BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1. Limit Suatu Fungsi

Definisi 1 : Misalkan I selang terbuka, a elemen I. Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi di setiap x elemen I (di x = a boleh tidak terdefinisi). Maka limit f(x) jika x menuju a akan sama dengan L, ditulis :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad .... (1)$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, yang cukup kecil, terdapat $\delta > 0$, sedemikian hingga berlaku :

$$| f(x) - L | < \varepsilon, \text{ bila } 0 < | x - a | < \delta$$

Dengan kata lain, definisi 1 menyatakan bahwa nilai fungsi f(x) akan dekat (menuju) ke L, jika x dekat (menuju) ke a. Nilai mutlak dari selisih nilai fungsi f(x) dengan L dan a dengan x dibuat kecil dengan memilih x cukup dekat dengan a, tapi $x \neq a$.

2.2. Differensial dan Integral

Definisi 2 : Derivatif atau turunan dari fungsi f adalah suatu fungsi f' sedemikian rupa sehingga nilai fungsi ini untuk setiap x pada daerah definisi f diberikan oleh persamaan :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

jika limit ini ada, dengan Δx sembarang perubahan pada nilai x.

Definisi 3 : Jika fungsi f didefinisikan $y = f(x)$, maka differensial dari y, ditulis dengan dy adalah :

$$dy = f'(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

dengan dx merupakan differensial dari x, dengan $dx = \Delta x$.

Persamaan 3 berasal dari $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yang merupakan turunan pertama dari f(x) terhadap x. Turunan kedua f(x) terhadap x ditulis $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$. Dan turunan ke -n dari f(x) terhadap x ditulis $\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$.

Definisi 4 : Integral fungsi f pada selang I adalah F, jika berlaku $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x pada selang I, dan ditulis $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, dengan c merupakan suatu tetapan.

Definisi 5 : Jika suatu fungsi terdefinisi pada selang tertutup [a,b], maka integral tertentu dari f dari a ke b, ditulis sebagai $\int_a^b f(x)\, dx$, adalah :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

apabila limit diruas kanan ada.

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ dan $\|\Delta\|$ panjang terbesar dari partisi Δ_i.

Pada notasi $\int_a^b f(x)\, dx$, a disebut batas bawah dan b disebut batas atas.

2.3. Persamaan Differensial

Definisi 6 : Persamaan differensial adalah setiap kesamaan aljabar yang mengandung differensial atau turunan.

2.3.1. Persamaan Differensial Biasa

Definisi 7 : Persamaan differensial biasa adalah kesamaan yang mengandung satu variabel tak bebas atau lebih, satu variabel bebas, dan satu turunan atau lebih dari variabel tak bebas terhadap variabel bebasnya.

contoh7 :

Hukum ohm (contoh 5) adalah sebuah persamaan differensial biasa : $V = R\,\frac{dq}{dt}$. Muatan $q = q(t)$ dan tegangan $V = V(t)$ adalah variabel variabel tak bebas dan waktu t adalah variabel bebasnya.

2.3.2. Persamaan Differensial berubah waktu dan tak berubah waktu

Definisi 8 : Persamaan differensial berubah waktu adalah suatu persamaan differensial yang satu sukunya atau lebih tergantung secara eksplisit pada variabel waktu t yang bebas.

Definisi 9 : Persamaan differensial tak berubah waktu adalah persamaan differensial yang tidak ada satu suku pun yang tergantung secara eksplisit pada variabel waktu t yang bebas.

Contoh8 :

Persamaan differensial $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + y = x$ dengan x dan y merupakan variabel-variabel tak bebas adalah persamaan differensial berubah waktu karena $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2}$ mempunyai koefisien varibel t yaitu t^2, sehingga suku $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2}$ tergantung secara eksplisit pada t.

Contoh9 :

Setiap persamaan differensial yang berbentuk

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^iy}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^ix}{dt^i}$$

dengan koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ merupakan tetapan-tetapan adalah tak berubah waktu karena persamaan itu hanya tergantung secara implisit saja pada t melalui variabel-variabel tak bebas x dan y dan turunan-turunannya, tidak tergantung secara implisit pada t.

2.3.3. Persamaan-persamaan Differensial Linier dan tak linier

Definisi 10 : Suku linier adalah sebuah suku berderajat pertama dalam variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Definisi 11 : Persamaan differensial linier adalah sebuah persamaan differensial yang merupakan jumlah suku-suku linier. Bila tidak demikian, dinamakan persamaan differensial tak linier.

