BAB III
METODA LAPLACE

3.1. Pengertian Dasar Metoda Laplace

Ambil suatu fungsi dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$\int_a^b Q(x,t)\, dt \qquad x \to \infty \tag{3.1}$$

dimana:

x konstant

t variabel

Definisi 13:

Titik maksimum integran Q (x, t) adalah titik dimana harga Q (x, t) mencapai maksimum.

Contoh 3:

$Q(x, t) = e^{-1/2\,(t-x)^2}$

x = konstant

t = variabel

fungsi Q (x, t) mencapai maksimum pada t = x, dicari dengan cara sebagai berikut:

di log naturalkan, dideferensialkan harganya = 0

$$\frac{d}{dx} \ln Q(x, t) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \ln e^{-1/2\,(t-x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\ (t-x)^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\ (-\frac{1}{2}\ (t^2 - 2xt - x^2)) = 0$$

$$-\frac{1}{2}(2t - 2x) = 0$$

sehingga $t = x$

Definisi 14: Metoda Laplace

Metoda Laplace adalah suatu metoda untuk mendapatkan uraian asimtotik dari integral (3.1) tersebut di atas dengan cara mengintegralkan (sepanjang selang yang memuat titik maksimum integran $Q\ (x,\ t)$ hampiran integran $Q\ (x,\ t)$ di sekitar $t = t_o$ ($t_o \in (a, b)$) dimana t_o merupakan titik maksimum integran $Q\ (x,\ t)$ dan untuk $x \to \infty$ daerah di sekitar $t = t_o$ mendominasi integran yang dimaksud dominan di sini adalah:

Jika $x_1 > x_2$ maka untuk $t = t_o \pm \delta$ berlaku $Q\ (x_1,\ t) < Q\ (x_2,\ t)$ di mana $\delta > 0$ dan $t_o \pm \delta \neq 0$.

Teorema 2:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Bukti:

Misalkan $I_M = \int_0^M e^{-t^2}\, dt = \int_0^M e^{-s^2} ds$ dan misalkan

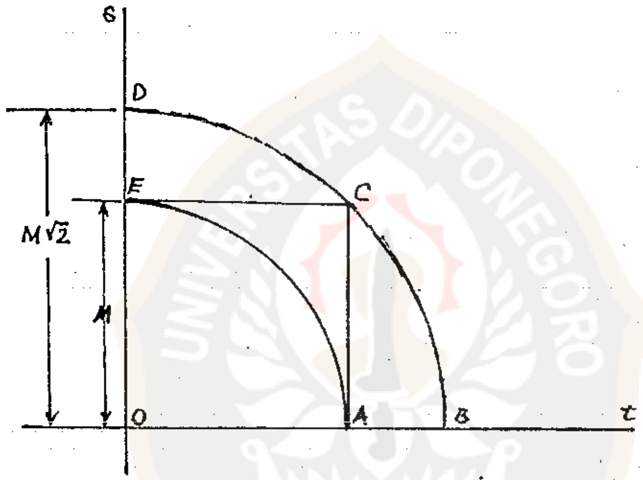
$\lim\limits_{m \to \infty} I_M = I$, yakni nilai integral yang diperlukan. Maka

$$I_M^2 = \left(\int_0^M e^{-t^2}\,dt\right)\left(\int_0^M e^{-s^2}\,ds\right)$$

$$= \int_0^M \int_0^M e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds$$

$$= \iint_{R_M} e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds$$

dimana R_M adalah bujur sangkar OACE yang sisinya M (lihat gambar 4).



Gambar 4

Karena integral tersebut positif, maka diperoleh

$$= \iint_{R_1} e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds \leq I_M^2 \leq \iint_{R_2} e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds \qquad (3.2)$$

Dimana R_1 dan R_2 adalah daerah di dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran-lingkaran yang berturut-turut mempunyai jari-jari M dan M $\sqrt{2}$. Dengan menggunakan kooridat polar, maka dari (3.2) kita memperoleh:

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{M} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \leq I_M^2 \leq \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{M\sqrt{2}} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

atau

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-M^2}\right) \le I_M^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2M^2}\right) \qquad (3.3)$$

Maka dengan mengambil limit untuk $M \to \infty$ di dalam (3.3)

kita dapatkan $\lim\limits_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \pi/4$ dan $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Terbukti $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (3.4)

Dari (3.4) kita dapatkan $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2 x}\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}$ (3.5)

Berikut kita tinjau dua contoh penyelesaian masalah uraian asimtotik dari fungsi berbentuk integral dengan metoda Laplace.

