

BAB I

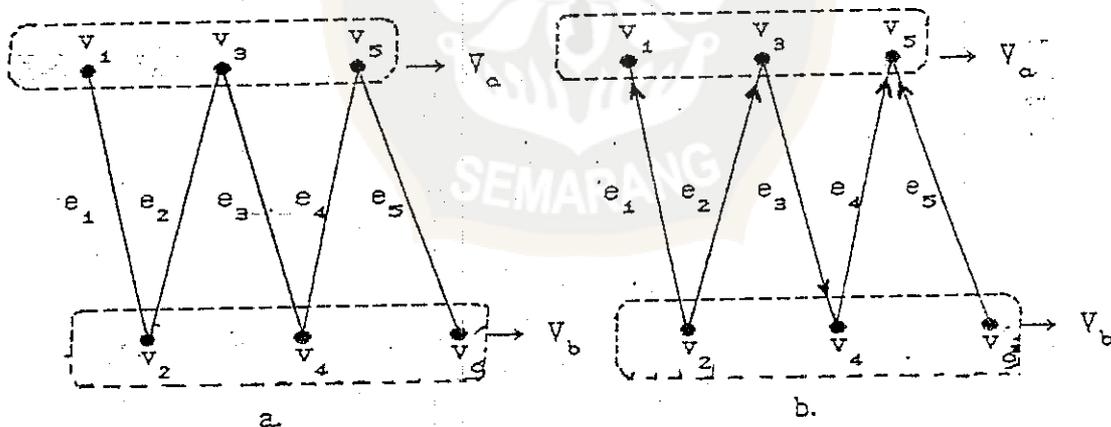
PENDAHULUAN

1.1. Pengertian/Latar Belakang

Graph $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik dari graph G , dan E adalah himpunan garis dari graph G . Himpunan titik V dapat dipisah menjadi dua himpunan bebas V_a dan V_b sehingga untuk setiap garis $e_k \in E$ menghubungkan titik $v_i \in V_a$ dengan $v_j \in V_b$. Graph seperti graph G tersebut dikatakan sebagai graph bipartite (graph terbagi dua).

Contoh 1

Gambar 1 menunjukkan dua buah graph bipartite.



Gambar 1

Dalam gambar 1.a terlihat bahwa himpunan titiknya terpisah menjadi dua himpunan yaitu $V_a = \{v_1, v_3, v_5\}$ dan $V_b = \{v_2, v_4, v_6\}$ sedang himpunan garis $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Garis dalam graph gambar 1.a tidak mempunyai arah sehingga graph pada gambar 1.a juga disebut sebagai graph tak berarah (undirected graph).

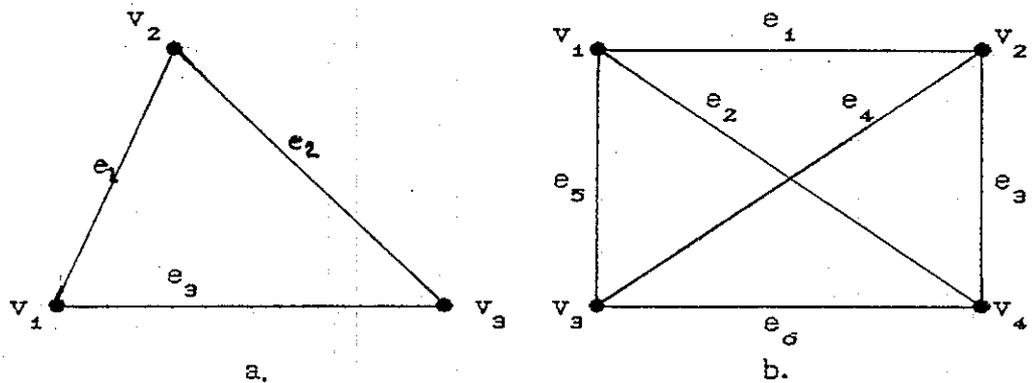
Dalam gambar 1.b terlihat bahwa garis-garisnya mempunyai arah sehingga graph dalam gambar 1.b juga disebut graph berarah (directed graph).

Dalam penulisan ini baik graph berarah maupun graph tak berarah disebut sebagai graph saja.

Jika dalam graph $G = (V, E)$ setiap titiknya mempunyai derajat sama maka graph G tersebut dikatakan sebagai graph reguler. Derajat suatu titik $v_i (d(v_i))$ yaitu jumlah garis yang insiden terhadap v_i . Garis e_k menghubungkan titik v_i dengan titik v_j ($e_k = (v_i, v_j)$), maka garis e_k dikatakan insiden dengan v_i dan juga insiden dengan v_j atau dikatakan titik v_i insiden e_k dan juga titik v_j insiden e_k .