Catatan :

Jika sebuah persamaan differensial mengandung suku-suku berpangkat lebih dari satu, atau merupakan hasil kali, persamaan itu tak linier.

Contoh10 :

Persamaan differensial,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

adalah sebuah persamaan differensial linier, karena setiap sukunya berderajat pertama.

Contoh 11 :

Persamaan differensial,

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + y = 0$$

adalah persamaan differensial tak linier karena $\left[\frac{dy}{dt}\right]^2$ berderajat dua.

2.3.4. Penyelesaian Persamaan Differensial Linier Biasa Linier Koefisien Tetapan

Pandang persamaan differensial dalam bentuk

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^iy}{dt^i} = \sum_{i=o}^{m} b_i \frac{d^ix}{dt^i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

dengan t adalah waktu, koefisien-koefisien a_i dan b_i tetap, x = x(t) (masukannya) adalah fungsi waktu yang diketahui dan $y = y(t)$ (keluarannya) adalah jawaban persamaan yang tak diketahui.

Untuk mengetahui jawaban $y = y(t)$ yang unik harus dijelaskan :

(1) Selang waktu pada jawaban yang diinginkan, yaitu $0 \leq t \leq \infty$

(2) Himpunan r syarat-syarat awal untuk $y = y(t)$ dan n-1 turunannya , yaitu :

$$y(0), \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \; \ldots \;, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

Suatu soal didefinisikan dalam selang itu dan bersama dengan syarat-syarat awalini disebut soal harga awal.

Penyelesaian persamaan differensial dibagi menjadi dua ; tanggapan bebas dan tanggapan paksa. Jumlah dari dua tanggapan ini membentuk tanggapan total atau jawaban y(t), dari persamaan itu.

Definisi 12 : Tanggapan bebas dari suatu persamaan differensial adalah jawaban persamaan differensial itu apabila masukannya x(t) sama dengan nol.

Bila masukan x(t) sama dengan nol, maka persamaan differensialnya menjadi : $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$

jawaban y(t) dari persamaan itu hanya tergantung pada n syarat awal dalam (7) saja.

Contoh 11 :

Jawaban dari persamaan $\frac{dy}{dt} + y = 0$ dengan syarat awal $y(0) = c$ adalah $y(t) = ce^{-t}$

Contoh 12 :

Tanggapan bebas $y_a(t)$ dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x$ dengan syarat awal $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 1$ adalah $y_a(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$ nilai c_1 dan c_2 didapat dengan melihat syarat-syarat awalnya :

$y_a(0) = y(0) = 0 = c_1 + c_2$

$\frac{dy_a(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 1 = -c_1 -2c_2$ maka

$c_1=1$ dan $c_2 = -1$. Karena itu tanggapan bebasnya adalah $y_a(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Definisi 13 : Tanggapan terpaksa $y_b(t)$ dari suatu persamaan differensial adalah jawaban persamaan differensial tersebut bila semua syarat-syarat awal : $y(0)$, $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$ sama dengan nol.

Tanggapan terpaksa hanya tergantung pada masukan $x(t)$ saja. Tanggapan terpaksa untuk persamaan differensial biasa linier koefisien tetapan dapat dituliskan dalam suku-suku suatu integral konvolusi :

$$y_b(t) = \int_a^b \omega(t-\tau) \left[\sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^i x(\tau)}{d\tau^i} \right] d\tau \quad ..... (8)$$

dengan $\omega(t-\tau)$ adalah fungsi bobot dari persamaan differensial itu . Fungsi bobot ini dapat ditulis sebagai :

$$\omega(t-\tau) = \sum_{i=0}^{n} c_i y_i(t) \qquad t \geq 0$$

$$= 0 \qquad t < 0 \quad ....(9)$$

Karena $\omega(t)$ adalah tanggapan terpaksa , maka memerlukan n syarat awall. Syarat awal ini memastikan harga tetapan $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Syarat awal itu adalah :

$$\omega(0) \quad , \quad \frac{d\omega}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-2}\omega}{dt^{n-2}}\Big|_{t=0} , \quad \frac{d^{n-1}\omega}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}$$

Contoh 13 :