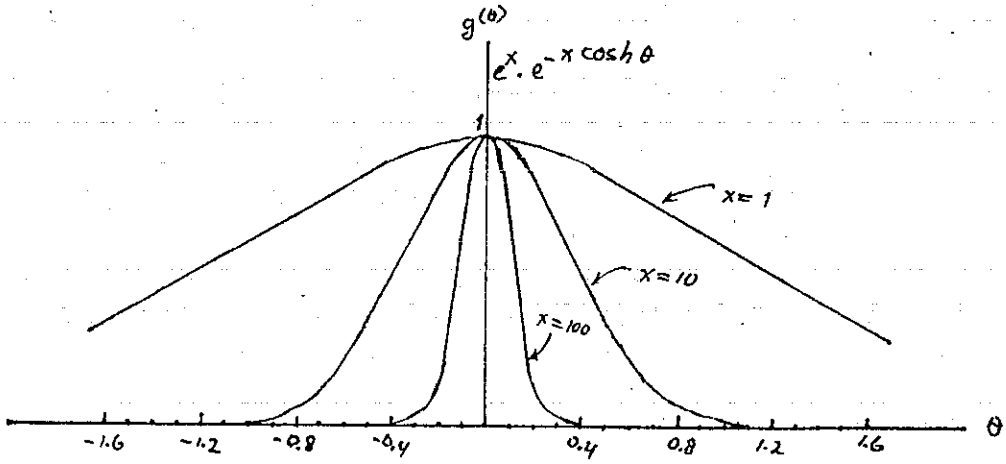
3.2. Contoh Permasalahan

3.2.1. Fungsi bernilai riil yang dinyatakan dalam bentuk integral exponensial.

Bentuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \cosh \theta}\, d\theta \qquad (3.6)$$

Integran mencapai maksimum pada $\theta = 0$ dimana $\cosh \theta = 1$ untuk $\theta \neq 0$, $\cos \theta > 1$ sehingga di sekitar $\theta = 0$ harga integran akan turun cepat terhadap harga integran pada $\theta = 0$. Oleh karena itu untuk $x \to \infty$ daerah di sekitar $\theta = 0$ akan mendominasi integran, lihat gambar 5.



Gambar 5

Di sekitar $\theta = 0$ dapat kita terima hampiran

$\cosh\theta \simeq 1 + \dfrac{\theta^2}{2}$ dengan penderetan Mac Laurin

$$g(\theta) = \cosh\theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}) \rightarrow g(0) = 1$$

$$g'(\theta) = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) \rightarrow g'(0) = 0$$

$$g''(\theta) = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}) \rightarrow g''(0) = 1$$

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\theta^n}{n!} . = 1.\frac{\theta^0}{0!} + 0.\frac{\theta^1}{1!} + 1.\frac{\theta^2}{2!} + \ldots$$

sehingga $(\theta) = \cosh\theta \simeq 1 + \dfrac{\theta^2}{2}$

maka integral (3.1) menjadi:

$$f(x) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(1+\frac{\theta^2}{2})}\, d\theta$$

$$\simeq 2e^{-x}\int_{0}^{\infty} e^{-x\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta$$

misalkan $\dfrac{\theta^2}{2} = t^2$

$$\theta^2 = 2t^2$$

$$\theta = 2^{1/2}\ t$$

$$d\theta = 2^{1/2}\ dt$$

sehingga $f(x) \simeq 2e^{-x} \int_0^\infty e^{-xt^2}\, 2^{1/2}\ dt$ dari (3.5) didapat

$$f(x) \simeq 2e^{-x}.2^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}\right)$$

$$f(x) \simeq e^{-x} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2}.$$

Cara lain :