Gambar 2.a menunjukkan graph reguler dengan derajat 2. Titik v_1 insiden dengan e_1 dan e_3 , sehingga derajat $v_1(d(v_1))$ adalah 2, titik v_2 insiden dengan garis e_1 dan e_2 sehingga derajat $v_2(d(v_2))$ adalah 2, titik v_3 insiden dengan garis e_2 dan e_3 , sehingga derajat $v_3(d(v_3))$ adalah 2. Terlihat bahwa derajat semua titik dalam graph gambar 2.a sama dengan 2, sehingga graph dalam gambar 2.a disebut graph reguler dengan derajat dua. Sedang gambar 2.b menunjukkan graph reguler derajat tiga.

Contoh 2

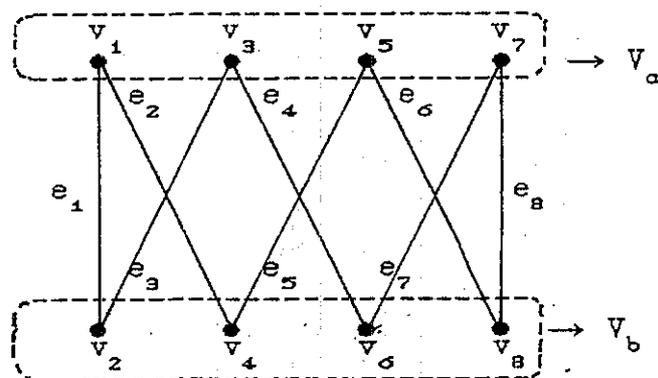


Gambar 2

Suatu graph $G = (V, E)$ memenuhi sebagai graph bipartite dan juga memenuhi sebagai graph reguler maka graph G tersebut disebut graph bipartite reguler. Jadi graph bipartite reguler adalah graph yang setiap titiknya mempunyai derajat sama dan titik-titiknya dapat dipisah menjadi dua himpunan bebas sehingga untuk setiap garis dalam graph tersebut menghubungkan suatu titik anggota himpunan yang satu dengan suatu titik anggota himpunan yang lainnya.

Contoh 3

Gambar 3 menunjukkan graph bipartite reguler.



Gambar 3

Keterangan :

$$V_a = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$$

$$V_b = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

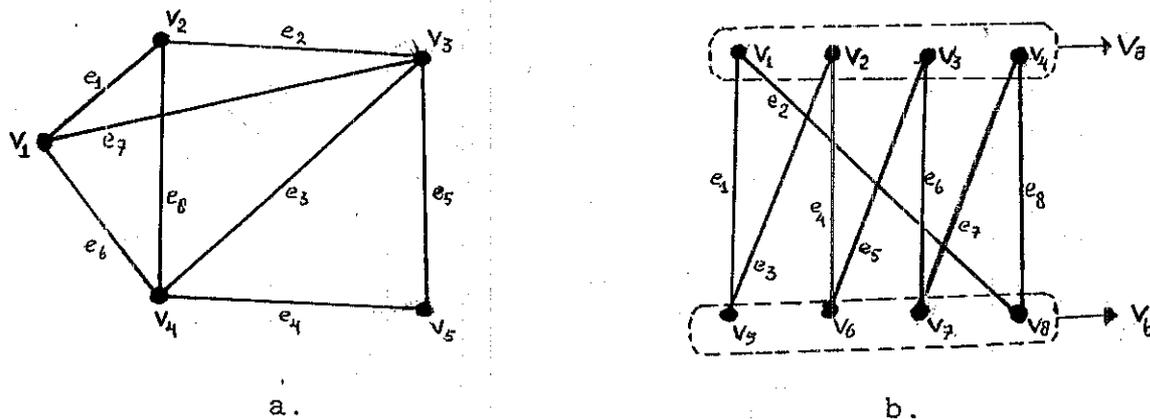
$$d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) =$$

$$d(v_7) = d(v_8) = 2.$$

Jika garis-garis dalam suatu graph G telah ditandai dengan warna-warna dengan ketentuan tidak ada dua garis dalam G yang insiden pada satu titik mendapat warna sama, maka dikatakan bahwa pada graph G tersebut telah dilakukan pewarnaan garis. Jadi pewarnaan garis pada suatu graph adalah pemberian warna pada semua garis dalam graph tersebut sedemikian sehingga tidak ada dua garis yang insiden (bertemu) pada satu titik mendapat warna yang sama. Pewarnaan garis pada graph bipartite reguler adalah pewarnaan garis yang dilakukan pada graph yang memenuhi ketentuan sebagai graph bipartite reguler.