Fungsi bobot dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dy} + 2y = x$$

adalah suatu gabungan linier dari

e^{-1t} dan e^{-2t} yaitu $\omega(t) = c_1 e^{-1t} + c_2 e^{-2t}$

c_1 dan c_2 ditentukan oleh persamaan $\omega(o) = c_1 + c_2$

$\frac{d\omega}{dt}\Big| = 1 = -c_1 - 2c_2$ didapat $c_1 = 1$ dan $c_2 = -1$

Fungsi bobotnya adalah $\omega(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Contoh 14 :

Untuk persamaan differensial pada contoh 13, jika $x(t) = 1$ maka tanggapan terpaksa y_b (t) dari persamaan itu menurut persamaan (8) adalah :

$$y_b(t) = \int_c^t \omega(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_c^t \left[e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right].1.d\tau$$

$$= e^{-t}\int_c^t d\tau - e^{-2t}\int_c^t e^{-2\tau}d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - 2\,e^{-t} + e^{-2t}\right]$$

Definisi 14 : Tanggapan total dari suatu persamaan differensial biasa linier koefisien tetapan adalah jumlah dari [illegible]gapan bebas dan tanggapan terpa[illegible]

Contoh 15 :

Tanggapan total y(t) dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=1$$ dengan syarat awal

$y(0) = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 1$ adalah $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) + \frac{1}{2}\left[1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

2.3.5 Tanggapan keadaan mantap dan tanggapan sekilas

Definisi 15 : Tanggapan keadaan mantap adalah bagian dari tanggapan total yang tidak mendekati nol ketika waktu mendekati tak berhingga.

Definisi 16 : Tanggapan sekilas adalah bagian dari tanggapan total yang mendekati nol ketika waktu mendekati tak berhingga.

Contoh 16 :

Tanggapan total untuk persamaan differensial dalam contoh 15 telah ditentukan $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Tanggapan keadaan mantapnya diberik a n oleh $y_{ss} = \frac{1}{2}$

sedang tanggapan sekilasnya adalah $y = -\frac{1}{2}e^{-2t}$

karena $\lim\limits_{t \to \infty} -\frac{1}{2} e^{-2t} = 0$

2.4. Fungsi Variabel Kompleks

Definisi 17 : Variabel kompleks s dinyatakan dalam bentuk $s = \sigma + j\omega = \text{Re}(s) + j\text{Im}(s)$ dengan σ dan ω merupakan variabel-variabel riel dan $j = \sqrt{-1}$

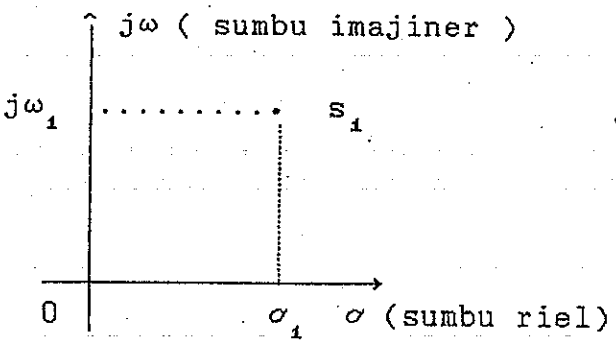
$\text{Re}(s) = \sigma$ menyatakan bagian riel dan

$\text{Im}(s) = \omega$ menyatakan bagian imajiner dari variabel Kompleks s.

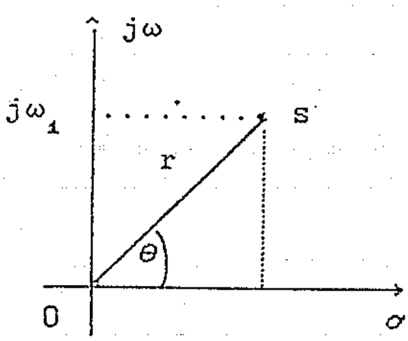
Definisi 18 : Konjugasi (sekawan) kompleks dari $s = \sigma + j\omega$ adalah $\bar{s} = \sigma - j\omega$.

Definisi 19 : Modulus atau harga mutlak suatu variabel kompleks $s = \sigma + j\omega$,$j = \sqrt{-1}$ ditulis $|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ selalu positif atau nol.

Variabel kompleks $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$, dapat dinyatakan dengan suatu titik pada bidang kompleks (bidang -s)



Gambar 4



Gambar 5

Gambar 4 melukiskan bidang s dan suatu titik

$S_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, $j = \sqrt{-1}$. Gambar 5 merupakan bidang -s dengan koordinat polar, dimana letak setiap titik pada bidang datarnya ditentukan secara tunggal oleh dua koordinat kutub r dan θ, r menyataka[illegible] esarnya s yang merupakan panjang vektor os dan θ merupakan sudut yang dibentuk oleh sumbu riil σ dengan vektor os. Putaran yang berlawanan dengan arah jarum jam menyatakan sudut positif. r dapat dinyatakan dengan s yaitu $r = |s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$.

