BAB II

TEORI PENUNJANG

II.1 MATRIKS

II.1.1 Pengertian

Definisi 2.1

Matriks adalah himpunan bilangan - bilangan baik itu bilangan riil atau bilangan kompleks yang disusun secara khusus yakni dalam bentuk baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang. Setiap bilangan dalam matriks disebut unsur atau elemen dari matriks, sedang batasnya dinyatakan dengan :

$$\left(\quad \right) \quad \text{atau} \quad \left[\quad \right]$$

Notasi untuk matriks biasanya dinyatakan dalam huruf besar, sedang untuk elemen - elemennya dinyatakan dalam huruf kecil. Secara lengkap ditulis dengan :

$A = (a_{ij})$ berarti bahwa matriks mempunyai elemen - elemen a_{ij}, dimana indeks i menyatakan baris ke i dan indeks j menyatakan kolom ke j.

Bila A adalah matriks yang mempunyai m baris dan n kolom maka matriks A itu ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris ke } 1 \\ \rightarrow \text{baris ke } 2 \\ \\ \rightarrow \text{baris ke } m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom ke } 1 & \text{kolom ke } 2 & \text{kolom ke } n \end{array}$$

atau $A = (a_{ij})$, dimana $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Sehingga dapat juga ditulis dengan $A_{m x n} = (a_{ij})$, $m \times n$ disebut ukuran atau ordo dari matriks. Dua buah matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ untuk setiap i dan j ($i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$)

II.1.2 Beberapa Jenis Matriks Berdasar Susunan Elemennya

1. Matriks Bujursangkar

   Matriks Bujursangkar adalah matriks yang banyaknya baris dan kolom sama.

   Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Diagonal

   Matriks Diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua elemennya berharga nol, kecuali elemen – elemen diagonal utamanya.

Jadi suatu matriks A_{mxn} , dimana m = n , adalah matriks diagonal apabila elemen – elemen a_{ij} , untuk i = j tidak sama dengan nol. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, ...,a_{mn} disebut Diagonal Utama dari matriks tersebut.

Sedangkan :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + ...+ a_{mn}$$

disebut Trace dari matriks tersebut.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Nol (Null Matriks)

Matriks nol adalah matriks yang semua elemen – elemennya berharga nol.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Satuan (Unit Matriks, Identity matriks)

Matriks Satuan adalah matriks diagonal yang elemen – elemen pada diagonal berharga satu (1).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Contoh :

$P = [\ p_1, p_2, \dots, p_n\ ]$

6. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

II.1.3 Operasi Perkalian Matriks

Pada perkalian matriks A dan B yang ditulis AB, matriks A disebut matriks pertama dan matriks kedua. Didalam perkalian matriks diperlukan persyaratan yaitu banyaknya kolom matriks pertama harus sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Definisi 2.2

Pandang $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dimana matriks A mmempunyai jumlah kolom yang sama dengan jumlah baris matriks B. Misal matriks A mempunyai ordo m x p dan matriks B mempunyai ordo p x n. Maka hasil perkalian AB adalah matriks C = (c_{ij}) yang mempunyai ordo m x n, dengan elemen ke ij nya diperoleh dengan mengalikan baris ke i dari matriks A dengan kolom ke j dari matriks B.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{ij} \quad \cdots \quad a_{ip}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{ij} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}} & \cdots b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} \cdots & & \cdots b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & . & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & . \\ . & \cdots & & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & . & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} a_{il}\, b_{lj}$$

Ditekankan disini bahwa hasil perkalian matriks AB tidak terdefinisi apabila matriks A berordo m x p dan matriks B berordo q x n dimana $p \neq q$ .Hukum-hukum yang berlaku pada perkalian matriks jika A, B,C adalah matriks - matriks yang memenuhisyarat-syarat yang diperlukan :