Contoh 4

Gambar 4.a menunjukkan pewarnaan garis pada graph dan gambar 4.b menunjukkan pewarnaan garis yang dilakukan pada graph bipartite reguler.



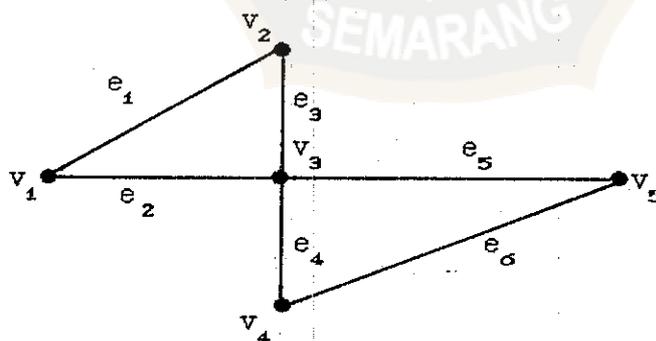
Gambar 4

Dilihat dari banyaknya garis yang menghubungkan titik-titik dalam suatu graph, graph dibedakan menjadi :

1. Graph sederhana (Simple graph) adalah graph yang setiap garisnya menghubungkan dua titik. (tidak mempunyai loop) dan setiap dua titik dalam graph tersebut maksimum dihubungkan oleh sebuah garis.

Comtoh 5

Gambar 5 menunjukkan suatu graph sederhana.



Gambar 5

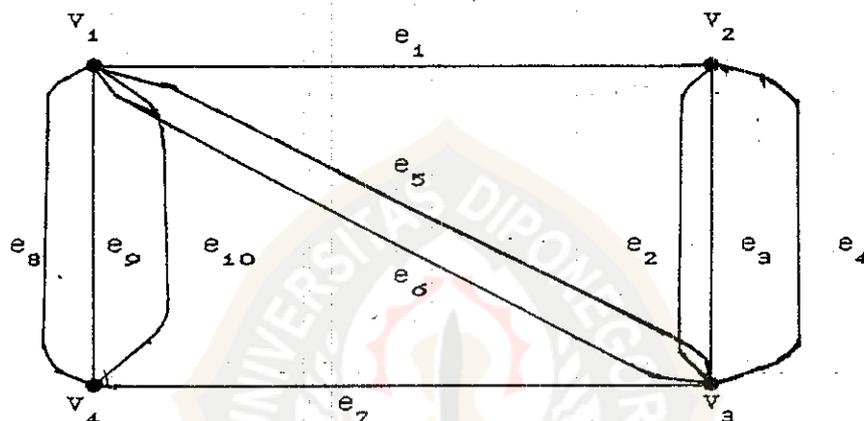
Keterangan :

Dari gambar di atas terlihat tidak ada dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu garis dan tidak ada garis yang berawal berakhir pada satu titik.

2. Multigraph (Multiple graph) adalah graph yang tidak mempunyai loop (garis yang berawal dan berakhir pada satu titik) dan terdapat minimal dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari sebuah garis.

Contoh 6

Gambar 6 menunjukkan suatu multigraph.



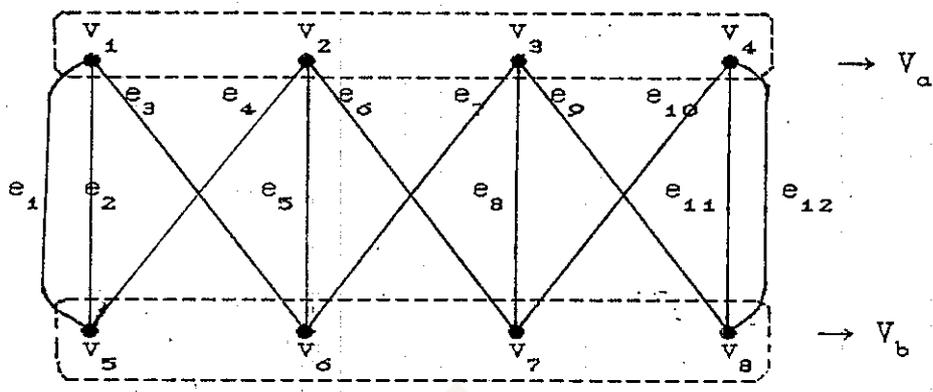
Gambar 6

Dalam gambar 6 terlihat bahwa terdapat titik-titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu garis, seperti titik v_1 dengan titik v_4 dihubungkan oleh tiga garis yaitu e_8, e_9, e_{10} . Titik v_2 dan v_3 juga dihubungkan oleh tiga garis yaitu e_2, e_3, e_4 . Sedang titik v_1 dan titik v_3 dihubungkan oleh dua garis yaitu e_5 dan e_6 .