Sudut θ dapat ditentukan dengan hitungan $\tan\theta = \frac{\omega}{\sigma}$ atau $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$.

Definisi 20 : Variabel kompleks s dapat dinyatakan dengan $s = r\,e^{j\theta}$ dengan r menyatakan besar s atau $r = |s|$ dan $j = \sqrt{-1}$, dan Sudut θ disebut argumen s ditulis $\theta = \arg s = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$.

Sifat-sifat argumen :

1. $\operatorname{Arg}(s_1 . s_2) = \arg s_1 + \arg s_2$ (10)
2. $\operatorname{Arg}\left[\frac{s_1}{s_2}\right] = \arg s_1 - \arg s_2$ (11)

Definisi 21 : Fungsi variabel kompleks merupakan suatu fungsi dengan variabelnya variabel kompleks $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$.

Definisi 22 : Fungsi variabel kompleks mengandung bagian riil dan imajiner sehingga bisa dinyatakan sebagai :

$F(s) = \text{Re } F(s) + \text{Im } F(s).$

Definisi 23 : Fungsi variabel kompleks juga dapat dinyatakan dengan :

$$F(s) = |F(s)| \; e^{j\phi}$$
$$= |F(s)|(\text{Cos}\phi + j\text{Sin}\phi) \text{ dengan}$$

$|F(s)|$ menyatakan besar $F(s)$ dan ϕ menyatakan sudut fasa, yaitu argumen dari $F(s)$, dengan

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\text{Bagian Imajiner}}{\text{Bagian Riil}}\right].$$

Definisi 24 : Fungsi variabel kompleks dengan besar $|F(s)|$ dan argumen $\phi(s)$ dapat ditulis $F(s) = |F(s)| \underline{/\phi(s)}$ dibaca fungsi $F(s)$ dengan besar $|F(s)|$ dan sudut fasa $\phi(s)$.

Sifat-sifat Sudut fasa (Arg F(s))

1. $\text{Arg } [F_1(s).F_2(s)] = \text{Arg } F_1(s) + \text{Arg } F_2(s).$
2. $\text{Arg }\left[\frac{F_1(s)}{F_2(s)}\right] = \text{Arg } F_1(s) - \text{Arg } F_2(s)$
3. $\text{Arg }\left[\frac{1}{F(s)}\right] = -\text{ Arg } F(s)$

Sifat-sifat $|F(s)|$

1. $|F_1(s).F_2(s)| = |F_1(s)| \; . \; |F_2(s)|$
2. $\left|\frac{F_1(s)}{F_2(s)}\right| = \frac{|F_1(s)|}{|F_2(s)|}$
3. $|F(-s)| = |F(s)|$

Contoh 17 :

Suatu fungsi variabel kompleks $F(s) = s^2 + 1$. Titik $s_o = 2 + j4$. maka

$$F(s_o) = (2+j4)^2 + 1 = -11 + j\ 16$$

$$Re\ [F(s_o)] = -\ 11$$

$$Im\ [F(s_o)] = 16$$

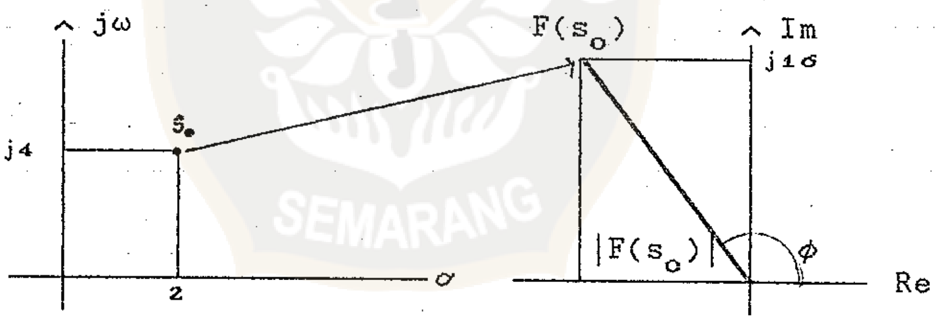
Besar $F(s_o) = |F(s_o)| = \sqrt{(-11)^2+(16)^2} = \sqrt{121 + 256} = 19,4.$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{16}{11} = 124,51^o$$

Untuk menggambar fungsi variabel kompleks diperlukan dua grafik dua dimensi, yaitu bidang -s (untuk titik yang dipetakan) dan bidang F(s) dengan sumbu tegak untuk bagian imaginer F(s) dan horisontal untuk bagian real.

