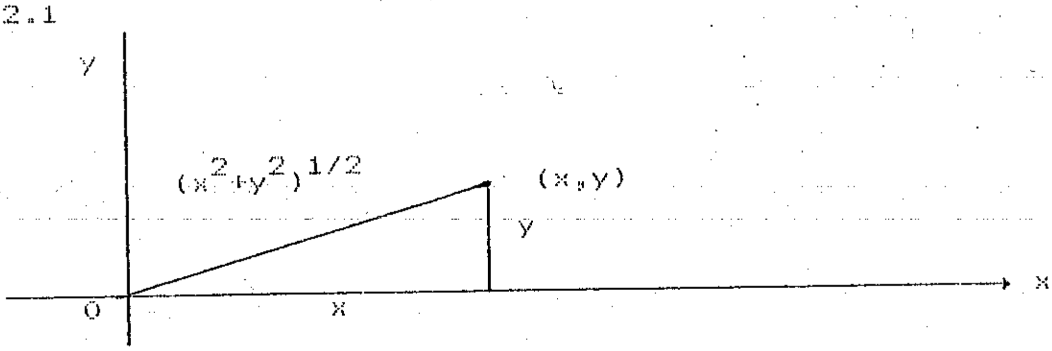
BAB II

# FUNGSI NORMAL DARI BEBERAPA HIPOTESA

Pada bab ini akan dibicarakan penurunan fungsi probabilitas Normal dari berbagai macam hipotesa dalam ilmu fisika terutama dari hukum probabilitas Normal sebagai pegetahuan yang meneliti dari segi teori dan praktis. Pada bagian ini akan dilihat fungsi normal yang dihasilkan oleh beberapa hasil rangkaian percobaan. Pada bagian akhir akan ditinjau sifat-sifat karakteristik fungsi probabilitas Normal.

## 2.1. Hipotesa Herschel

Anggaplah suatu persoalan distribusi dari tembakan senapan dalam mencapai sasaran tertentu. Misalkan sasarannya adalah titik O dan misalkan (x,y) sebagai titik yang terkena tembakan pada satu kali percobaan dengan ditunjukkan oleh koordinat salib sumbu seperti pada gambar 2.1




Gambar 2.1

Tujuannya adalah untuk menembak pada sasaran yang tepat, yaitu sasaran O. Misalkan (x,y) merupakan pasangan yang diberikan oleh suatu deviasi yang masing-masing dalam arah sumbu x dan sumbu y untuk setiap tembakan yang acak. Hershel menyusun hipotesa berikut untuk fungsi padat bersama f(x) dan g(y) dari deviasi itu, yaitu error, masing-masing untuk x dan y

Hipotesa Herschell adalah sebagai berikut,

1. Fungsi padat bersama f(x) dan g(y) adalah kontinue
2. Error dalam arah sumbu x dan y adalah bebas
3. Probabilitas densitas pada (x,y) hanya tergantung pada jarak $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ dari titik sasaran atau pusat O.

Berdasarkan asumsi-asumsi itu diperoleh suatu hasil bahwa deviasi probabilitas densitas Z adalah

$$h(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\{-z^2/(2\sigma^2)\} \qquad \text{....(2.1)}$$

Langkah-langkah penurunannya bisa diikuti mengingat (asumsi nomer 2) fungsi densitas pada (x,y) adalah bebas yaitu f(x) . g(y). Karena sebab dari asumsi 3, fungsi densitas f(x) dan g(y) adalah suatu fungsi r yaitu

$$f(x).g(y) = \alpha(r) \qquad \text{....(2.1)}$$

dimana $\alpha(r)$ adalah suatu fungsi r, dengan $r^2 = x^2+y^2$.