Untuk mendapatkan suku-suku asimtotik berikutnya maka dilakukan substitusi variabel sebagai berikut

$$\cosh\theta - 1 = t^2,\ -\infty < t < \infty \qquad (3.7)$$

Persamaan (3.7) dideferensialkan terhadap θ diperoleh

$$\sinh\theta = 2t\,\frac{dt}{d\theta} \qquad (3.8)$$

dari rumus:

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

$$\sinh^2\theta = \cosh^2\theta - 1$$

$$\begin{aligned}\sinh\theta &= (\cosh^2\theta - 1)^{1/2}\\ &= \{(t^2+1)^2 - 1\}^{1/2} = \{t^4 + 2t^2\}^{1/2}\\ &= \{t^2\,(t^2+2)\}^{1/2} = t\,(t^2+2)^{1/2} \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Substitusi (3.9) ke dalam (3.8) menghasilkan

$$2t \frac{dt}{d\theta} = t\ (t^2 + 2)^{1/2}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = 1/2\ (t^2 + 2)^{1/2}$$

$$d\theta = 2\ (t^2 + 2)^{-1/2}\ dt$$

$$= 2.\ \{2^{-1/2}\ (\frac{1}{2}\ t^2 + 1)^{-1/2}\}\ dt$$

$$= 2^{1/2}\ (\frac{1}{2}\ t^2 + 1)^{-1/2}\ dt \qquad (3.10)$$

Substitusi (3.10) ke dalam (3.6) diperoleh:

$$f(x) = 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(1+t^2)}\ (\frac{1}{2} t^2 + 1)^{-1/2}\ dt$$

$$= 2.2^{1/2} \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+t^2)}\ (\frac{1}{2} t^2 + 1)^{-1/2}\ dt \qquad (3.11)$$

Integran (3.11) mencapai harga maksimum pada t = 0

$$f(x) = = 2.2^{1/2} \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+t^2)}\ (\frac{t^2}{2} + 1)^{-1/2}\ dt$$

Kita deretkan $(\frac{t^2}{2} + 1)^{-1/2}$ dengan deret Mac Laurin

Misalkan

$$g(t) = (\frac{t^2}{2} + 1)^{-1/2} \text{ maka } g(0) = 1$$

$$g'(t) = -\frac{1}{2}(\frac{t^2}{2} + 1)^{-3/2}.t \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$g''(t) = \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-5/2} t^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-3/2} \Rightarrow g''(0) = \frac{1}{2}$$

$$g'''(t) = \frac{-15}{8}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-7/2} t^3 - \frac{6t}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-5/2}$$

$$+ \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-5/2} .t \Rightarrow g'''(0) = 0$$

$$g^{IV}(t) = \frac{105}{6}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-9/2} t^4 - \frac{45}{8} t^2 \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)$$

$$- \frac{30}{8}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-7/2} t^2 + \frac{6}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-5/2}$$

$$- \frac{15}{8} + \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-7/2} t^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^{-5/2}$$

$$\Rightarrow g^{IV}(0) = \frac{6}{4} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4} .$$

Dengan rumus Mac Laurin

$$g(t) = \sum_{0}^{\infty} g^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$$

akan diperoleh:

$$g(t) = 1 + 0 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2!} + 0 + \frac{9}{4}\frac{t^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{3t^4}{32} + \ldots$$

Maka

$$f(x) = 2.2^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-x(1 + t^2)} \left(1 - \frac{t^2}{4} + \frac{3t^4}{32} + \ldots\right) dt$$

$$f(x) = 2.2^{1/2}\, e^{-x} \left[\int_0^\infty e^{-xt^2}\, dt - \int_0^\infty e^{-xt^2} \frac{t^2}{4}\, dt\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty e^{-xt^2} \frac{3t^4}{32} + \ldots\right]$$

Dari (3.5) diperoleh

- $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}$

- $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt^2} \frac{t^2}{4}\, dt = \frac{1}{4} \quad e^{-xt^2}\, t.t\ dt$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{t}{2x} \quad e^{-xt^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2x} \int_0^\infty e^{-xt^2} dt\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{16x} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2} = \frac{1}{16x^{3/2}} (\pi)^{1/2}$$