Contoh 18 :

Contoh 17 dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 6

Definisi 25 : Untuk hal khusus yaitu bila $s = j\omega$, maka bidang s merupakan garis lurus. Sehingga F(s) menjadi $F(j\omega)$ yang dapat dinyatakan dalam bidang $F(j\omega)$ dengan ω sebagai parameter.

2.5 Perluasan Pecahan Parsial.

Pandang suatu fungsi rasional :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\ s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\ s^i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

dengan $a_n = 1$ dan $n \geq m$. Koefisien-koefisien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ merupakan tetapan. Misalkan persamaan polinom penyebutnya merupakan n_i akar-akar yang sama dengan $-p_i$, maka persamaan 12 dapat ditulis sebagai :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\ s^i}{\prod_{i=1}^{r} (s+p_i)^{n_i}} \text{ dengan } \sum_{i=1}^{r} n_i = n \ \ldots\ldots (13)$$

Definisi 26 : Pernyataan perluasan parsial dari fungsi rasional $F(s)$ adalah pernyataan dalam bentuk :

$$F(s) = b_i + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k} \qquad \ldots\ldots\ldots (14)$$

dengan $b_n = 0$, kecuali untuk $m = n$.

Koefisien-koefisien C_{ik} diberikan oleh :

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i-k)!} \frac{d^{n_i-k}}{ds^{n_i-k}} \left[(s+p_i)^{n_i} F(s)\right] \Bigg|_{s=-p_i} \ldots\ldots (15)$$

Jika tak ada satupun akar ini yang berulang, maka :

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{i1}}{(s+p_i)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

dengan $C_{i1} = (s+p_i)\ F(s) \Big|_{s=-p_i}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$

Contoh 19 :

Suatu fungsi rasional :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

Perluasan pecahan parsial dari F(s) adalah

$$F(s) = b_2 + \frac{C_{11}}{s+1} + \frac{C_{21}}{s+2}$$

Koefisien pembilang dari s^2 adalah $b_2 = 1$.

Koefisien-koefisien C_{11} dan C_{21} ditentukan dari persamaan (17) sebagai :

$$C_{11} = (s+1)\, F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$C_{21} = (s+2)\, F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 1} \Big|_{s=-2} = -2$$

Sehingga $F(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$

2.6 Transformasi Laplace

Definisi 27 : Misalkan f(t) adalah suatu fungsi variabel riel t yang yang didefunisikan untuk t>0, maka :

$$\mathcal{L}\,[f(t)] \stackrel{df}{=} F(s) \stackrel{df}{=}$$

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} f(t)e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

dengan $0<\varepsilon<T$ ....(18)

disebut Transformasi Laplace dari f(t), dengan s suatu variabel kompleks dan variabel t menyatakan waktu.

Contoh 20 : Transformasi Laplace dari e^{-t} adalah

$$\mathcal{L}\,[e^{-t}] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s+1}\, e^{-(s+1)t} \Big|_{0^+}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s+1}$$

2.6.1 Transformasi Laplace Invers

Definisi 28 : Jika transformasi Laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s), yaitu jika $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, maka f(t) disebut suatu transformasi laplace invers dari F(s) dan ditulis :

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

Contoh 21 : Dari contoh 20, maka $\mathscr{L}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$.

Sifat-sifat :

Sifat 1 : Jika $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ merupakan transformasi Laplace dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ maka $a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$ adalah Transformasi Laplace dari $a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$, dengan a_1 dan a_2 merupakan tetapan sembarang.

Sifat 2 : Jika $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ merupakan Transformasi Laplace invers dari $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ maka $b_1f_1(t) + b_2f_2(t)$ adalah Transformasi Laplace invers dari $b_1F_1(s) + b_2F_2(s)$ dengan b_1 dan b_2 adalah tetapan sembarang.

Berikut ini tabel ringkas dari Transformasi Laplaceyang dapat digunakan dalam teknik perluasan parsial.