Ambil y=0 substitusikan ke persamaan (2.2), maka diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{g(0)}\,\alpha(\sqrt{x^2+0})$$

$$= \alpha(\sqrt{x^2}) \text{ ,untuk } g(0) \neq 0 \qquad \ldots.(2.3)$$

Ternyata bahwa f(x) itu sebanding dengan $\alpha(|x|)$.

$$f(x) = f(-x) = f(|x|) \qquad \ldots.(2.4)$$

Demikian halnya g(y) sebanding ke $\alpha(|y|)$ dan $g(y) = g(-y) = g(|y|)$. Persamaan (2.2) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\alpha(|x|)}{g(0)} \quad \frac{\alpha(|y|)}{f(0)} = \alpha(r)$$

untuk $f(0) \neq 0$ ....(2.5)

yaitu

$$\frac{\alpha(|x|)}{f(0)\ g(0)} \quad \frac{\alpha(|y|)}{f(0)\ g(0)} = \frac{\alpha(r)}{f(0)\ g(0)}$$

....(2.6)

Dengan memisalkan $p(x) = \ln\left[\frac{f(x)}{f(0)}\right]$, didapatkan

$$p(x) + p(y) = p(r) \ ; \qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \ldots.(2.7)$$

yaitu

$$p(x_1) + p(x_2) = p(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \qquad \ldots.(2.8)$$

Jika $x^2 = x_1^2 + x_2^2$ maka (2.8) menjadi

$$p(x_1) + p(x_2) = p(x) \qquad \ldots.(2.9)$$

Dengan substitusi (2.9) dalam (2.7) kita mendapatkan

$$p(x_1) + p(x_2) + p(y) = p\left( ( x_1^2 + x_2^2 + y^2 )^{1/2} \right) \qquad \ldots\ldots\ldots (2.10)$$

dan perluasannya kita dapatkan

$$p(x_1) + \ldots + p(x_k) = p\left[ ( x_1^2 + \ldots + x_k^2 )^{1/2} \right] \qquad \ldots\ldots\ldots (2.11)$$

Misal $k = n^2$ dan $x_1 = \ldots\ldots = x_k = x$

maka persamaan (2.11) dapat disederhanakan

$$p\,(nx) = n^2\ p\,(x) \qquad \ldots\ldots (2.12)$$

yang mana itu berlaku setiap n

$$p\,(n) = n^2\ p\,(1) \qquad \ldots\ldots (2.13)$$

ambil $x = \frac{m}{n}$ dari (2.12) diperoleh

$$\begin{aligned} n^2\ p\,(x) &= n^2 p\left( \frac{m}{n} \right) = p\left( n\ \frac{m}{n} \right) \\ &= p\,(m) \\ &= m^2 p\,(1) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (2.14)$$

karena itu

$$p\left( \frac{m}{n} \right) = \left( \frac{m}{n} \right)^2 p\,(1) \qquad \ldots\ldots (2.15)$$

yaitu

$$p\,(x) = x^2 p\,(1) \qquad \ldots\ldots (2.16)$$

Anggaplah berlaku untuk semua harga rasional x dan dari kontinuitas p(x) kita dapat menuliskan

$$p\,(x) = c\ x^2 \qquad \ldots\ldots (2.17)$$

dimana konstanta $c = p\,(1)$.

Akhirnya diperoleh

$$f\,(x) = f\,(0)\ e^{c\ x^2} \qquad \ldots\ldots (2.18)$$

Jika (2.18) mempunyai bentuk fungsi densitas, maka c harus negatif dan probabilitas totalnya harus satu; Misalnya c = − 1/2 $\sigma^2$, dimana $\sigma^2$ adalah konstanta non negatip. Maka diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{ -x^2/(2\sigma^2) \} \qquad \ldots\ldots(2.19)$$

Dengan jelas f(x) dan juga g(y) adalah merupakan probabilitas normal dengan harga mean = 0 (nol) dan variannya adalah $\sigma^2$. Oleh karena itu fungsi densitas bersama dari (X,Y) dapat diberikan dengan

$$h(x,y) = f(x)\ g(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\{ -(x^2+y^2)/2\sigma^2\} \qquad \ldots\ldots(2.20)$$