- $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt^2} \frac{3}{32}\, t^4\, dt = \frac{3}{32} \int_0^\infty e^{-xt^2}\, t.t^3\ dt$

$$= \frac{3}{32}\left[-\frac{t^3}{2x} \quad e^{-xt^2}\Big|_0^\infty + \frac{3}{2x} \int_0^\infty e^{-xt^2} dt\right]$$

$$= \frac{3}{32}\left[\frac{3}{2x} \cdot \frac{1}{4x}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{9}{256\ x^2} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}$$

Jadi

$$f(x) \simeq 2.2^{1/2}\, e^{-x} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2} - \frac{1}{16x}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2} + \frac{9}{256x^2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2} + \ldots\right]$$

$$\simeq e^{-x}\, (2\pi)^{1/2} \left[\frac{1}{x^{1/2}} - \frac{1}{8x^{3/2}} + \frac{9}{128x^{5/2}} + \ldots\right]$$

3.2.2. Fungsi Gamma (x + 1)

Berikut akan kita bahas (selesaikan) lebih lanjut tentang fungsi Gamma (x + 1)
Fungsi Gamma (x + 1) berbentuk:

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^x\, dt = = \int_0^\infty e^{-t + x \ln t}\, dt \qquad (3.12)$$

Definisi 15:
Proses kondensasi dalam metoda Laplace adalah:
Semakin besar harga x yang diambil maka perbedaan nilai integran akan semakin kecil, atau
Jika diambil harga x yang lebih besar maka bentuk puncak maksimum yang dicapai akan semakin meruncing.

Contoh: Lihat gambar 5.
Semakin besar harga x yang diambil maka semakin meruncing bentuk puncak maksimum yang dicapai, sehingga perbedaan nilai integran akan semakin kecil.

Integran (3.12) mencapai maksimum pada $t = x$
Untuk $t \neq x$ harga $-t + x \ln t$ akan menuju $-\infty$ pada masing-masing ujung interval sehingga seharusnya andil terbesar berasal dari daerah di sekitar $t = x$.

Akan tetapi pada integran (3.12) semakin besar harga x yang diambil akan semakin datar bentuk puncak maksimum yang dicapai, sehingga perbedaan nilai integran makin besar. Hal ini tidak sesuai dengan proses kondensasi yang digambarkan dalam metoda Laplace di atas.

Oleh karena itu metoda Laplace tak dapat diterapkan secara langsung untuk mencari solusi asimtotik dari (3.12) maka lebih dahulu dilakukan substitusi variabel:

$$t = x\tau,\ 0 < \tau < \infty$$

Integral (3.12) menjadi

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-x\tau} (x\tau)^x\, x\, d\tau$$

$$= x^{x+1} \int_0^\infty e^{-x\tau}\ \tau^x\, d\tau$$

$$= x^{x+1} \int_0^\infty e^{-x\tau + x \ln \tau}\, d\tau$$

$$= x^{x+1} \int_0^\infty e^{x(-\tau + \ln \tau)}\, d\tau \qquad (3.13)$$

Integran (3.13) mencapai harga maksimum pada $\tau = 1$, untuk $x \to \infty$ daerah di sekitar $\tau = 1$ akan mendominasi integran. Dengan rumus Taylor untuk $\tau = 1$ pangkat dari e pada (3.13) dapat diuraikan menjadi

$$x(-\tau + \ln \tau) = x\ \{-1 - \frac{1}{2} (\tau - 1)^2 - \ldots\}$$

Bukti:

Misalkan $g(\tau) = -\tau + \ln \tau$ maka $g(1) = -1$

$g'(\tau) = -1 + \tau^{-1}$ $\qquad g'(1) = 0$

$g''(\tau) = -\tau^{-2}$ $\qquad g''(1) = -1$

Dengan rumus Taylor

$$g(\tau) = \sum_0^\infty g^n(1)\ \frac{(\tau - 1)^n}{n!}$$

akan diperoleh

$$g(\tau) = -1 + 0 - \frac{(\tau - 1)^2}{2!} + \ldots = -1 - \frac{1}{2}(\tau - 1)^2 + \ldots$$

$$x(-\tau + \ln \tau) = x\{-1 - \frac{1}{2}(\tau - 1)^2 + \ldots\}$$

$$\text{sehingga } \Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^\infty e^x \{-1 - \frac{1}{2}(\tau - 1)^2 + \ldots\}\, dt \quad (3.14)$$