Tabel 1 *)

Fungsi waktu	f(t)	Transformasi Laplace F(s)
Denyut satuan	$\delta(t)$	1
Tangga satuan	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Tanjakan satuan	t	$\frac{1}{s^2}$
Polinom	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Pangkat :	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
Sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

*) Dari buku Feed Back and Control System, Joseph J.D.

2.6.2. Transformasi Laplace Invers dengan Menggunakan Perluasan Pecahan Parsial.

Persamaan (13) dan (14) dapat ditulis,

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = b_n + \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k} \quad \ldots\ldots(19)$$

Maka Transformasi Laplace Inversnya adalah :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k}\right]$$

$$= b_n \sigma(t) + \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-p_i t} \quad \ldots(20)$$

Contoh 22 :

Transformasi Laplace invers dari fungsi

$F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$ diberikan oleh :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[1\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]$$

$$= \sigma(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

2.7. Penerapan Transformasi Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Differensial Biasa Linier Dengan Koefisien Tetapan.

Transformasi Laplace dapat digunakan untuk menentukan jawaban dari penyelesaian sebuah persamaan sebuah persamaam differensial linier dengan koefisien tetapan.

Dalam hal ini akan ditinjau dengan dua golongan persamaan umum :

Yang pertama berbentuk : $\sum_{i=o}^{n} a_i \dfrac{d^i y}{dt^i} = x$ ....(21)

dengan y adalah keluaran dan x adalah masukan. $y=y(t)$, $x=x(t)$, Koefisien-koefisien a_i, $i=0,1,\ldots,n-1$ merupakan tetapan dan $a_n = 1$.

Syarat awal untuk persamaan ini diberikan :

$$\left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=o} = y_o^k,\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

dengan y_o^k merupakan tetapan.

Transformasi Laplace dari persamaan (21) diberikan oleh $\mathscr{L}\left[\sum_{i=o}^{n} a_i \dfrac{d^i y}{dt^i}\right] = \mathscr{L}(x)$ ....(22)

Transformasi Laplace dari turunan $\frac{d^i y}{dt^i}$ adalah

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^i y}{dt^i}\right] = s^i\ Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\ y_0^k \text{ untuk } i>0 \quad \ldots(23)$$

Maka persamaan (22) menjadi :

$$\sum_{i=0}^{n} \left[a_i \left(s^i\ Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\ y_0^k \right)\right] = X(s) \quad \ldots.(24)$$

dan diperoleh :

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i\ s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i\ s^{i-1-k}\ y_0^k}{\sum_{i=c}^{n} a_i\ s^i} \quad \ldots.(25)$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan (21) adalah :

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\ Y(s)\ \right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i\ s^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_i\ s^{i-1-k}\ y_0^k}{\sum_{i=c}^{n} a_i\ s^i}\right] \quad \ldots(26)$$

Catatan :

Suku pertama di sebelah kanan adalah tanggapan terpaksa dan suku kedua adalah tanggapan bebas dari sistem yang dinyatakan oleh persamaan (21).

Contoh 23 :

Transformasi Laplace dari persamaan differensial :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u(t) = \text{unit satuan}$$

dengan syarat awal $y(0^+) = -1$ dan $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 2$ dapat ditentukan sebagai berikut :

Pertama-tama menentukan n, a_i, dan y_0^k. $n=2$, $y_0^0=-1$

$y_o^1=2$, $a_o=2$, $a_1=3$, $a_2=1$. Maka subtitusi harga awal ini ke dalam persamaan (24) memberikan :

$$2\ Y(s) + 3[sY(s)+1] + [s^2Y(s) + s-2] = \frac{1}{s}$$

atau :

$$(s^2+ 3s + 2)\ Y(s) = \frac{-\ (s^2+s-1)}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-\ (s^2+s-1)}{s(s^2+ 3s + 2)}$$

Dengan perluasan pecahan parsial didapat :

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)}$$

Sehingga penyelesaian persamaan differensialnya adalah :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$= \frac{1}{2}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{2}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ (1-2e^{-t}-e^{-2t}) \qquad t>0$$

Selanjutnya akan ditinjau golongan persamaan differensial yang mempunyai bentuk :