. Nilai error pada beberapa arah dinyatakan oleh Z = x cos $\theta$ + y sin $\theta$. Fungsi pada Z dapat diperoleh dengan menggunakan transformasi orthogonal biasa

$$u = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$v = x \sin\theta - y \cos\theta \qquad \ldots\ldots(2.21)$$

Transformasi Jacobiannya adalah $\frac{\partial\ (u,v)}{\partial\ (x,y)} = 1$ dan densitas bersama h(x,y) dari X dan Y di transformasikan menjadi densitas bersama dari U,V yang mana dapat dirumuskan menjadi persamaan

$$h_1(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\{ -(u^2+v^2)/(2\sigma^2)\} \qquad \ldots\ldots(2.22)$$

Dengan jelas densitas marginal dari U dapat ditentukan, yaitu

$$h_2(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-u^2/(2\sigma^2)] \qquad \ldots\ldots(2.23)$$

Generalisasi hipotesa ini kepada dimensi lain yang lebih tinggi dapat diikuti pada bagian hipotesa Maxwell.

## 2.2. Hipotesa Maxwell

Berdasarkan persamaan (2.2) dapat digambarkan suatu fungsi persamaan fungsional biasa yang meliputi suatu bilangan atau variabel, maka suatu distribusi normal dapat ditentukan. Hipotesa Maxwell merupakan pengembangan dari hipotesa Herschel. Hukum Normal dapat diperoleh dengan cara mempelajari kecepatan molekul suatu zat dengan asumsi sebagai berikut:

1. Komponen-komponen kecepatan, X, Y, Z pada tiga arah orthogonal berdistribusi bebas.

2. Fungsi densitas molekul-molekul yang diberikan oleh komponen-komponen adalah suatu fungsi kecepatan dari komponen kecepatannya suatu molekul dan tanpa dipengaruhi oleh arah molekul itu.

3. Distribusi bersama masing-masing X, Y dan Z adalah sama.

Jika f(x), g(y), h(z) masing-masing menyatakan probabilitas fungsi densitas dari X, Y, dan Z, dengan asumsi 3 yaitu f(.) = g(.) = h(.) dan oleh asumsi 1 dan 2 maka diperoleh

$$f(x)\,g(y)\,h(z) = \alpha(r) \qquad \ldots.\ (2.24)$$

dimana $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Langkah-langkah penurunannya bisa diikuti mengingat (asumsi nomer 2) fungsi densitas pada (x,y,z) adalah bebas yaitu dinyatakan dengan f(x).g(y).h(z). Karena sebab dari asumsi 3, fungsi densitas f(x) g(y) h(z) adalah suatu fungsi r yaitu

$$f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) = \alpha(r) \qquad \ldots.(2.25)$$

dimana $\alpha(r)$ adalah suatu fungsi r, dengan $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Ambil y = 0 dan z = 0 substitusikan ke persamaan (2.25), maka diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{g(0)\ h(0)} \ \alpha( \sqrt{x^2 + 0 + 0} )$$

$$= \alpha( \sqrt{x^2} ) \text{ ,untuk } \{ g(0)h(0) \} \neq 0 \qquad \ldots.(2.26)$$

Ternyata bahwa f(x) itu sebanding dengan $\alpha ( | x | )$.

$$f(x) = f(-x) = f( | x | ) \qquad \ldots.(2.27)$$

Ambil x = 0 dan z = 0 substitusikan ke persamaan (2.25), maka diperoleh

$$g(y) = \frac{1}{f(0)\ h(0)} \ \alpha( \sqrt{0 + y^2 + 0} )$$

$$= \alpha( \sqrt{y^2} ) \text{ ,untuk } \{ f(0)h(0) \} \neq 0 \qquad \ldots.(2.28)$$