a. $(AB)C = A(BC)$ $\longrightarrow$ *Assosiatif*

b. $AB \neq BA$ $\longrightarrow$ *Tidak Komutatif*

c. $A(B + C) = AB + AC$ $\longrightarrow$ *Distribusi kiri*

d. $(B + C)A = BA + CA$ $\longrightarrow$ *Distribusi kanan*

e. $\alpha\ (AB) = (\alpha A)\ B = A\ (\alpha B)$ *,dimana α skalar*

f. $AB = AC$ belum tentu $B = C$

g. $AI = IA = A$

II.2 Transformasi Fourier Diskret

II.2.1 Pengartian

Definisi

Ambil $x(k)$, $k = 0,1,2,\ldots\ldots,N-1$ yang merupakan barisan bilangan kompleks sebanyak N. Transformasi Fourier Diskret (*Discrete Fourier Transform* = DFT) dari barisan $x(k)$ didefinisikan sebagai :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\ W_N^{kn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

dimana $n = 0,1,2,\ldots,N-1$ dan $W_N = e^{-j2\pi kn/N}$,

serta $j = \sqrt{-1}$.

Harga $x(k)$ dapat diperoleh dari barisan transformasi $X(n)$ sebagai :

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{-kn} \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

dimana $k = 0,1,2,\ldots,N-1$

yang sering disebut Invers Transformasi Fourier Diskret (*Invers Discrete Fourier Trnsform* = IDFT)

Untuk membuktikan pers (2.2), substitusi pers (2.1) ke pers (2.2) yaitu :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\, W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, W_N^{nm} \right] W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{n(m-k)} \right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

Dengan menghitung penjumlahan yang didalam kurung tegak dengan menggunakan rumus jumlah pembagian suatu deret ukur , akan diproleh :

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m-k)} = \frac{1 - W^{N(m-k)}}{1 - W^{(m-k)}} = \begin{cases} \emptyset, & \text{untuk } k \neq m \\ N, & \text{untuk } k = m \end{cases}$$

Jadi ruas kanan pada pers (2.3)adalah nol, kecuali untuk m = k . Maka dari itu terdapat satu suku tidak nol yang terjadi untuk m = k dan nilainya adalah x(k). Jadi akan diperoleh pasangan Transformasi Fourier Diskret (*Discrete Fourier Transform = DFT*) yaitu :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, W^{kn} \qquad \text{dan Inversnya}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{-kn}$$

atau sering ditulis sebagai :

$$X(n) \quad \circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ\, X(k)$$

II.2.2 Kesimetrisan Dan Keperiodikan Dari Faktor Putaran

Tinjau kembali definisi 2.1 . Notasi $W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$ disebut faktor putaran (*Twiddle Faktor*) .

Faktor putaran tersebut mempunyai sifat - sifat :

a. $W_N^{\alpha} = -W_N^{\alpha+N/2}$ (*Sifat Simetris*)

b. $W_N^{\alpha} = W_N^{\alpha+N}$ (*Sifat Periodik*)

Bukti :

a. Sifat Simetris

$$W_N^{\alpha+N/2} = W_N^{\alpha} \; W_N^{N/2}$$

$$= W_N^{\alpha} \; e^{-j2\pi(N/2)/N}$$

$$= W_N^{\alpha} \; e^{-j\pi}$$

$$W_N^{\alpha+N/2} = W_N^{\alpha} \left[\cos \pi - j \sin \pi \right]$$

$$= W_N^{\alpha} \; [-1 - 0] = - W_N^{\alpha} \quad \text{..........}(2.4)$$

Mengalikan kedua ruas persamaan (2.4) dengan -1 akan menghasilkan :