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=o}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i} \quad ....(27)$$

dengan $y=y(t)$ adalah keluaran dan

$x=x(t)$ adalah masukan

$a_n= 1$ dan $m \leq n$

Transpormasi Laplace dari Persamaan (27) diberikan oleh :

$$\sum_{i=o}^{n} \left[a_i\left(s^i\ Y(s)- \sum_{k=o}^{i-1} a_i\ s^{i-1-k}\ y_o^k\right)\right] =$$

$$\sum_{i=o}^{m} \left[b_i\left(s^i\ X(s)- \sum_{k=o}^{i-1} b_i\ s^{i-1-k}\ x_o^k\right)\right]$$

dengan $x_o^k = \left.\dfrac{d^k x}{dt^k}\right|_{t=o}$ ....(28)

maka,

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=o}^{m} b_i \; s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i \; s^i} \right] X(s) - \frac{\sum_{i=o}^{m} \sum_{k=o}^{i-1} b_i \; s^{i-1-k} \; x_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i \; s^i} +$$

$$\frac{\sum_{i=o}^{n} \sum_{k=o}^{i-1} a_i \; s^{i-1-k} \; y_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i \; s^i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan (27) adalah :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=o}^{m} b_i \; s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i \; s^i} X(s) - \frac{\sum_{i=o}^{m} \sum_{k=o}^{i-1} b_i \; s^{i-1-k} \; x_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i \; s^i} \right]$$

$$+ \; \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=o}^{n} \sum_{k=o}^{i-1} a_i \; s^{i-1-k} \; y_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i \; s^i} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

Catatan :

Sama halnya dengan bentuk pe r tama, penyelesaian umum dari persamaan (27) mempunyai dua bagian ; tanggapan bebas dan tanggapan terpaksa. Suku pertama disebelah kanan adalah tanggapan terpaksa dan suku kedua adalah tanggapan bebas.

Contoh 24 :

Suatu persamaan differensial :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\,\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{dx}{dt} + 3x$$

dengan syarat awal $y_o^o = 1$, $y_o^1 = 0$ dan masukannya $x(t) = e^{-4t}$.

Penyeleesaian persamaan differensial ini ditentukan seebagai beerikut :

Dari persamaan diketahui $n = 2$, $a_o = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ $m = 1$, $b_o = 3$, $b_1 = 1$ dan $x_o^o = \lim_{t \to o} e^{-4t} = 1$

Substitusikan nilai-nilai ke peersamaan (29) mendapatkan :

$$Y(s) = \left[\frac{s + 3}{(s^2 + 3s - 2)}\right]\left[\frac{1}{s + 4}\right] + \frac{s + 3}{(s^2 + 3s + 2)} - \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)}$$

Dengan teknik perluasan pecahan parsial didapatkan:

$$Y(s) = \frac{5}{3(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

Seehingga peenyeleesaian persamaann differensialnya :

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{3(s+1)}\right] - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right] - \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4)}\right]$$

$$= \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

2.8. Peta Kutub - Nol

Fungsi-fungsi rasional F(s) dapat ditulis kembali sebagai :

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=o}^{m} \frac{b_i s^i}{b_m}}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{\prod_{i=o}^{n} (s+p_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

dengan suku-suku $s+z_i$ merupakkan faktor-faktor dari polinom pembilang dan suku-suku $s+p_i$ adalah variabel kompleks.

Definisi 29 : Harga-harga variabel kompleks s yang membuat $|F(s)|$ menjadi nol disebut nol-nol dari F(s).

Definisi 30 : Harga-harga variabel kompleks s yang membuat $|F(s)|$ menjadi tak berhingga disebut kutub-kutub dari F(s).

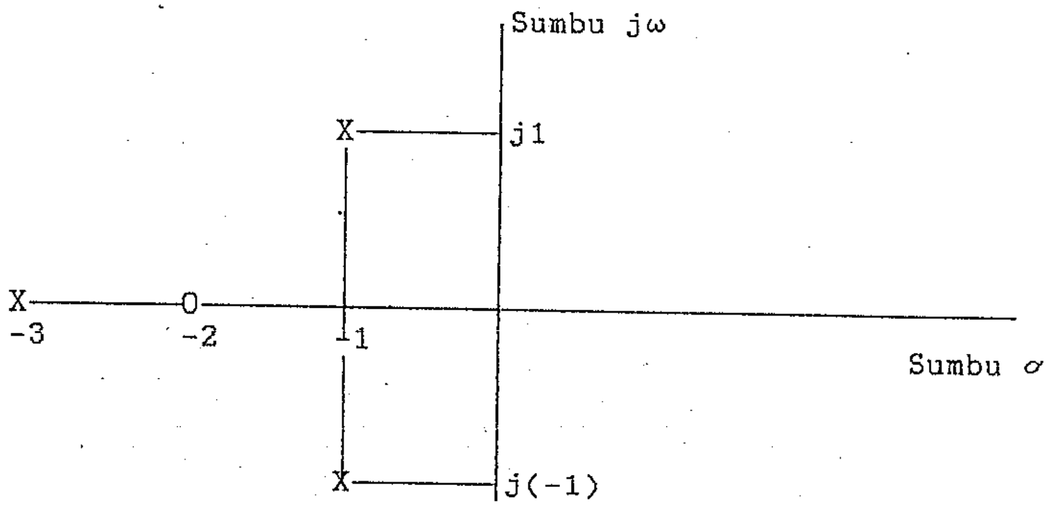
Contoh 25 :