Ternyata bahwa g(y) itu sebanding dengan $\alpha ( | y | )$.

$$g(y) = g(-y) = g( | y | ) \qquad \ldots.(2.29)$$

Ambil x = 0 dan y = 0 substitusikan ke persamaan (2.25), maka diperoleh

$$h(z) = \frac{1}{f(0)\ g(0)} \ \alpha( \sqrt{0 + 0 + z^2} )$$

$$= \alpha( \sqrt{z^2} ) \text{ ,untuk } \{ f(0)g(0) \} \neq 0 \qquad \ldots.(2.30)$$

Ternyata bahwa h(z) itu sebanding dengan $\alpha(|z|)$.

$$h(z) = h(-z) = h(|z|) \qquad \ldots.(2.31)$$

Persamaan (2.25) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\alpha(|x|)}{g(0)h(0)} \; \frac{\alpha(|y|)}{f(0)h(0)} \; \frac{\alpha(|z|)}{f(0)g(0)} = \alpha(r)$$

untuk $\{f(0)g(0)h(0)\} \neq 0$ ....(2.32)

yaitu

$$\frac{\alpha(|x|)}{f(0)g(0)h(0)} \; \frac{\alpha(|y|)}{f(0)g(0)h(0)} \; \frac{\alpha(|z|)}{f(0)g(0)h(0)}$$

$$= \frac{\alpha(r)}{f(0)g(0)h(0)} \qquad \ldots.(2.33)$$

Dengan memisalkan $p(x) = \ln\left[\frac{f(x)}{f(0)}\right]$ didapatkan

$$p(x) + p(y) + p(z) = \alpha(r); \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

....(2.34)

yaitu

$$p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

....(2.35)

Jika $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ maka (2.35) menjadi

$$p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = p(x) \qquad \ldots.(2.36)$$

Dengan substitusi (2.36) dalam (2.34) di dapatkan

$$p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(y) + p(z)$$
$$= p\ (\ (\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y^2 + z^2\ )\ \ )^{1/2}$$

.... (2.37)

dan perluasannya didapatkan

$$p(x_1) + \ldots + p(x_k) = p\ [\ (\ x_1{}^2 + \ldots + x_k{}^2)^{1/2}\ ]$$

.... (2.38)

Misal $k = n^2$ dan $x_1 = \ldots\ldots = x_k = x$

maka persamaan (2.38) dapat disederhanakan

$$p\ (nx) = n^2\ p\ (x) \qquad \ldots\ldots (2.39)$$

yang mana itu berlaku setiap n

$$p\ (n) = n^2\ p\ (1) \qquad \ldots\ldots (2.40)$$

ambil $x = \frac{m}{n}$ dari (2.39) diperoleh

$$n^2\ p\ (x) = n^2 p\ (\ \frac{m}{n}\ ) = p\ (\ n\ \frac{m}{n}\ )$$
$$= p\ (m)$$
$$= m^2 p\ (1) \qquad \ldots\ldots (2.41)$$

karena itu

$$p\ (\ \frac{m}{n}\ ) = (\ \frac{m}{n}\ )^2\ p\ (1) \qquad \ldots\ldots (2.42)$$

yaitu

$$p\ (x) = x^2 p\ (1) \qquad \ldots\ldots (2.43)$$

Anggaplah berlaku untuk semua harga rasional x dan dari kontinuitas p(x) kita dapat menuliskan

$$p\ (x) = c\ x^2 \qquad \ldots\ldots (2.44)$$

dimana konstanta $c = p\ (1)$.

