BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Neighborhood

Definisi 1:

Diberikan S: suatu himpunan

Komplemen S adalah semua titik dalam bidang yang bukan anggota S.

Definisi 2:

Ambil z_o : suatu titik dalam bidang

r : suatu bilangan riil positif

r neighborhood dari z_o didefinisikan sebagai semua titik z dalam bidang sedemikian sehingga

$$|z - z_o| < r$$

dan ditulis $N(z_o, r)$. Jadi $N(z_o, r) = \{z \mid |z-z_o| < r\}$

Definisi 3:

Suatu titik w dinamakan suatu titik boundary dari S jika setiap neighborhood dari w terdiri atas sedikitnya satu titik dari S dan satu titik dari komplemen S.

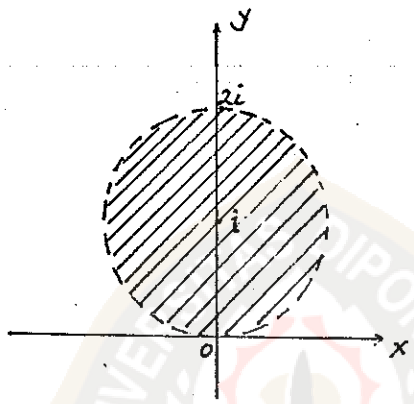
Definisi 4:

Suatu titik z dinamakan titik interior dari himpunan S jika hanya jika z anggota S tetapi bukan merupakan titik boundary dari S.

Contoh 1:

N (i, 1) = 1 neighborhood dari i: adalah interior dari lingkaran $|z - i| = 1$ yaitu terdiri atas semua titik z sedemikian hingga $|z - i| < 1$

$N(i, 1) = \{z \mid |z - i| < 1\}$



Gambar 1

Definisi 5:

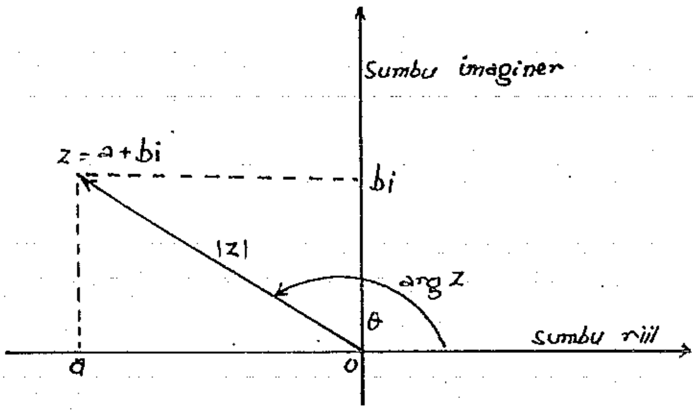
Diberikan suatu bilangan z = a + ib, modulus dari z, ditulis $|z|$ didefinisikan sebagai besarnya vektor z yaitu

$$|z| = [a^2 + b^2]^{1/2}$$

Definisi 6:

Argumen z, ditulis arg z didefinisikan sebagai suatu sudut dimana vektor yang berkorespondensi ke z membuat arah positif dari axis riil; yakni arg (a + ib) adalah suatu sudut sedemikian hingga

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \qquad \text{dan } \cos\theta = \frac{a}{|z|}$$



Gambar 2. Modulus dari z dan arg z

2.2. Fungsi Hiperbolik

Definisi 7:

1. Bilangan e adalah suatu bilangan riil yang merupakan jawab tunggal dari persamaan ln x = 1, nilai hampirannya ialah 2,71828 ...

2. Besar e^x adalah bilangan riil yang memenuhi

   $\ln e^x = x$

3. Fungsi exponen adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh persamaan

   $f(x) = e^x,\ x \in R$

Fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai kombinasi dari fungsi exponen sebagai berikut:

Definisi 8 fungsi hiperbolik:

1. Fungsi sinus hiperbolik

$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

2. Fungsi cosinus hiperbolik

$$f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

2.3. Koordinat Polar/Kutub

Definisi 9:

Jika diketahui titik $P(x, y)$ dalam sistem koordinat kartesius, maka titik P dalam sistem koordinat kutub ditulis sebagai $P(r, \theta)$ dimana

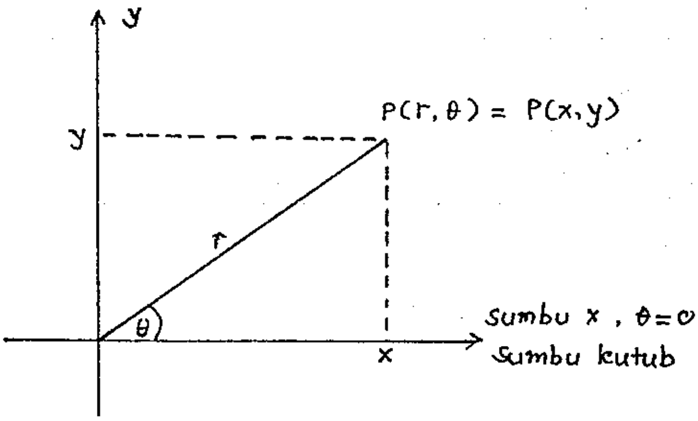
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

dan memenuhi

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{dan} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

Definisi 10:

Jika diketahui titik $P(r, \theta)$ dalam sistem koordinat kutub maka titik P dalam sistem koordinat kartesius ditulis sebagai $P(x, y)$ dimana $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.



Gambar 3

2.4. Deret Taylor dan Maclaurin

Definisi 11:

Suatu fungsi y = f(x) yang bisa dideferensialkan sebanyak n kali di titik x = a, maka fungsi tersebut bisa dideretkan menurut deret Taylor di titik a sebagai berikut:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \left(\frac{x-a}{2!}\right)^2 f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{2!} f^{(n)}(a) + \dots$$

untuk a = 0 deretnya disebut deret Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Contoh 2:

Diketahui f(x) = sin x

Tentukan suku banyak (deret) Mac Laurin berderajat n untuk fungsi f.

Jawab:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

f(x) = sin x, f(0) = 0

f'(x) = cos x, f'(0) = 1

f"(x) = - sin x, f"(0) = 0

$f'''(x) = -\cos x,\ f'''(0) = -1$

$f^{(IV)}(x) = \sin x,\ f^{(IV)}(0) = 0$

$f^{(V)}(x) = \cos x,\ f^{(V)}(0) = 1$

Jadi $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}\ x^{2n-1}}{(2n-1)}$

2.5. Fungsi Gamma

Definisi 12:

Fungsi Gamma x ditulis: $\Gamma(x)$ didefinisikan:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

Contoh 3:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{1-1}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, t^0\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, dt.$$

$$= -e^{-t}\Big|_0^\infty = -e^{-\infty} - (-e^{-0})$$

$$= 0 - (-1) = 1$$

Teorema 1:

$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$

Bukti:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1+1}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x}\, dt$$

$$= -\int_0^\infty t^{x}\, de^{-t}$$

$$= -\left(t^{x} e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t}\, x t^{x-1}\, dt\right)$$

$$= 0 + x \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

$$= x\, \Gamma(x)$$

Untuk $\Gamma(x+1)$ lebih lanjut akan dibahas pada bab III.