Batas bawah integral (3.14) dirubah menjadi $-\infty$ dengan anggapan bahwa andil terbesar kepada integral tetap berasal dari daerah di sekitar $\tau = 1$.

$$\Gamma(x+1) \simeq x^{x+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\{-1-\frac{1}{2}(\tau-1)^2\}}\, d\tau$$

$$\simeq 2x^{x+1} \int_0^\infty e^{x\{-1-\frac{1}{2}(\tau-1)^2\}}\, d\tau$$

$$\simeq 2x^{x+1} e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x(\tau-1)^2}\, d\tau$$

$$\simeq 2x^{x+1} e^{-x} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{1/2x}\right)^{1/2}$$

$$\simeq x^{x+1} e^{-x} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2}$$

$$\simeq x^x e^{-x} (2\pi x)^{1/2} \quad (3.15)$$

Untuk mendapatkan suku-suku asimtotik berikutnya dari (3.13) dilakukan substitusi variabel

$$-\tau + \ln \tau = -1 - \xi^2 \; , \; -\infty < \xi < \infty \qquad (3.16)$$

Dengan substitusi (3.16) akan dibentuk integral baru dengan variabel ξ. Caranya adalah sebagai berikut:

Misalkan $\tau = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$

$$\frac{d\tau}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + \ldots + na_n\xi^{n-1} + \ldots \qquad (3.17)$$

Kemudian didifferensialkan (3.16) terhadap ξ, akan didapat:

$$-\frac{d\tau}{d\xi} + \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{d\xi} = -2\xi$$

$$-\frac{d\tau}{d\xi}\left(1 - \frac{1}{\tau}\right) = -2\xi$$

$$\frac{\tau-1}{\tau} = \frac{2\xi}{\frac{d\tau}{d\xi}}$$

$$\frac{\tau-1}{\tau} - \frac{2\xi}{\frac{d\tau}{d\xi}} = 0 \qquad (3.18)$$

Substitusi (3.17) kedalam (3.18) menghasilkan:

$$\frac{(a_0-1)+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n+\ldots}{a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n+\ldots} - \frac{2\xi}{a_1+2a_2\xi+\ldots+na_n\xi^{n-1}+\ldots} = 0$$

$$\{(a_0-1)+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n+\ldots\}\{a_1+2a_2\xi+\ldots+na_n\xi^{n-1}+\ldots\}-$$
$$2\xi\{a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n+\ldots\}=0 \qquad (3.19)$$

Dengan me-nolkan koefisien dari pangkat yang sama pada (3.19) maka akan diperoleh:

$(a_0-1)a_1 = 0,\ a_1 \neq 0,\ a_1 = 1$

$a_1^2 - 2a_0 = 0,\ a_1^2 - 2 = 0,\ a_1 = \pm\sqrt{2}$

$a_1a_2 + 2a_1a_2 - 2a_1 = 0,\ 3a_1a_2 = 2a_1,\ a_2 = \dfrac{2}{3}$

$a_1a_3 + 3a_1a_3 + 2a_2^2 - 2a_2 = 0$

$4a_1a_3 + 8/9 - 4/3 = 0\ ,\ 4\sqrt{2}\ a_3 = 4/9\quad a_3 = \dfrac{1}{9\sqrt{2}}$

$5a_1a_4 + 5a_2a_3 - 2a_3 = 0$

$$\begin{aligned} a_4 &= (-5a_2a_3 + 2a_3)/5a_1 \\ &= (-5.2/3.1/9\sqrt{2} + 2.\ 1/9\sqrt{2}\ )/5\sqrt{2} \\ &= (-10/27\sqrt{2}) + 6/27\sqrt{2}\ )/5\sqrt{2} = -2/135 \end{aligned}$$

