memisalkan $\phi(x) = f(x) / \{ f(0)\ h(x) \}$ didapatkan persamaan fungsional Chauchy.

$$\phi(x)\ \phi(x_1)\ \ldots\ \phi(x_n) = \phi(\ x+x_1+\ \ldots\ +x_n\ )$$

Dengan penyelesaian

$$\phi(x) = e^{ax}$$

Karena $\phi(x) = f(x) / \{ f(0)\ h(x) \}$dan untuk konstanta a, maka

$$f(x) = f(0)h(x)\ e^{ax}.$$

Dari (3.9) akhirnya didapatkan

$$f_i(x) = f_i(0)\ f(x)\ C(0,z) / \{ f(0)\ C(x,z) \}$$

$$= f(0)\ h(x)\ e^{ax}\ C(0,z) / C(x,z). \quad \blacksquare$$

Akibat 3.1

Misalkan $X, X_1, \ldots, X_n$ seperti yang telah didefinisikan dalam theorema, misal

$$C(x,z) = k \exp(\ -\ \frac{(x-z/2)^2}{2\sigma^2}\ ),$$

dimana k = konstanta, maka $X, X_1, \ldots, X_n$ adalah berdistribusi normal. Dalam hal ini dapat dilihat bahwa

$$h(x) = \exp\{\ -x^2/(2\sigma^2)\ \}$$

maka

$$f(x) = f(0)\, e^{ax} \exp\{ -x^2/(2\sigma^2) \}$$

dan

$$f_i(x) = f_i(0)\, e^{ax} \exp\{-x^2/(2\sigma^2)\}$$

dimana a adalah konstanta, $f(x)$ dan $f_i(x)$ adalah densitas normal. Dari hasil ini dapat dicari suatu normal dengan parameter a yang tidak diketahui ke suatu normal dengan parameter a yang diketahui yaitu jika σ diketahui.