$G = (V, E)$ adalah suatu graph yang memenuhi ketentuan sebagai multigraph dan juga memenuhi ketentuan sebagai graph bipartite dan graph reguler (graph bipartite reguler). Graph seperti graph G tersebut disebut sebagai multigraph bipartite reguler.

Contoh 7

Gambar 7 menunjukkan multigraph bipartite reguler.



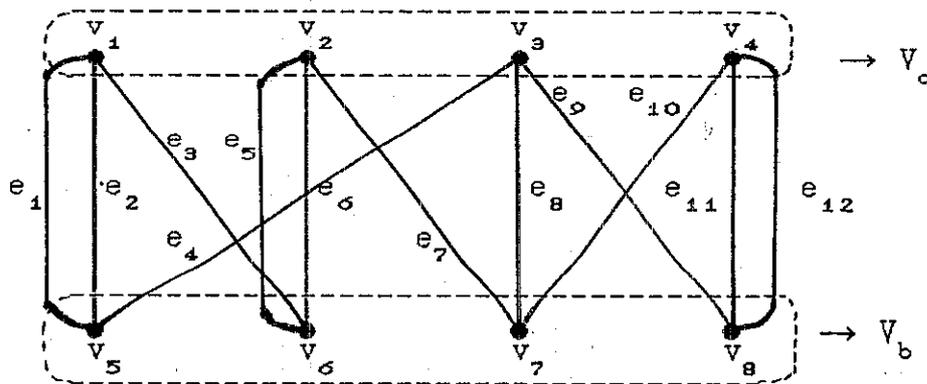
Gambar 7

Dalam gambar 7 terlihat bahwa terdapat dua titik yang dihubungkan lebih sebuah garis yaitu titik v_1 dan v_5 dihubungkan oleh dua garis yaitu e_1 dan e_2 . Juga titik v_4 dan v_8 dihubungkan dua garis yaitu e_{11} dan e_{12} .

Apabila setiap garis pada multigraph bipartite reguler telah ditandai warna-warna sehingga tidak ada dua garis yang insiden pada satu titik mendapat warna sama, maka dikatakan bahwa telah diadakan pewarnaan garis pada multigraph bipartite reguler tersebut.

Contoh 8

Gambar 8 menunjukkan multigraph bipartite reguler yang telah mendapat pewarnaan garis.



Gambar 8

1.2. Permasalahan

Multigraph bipartite reguler dibedakan menjadi beberapa macam menurut ciri-ciri yang ada pada multigraph tersebut. Adapun beberapa macam multigraph bipartite reguler tersebut antara lain; multigraph melingkar (multigraph circle), multigraph melingkar ganda (multigraph double circle).

Apabila pewarnaan garis dilakukan dengan jumlah warna tertentu (misal untuk multigraph bipartite reguler derajat m diwarnai garis dengan m warna) dan garis-garis tertentu menerima warna sama atau berbeda, maka jika proses pewarnaan garis tersebut dilakukan terhadap berbagai multigraph bipartite reguler (multigraph circle, multigraph double circle) tentu akan menimbulkan permasalahan seperti : Apakah proses pewarnaan garis tersebut dapat dilakukan, apakah terdapat syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh multigraph yang diwarnai agar garis-garis tertentu tersebut mendapat warna sesuai dengan

yang ditentukan.

1.3. Sistematika Pembahasan

Pembahasan dalam penulisan ini menggunakan metode deduktif yaitu dengan terlebih dahulu menguasai teori-teori dasar yang digunakan untuk membantu pemahaman terhadap permasalahan. Analisa yang digunakan bersifat analitis komperatif yang dilakukan secara kualitatif yaitu dengan cara membandingkan teori-teori dari berbagai literatur untuk kemudian diambil kesimpulan umum. Jadi tulisan ini adalah berupa studi literatur/kepuustakaan yaitu dengan mempelajari buku-buku, artikel-artikel, tulisan-tulisan yang ada hubungannya dengan penulisan ini.

Adapun teori-teori dasar graph yang digunakan sebagai penunjang dibahas dalam Bab II. Diharapkan dengan pembahasan teori dasar ini dapat membantu pemahaman terhadap permasalahan pada pewarnaan garis yang akan dibahas dalam bab-bab selanjutnya.

Dalam Bab III dibahas mengenai pewarnaan garis yang dilakukan terhadap multigraph bipartite reguler derajat m dengan syarat-syarat yang harus dipenuhi untuk pewarnaan garis dengan syarat tambahan tertentu. Kemudian dilanjutkan mengenai multigraph melingkar (multigraph circle) dan multigraph melingkar ganda (multigraph double circle).