$a_1a_5 + 2a_2a_4 + 3a_3^2 + 4a_2a_4 + 5a_1a_5 - 2a_4 = 0$

$6a_1a_5 + 6a_2a_4 + 3a_3^2 - 2a_4 = 0$

$$a_5 = (-6a_2a_4 - 3a_3^2 + 2a_4)/6a_1$$

$$= (-6.\frac{2}{3})(-\frac{2}{135}) - \frac{3}{162} - \frac{4}{135}/6\sqrt{2}$$

$$= (8/135 - 3/162 - 4/135)/6\sqrt{2} = (4/135 - 3/162)/6\sqrt{2}$$

$$= (4/135 - 1/54)/6\sqrt{2} = (3/270)/6\sqrt{2} = \sqrt{2}/1080$$

$$\tau = 1+\xi\sqrt{2} + 2/3\,\xi^2 + 1/9\sqrt{2}\,\xi^3 - 2/135\,\xi^4 + \sqrt{2}/1080\,\xi^5 + \ldots$$

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \sqrt{2} + 4/3\,\xi + 1/3\sqrt{2}\,\xi^2 - 8/135\,\xi^3 + \sqrt{2}/216\,\xi^4 + \ldots$$

$$d\tau = (\sqrt{2}+4/3\,\xi + 1/3\sqrt{2}\,\xi^2 - 8/135\,\xi^3 + \sqrt{2}/216\,\xi^4 + \ldots)\,d\xi$$

Dengan substitusi variabel

$$-\tau + \ln \tau = -1 - \xi^2$$

Maka $\Gamma(x + 1) = x^{x+1} \int_0^{\infty} e^{x(-\tau + \ln \tau)} \, d\tau$

dapat dirubah menjadi

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x(-1 + \xi^2)} (\sqrt{2} + 1/3\sqrt{2}\ \xi^2 + \sqrt{2}/216\ \xi^4 + \ldots)\, d\xi$$

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\ e^{-x\xi^2} (\sqrt{2} + 1/3\sqrt{2}\ \xi^2 + \sqrt{2}/216\ \xi^4 + \ldots)\, d\xi$$

Karena variabel τ berharga $0 < \tau < \infty$ maka variabel ξ berharga $-\infty < \xi < \infty$

$-\tau + \ln \tau = -1 - \xi^2$

$\xi^2 = \tau - \ln \tau - 1$

$\tau = 1 \rightarrow \xi^2 = 1 - 0 - 1 = 0 \rightarrow \xi = 0$

$0 < \tau < 1 \rightarrow 0 < \xi^2 < \infty \quad -\infty < \xi < \infty$

$1 \leq \tau < \infty\ ,\ 0 < \xi^2 < \infty \rightarrow -\infty < \xi < \infty$

selanjutnya kita hitung

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\ e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\xi^2} (\sqrt{2} + 1/3\sqrt{2}\ \xi^2 + \sqrt{2}/216\ \xi^4 + \ldots)\, d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\ e^{-x\xi^2}\, d\xi = 2\sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-x\xi^2}\, d\xi = 2\sqrt{2}\ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1/3\sqrt{2}\ e^{-x\xi^2} \xi^2 d\xi = 2/3\ \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-x\xi^2} \xi^2 d\xi = 2/3\sqrt{2}\ \left[1/4x\left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{6x} \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}/216\ e^{-x\xi^2}\ \xi^4 d\xi = 2\sqrt{2}/216 \int_{0}^{\infty} e^{-x\xi^2}\ \xi^4 d\xi$$

$$= 2\sqrt{2}/216\ \left[\frac{3}{8x^2} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{1/2} \right]$$

$$= \frac{1}{288x^2} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2}$$

Jadi

$$\Gamma(x+1) \simeq x^{x+1}\ e^{-x}\ \left[\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} + \frac{1}{6x}\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} + \frac{1}{288x^2}\ x^2 \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} + \ldots\right]$$

$$\simeq x^{x+1}\ e^{-x}\ \left[\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} + \frac{1}{12x}\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} + \frac{1}{288x^2}\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} + \ldots\right]$$

$$\simeq x^{x}\ e^{-x}\ (2\pi x)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \ldots\right]$$