Diberikan $F(s) = \dfrac{2s^2-2s-4}{s^3+5s^2+8s+6}$ yang dapat ditulis kembali dengan $F(s) = \dfrac{2(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+i+j)(s+i-j)}$ maka F(s) mempunyai nol-nol berhingga di s=-1, s=2, dan sebuah nol di s = ~, F(s) mempunyai kutub-kutub di s=-3, s=-1-j, dan s=-1+j.

Definisi 31 : Tempat sebuah kutub di bidang s ditandai sebuah lambang (X), dan tempat nol dengan lambang lingkaran kecil (o). Bidang s yang memuat kutub-kutub dan nol-nol berhingga dari F(s) disebut peta kutub nol dari F(s).

Contoh 26 :

Fungsi rasional $F(s) = \dfrac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$ mempunyai kutub-kutub berhingga di s=-3, s=-1-j, dan s=-1+j. Serta nol-nol di s=-1 dan s=2. Maka peta kutub-nol dari F(s) dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 8

2.9. Sistem Orde Satu dan Orde Dua

Definisi 32 : Suatu persamaan differensial yang berbentuk : $\frac{dy}{dt} + cy = cx$ dengan c adalah tetepan, y = y(t) adalah keluaran dan x = x(t) adalah masukan, adalah sistem orde pertama.

Transformasi Laplace dari pe r samaan ini bila syarat-syarat awalnya nol adalah :

$$sY(s) + cY(s) = cX(s)$$

atau
$$Y(s) = \frac{c}{s + c} X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{c}{s + c}$$

Definisi 33 : Suatu persamaandiffersial yang berbentuk:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n + \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n x \ldots (32)$$

dengan ξ adalah perbandingan redaman dan ω_n merupakan frekuensi alamiah tak teredam, adalah bentuk umum dari sistem orde kedua.

Transformasi Laplace dari persamaan ini bila syarat awalny nol adalah :

$$Y(s) = \left[\frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2} \right] X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Kutub-kutub dari $\frac{Y(s)}{X(s)}$ adalah $s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

Bila $0 < \xi < 1$, Kutub-kutubnya merupakan konyugat kompleks dengan bagian riilnya negatif dan terletak

yaitu $s=-\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

atau $s=-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$,dapat juga ditulis

$$s = -\alpha + j\beta \quad \text{dan} \quad s = -\alpha - j\beta$$

dengan $\alpha = \xi\omega_n$ dan $\beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

Untuk sistem dengan R sistem orde kedua terdapat R ξ dan R ω_n masing-masing bernilai ξ_k dan ω_{n_k} (k = $1,2...R$).

2.10. Logaritma

Definisi 34 : Logaritma dari suatu bilangan $b > 0$ dengan bilangan pokok (basis) a yang ditulis $^a\log b$ dimaksudkan mencari bilangan x, sedemikian sehingga $a^x = b$.

Definisi 35 : $^a\log b$; logaritma bilangan b dengan basis a. Jika bilangan pokok tidak ditulis berarti bilangan pokoknya = 10.

Sifat-sifat logaritma :

Sifat 1 : ${}^{a}\log 1 = 0$

Sifat 2 : ${}^{a}\log (b_1 . b_2 . \ldots b_n) =$

${}^{a}\log b_1 + {}^{a}\log b_2 + \ldots + {}^{a}\log b_n$.

Sifat 3 : ${}^{a}\log \frac{b_1}{b_2} = {}^{a}\log b_1 - {}^{a}\log b_2$

Sifat 4 : ${}^{a}\log b^n = n\ {}^{a}\log b$

Sifat 5 : ${}^{a}\log \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\ {}^{a}\log b$.