Akhirnya diperoleh

$$f(x) = f(0)\, e^{c\, x^2} \qquad \ldots.(2.45)$$

Dengan cara yang sama sepeti diatas, maka diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{ -x^2/(2\sigma^2) \} \qquad \ldots.(2.46)$$

Dengan jelas f(x),g(y) dan juga h(z) adalah merupakan probabilitas normal dengan harga mean = 0 (nol) dan variannya adalah $\sigma^2$. Oleh karena itu fungsi densitas bersama dari (X,Y,Z) dapat diberikan dengan

$$h(x,y,z) = f(x)g(y)h(z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} \exp\{-(x^2+y^2+z^2)/(2\sigma^2)\} \qquad \ldots.(2.47)$$

Sekarang dengan langkah yang sama seperti yang ditampilkan pada bagian (2.1) dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{ -x^2/(2\sigma^2) \}$$

dan

$$a(r) = \exp\{ -(x^2+y^2+z^2)/(2\sigma^2) \} / \{ \sigma^3 (\pi)^{3/2} \} \qquad \ldots.(2.48)$$

## 2.3. Hipotesa Hagen

Hipotesa Hagen sering dikenal dengan sebutan teori error. Hagen menempatkan error random pada asumsi utama.

Error random disebabkan oleh pengaruh variasi yang tidak sempat terhitung pada waktu pengukuran. Jika nilai ekspektasi suatu random kuantitas adalah a, dan hasil penyelidikan adalah b, maka $|b-a|$ adalah besarnya error dalam suatu penyelidikan itu. Jika X menunjukkan harga error pada beberapa penyelidikan maka dapatlah diturunkan asumsi-asumsi seperti berikut ini

1. Suatu error adalah jumlahan bilangan error bisa menjadi bilangan yang besar oleh karena sejumlah error yang banyak

2. Beberapa komponen error adalah tidak tentu dan besarnya sama.

3. Masing-masing komponen adalah bebas

4. Setiap komponen mempunyai sebuah peluang yang sama dapat bernilai positip atau negatip

Berdasarkan asumsi 4 dapat disimpulkan bahwa setiap komponen misalnya +a dan -a dengan probabilitas masing-masing 1/2, mean = 0,dan varian = $a^2$.

Kemudian misalkan X adalah error random dan $X_1$, ....,$X_n$ itu terdiri atas n komponen. Maka dengan memakai asumsi 1, 2 dan 3, kita dapatkan

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

dengan

$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = 0 \qquad \ldots.\ (2.49)$$

dan

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) \\ &= a^2 + \ldots. + a^2 \\ &= n\ a^2 \text{ dan dimisalkan} \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Jika distribusi X yang diperoleh dengan syarat bahwa $\sigma^2$ itu finit, $n \to \infty$ dan $a \to 0$ maka dapatlah ditentukan fungsi normal untuk suatu X

Hal ini dapat ditujukkan pula dengan sifat-sifat pada fungsi karakteristik $X_j$, yaitu

$$\phi_j(t) = \frac{1}{2}\ [\ e^{-ita} + e^{+ita}\ ] \qquad \ldots. (2.50)$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ , $i = \sqrt{-1}$

Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah bebas maka fungsi karakteristik dari $X = \Sigma_{j=1}^{n} X_j$ , dapat diberikan dengan

$$\phi_X(t) = \Pi_{j=1}^{n}\ \phi_j(t) = \{\ \frac{1}{2}[\ e^{-ita} + e^{+ita}\ ]\ \}^n$$

$$= [\ 1 - \frac{t^2}{2\ !}\ a^2 + \frac{t^4}{4\ !}\ a^4 + \ldots\ ]^n$$

$$= [\ 1 - \frac{t^2\ \sigma^2}{2\ \ n} + O\ (\frac{1}{n})\ ]^n$$

$$\text{------}\!> \exp\ (\ -t^2\sigma^2/2\ ),\ \text{untuk } n \text{ -----}\!> \infty \quad \ldots. (2.51)$$

Karena $\exp\ (\ -t^2\sigma^2/2\ )$ adalah fungsi karakteristik pada distribusi normal maka X mempunyai distribusi normal dengan harga mean nol dan varian = $\sigma^2$.