$$W_N^{\alpha} = - W_N^{\alpha+N/2}$$

b. Sifat Periodik

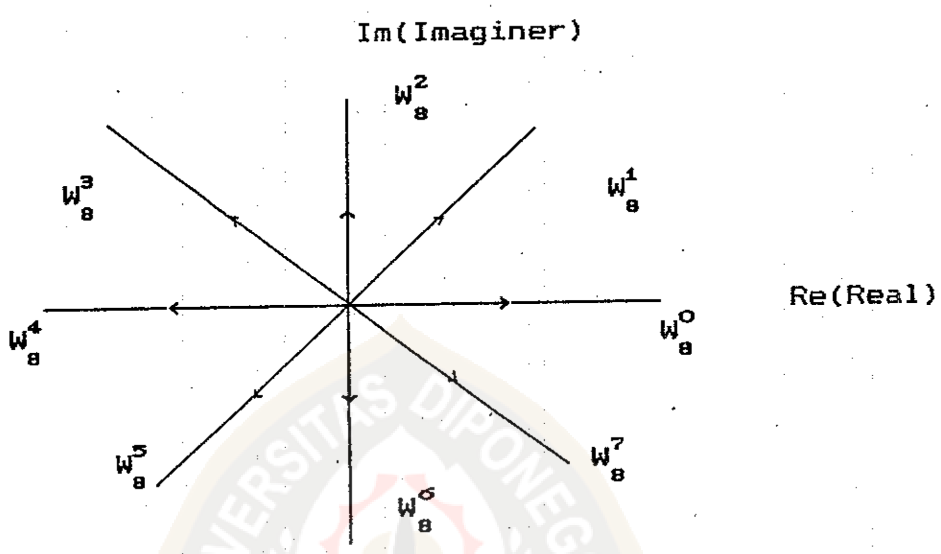
$$W_N^{\alpha+N} = W_N^{\alpha} \; W_N^{N}$$

$$W_N^{\alpha+N} = W_N^{\alpha} \; e^{-j2\pi N/N}$$

$$= W_N^{\alpha} \; e^{-j2\pi}$$

$$= W_N^{\alpha} \left[\cos 2\pi - j \sin 2\pi \right]$$

$$= W_N^{\alpha} \; [1 - 0] = W_N^{\alpha} \quad \text{.............(2.5)}$$



Gambar 2.1 Sifat Simetris dan Periodik dari

Faktor Putaran , untuk N = 8

II.2.3 Sifat - Sifat Transformasi Fourier Diskret

Transformasi Fourier Diskret bermanfaat sebagai metode numerik untuk menghitung suatu fungsi kontinu .

Adapun sifat - sifatnya antara lain :

a. Kelinearan

Teorema 2.1

Jika x(k) dan y(k) mempunyai Transformasi Fourier Diskret X(n) dan Y(n) maka :

$$x(k) + y(k) \longleftrightarrow X(n) + Y(n)$$

Bukti :

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left[x(k)+y(k)\right]e^{-j2\pi kn/N} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\ e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{k=0}^{N-1} y(k)\ e^{-j2\pi kn/N}$$

$= X(n) + Y(n)$

b. Sifat Simetris

Teorema 2.2

Pasangan Transformasi Fourier Diskret $x(k)\longleftrightarrow X(n)$ mempunyai sifat simetris jika memenuhi :

$$\frac{1}{N}\ X(n) \longleftrightarrow x(-k)$$

Bukti :

$$x(k)= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\ e^{j2\pi kn/N}$$

maka $x(-k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\ e^{j2\pi kn/N}$

Dengan mengganti parameter k dengan n maka

$$x(-n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\ e^{-j2\pi kn/N}$$

c. Pergeseran waktu

Teorema 2.3

Jika $x(k) \longleftrightarrow X(n)$ maka untuk $x(k)$ digeser dengan integer l menjadi :

$$x(k - l) \longleftrightarrow X(n)\ e^{-j2\pi nl/N}$$

Bukti :

Invers Transformasi Fourier Diskret didefinisikan oleh:

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\, e^{j2\pi kn/N}$$

Subtitusi k dengan (k−l) sehingga menjadi :

$$x(k-l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\, e^{j2\pi(k-l)n/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left[X(n)\, e^{-j2\pi nl/N} \right] e^{j2\pi kn/N}$$

$$= X(n)\, e^{-j2\pi nl/N}$$

d. Pergeseran Frekuensi

Teorema 2.4 :

Jika $x(k) \longleftrightarrow X(n)$ maka untuk X(n) digeser dengan integer l menjadi :

$$x(k)\, e^{j2\pi kl/N} \longleftrightarrow X(n-l)$$

Bukti :

Transformasi Fourier Diskret X(n) didefinisikan oleh :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi nk/N}$$

Subtitusi n dengan (n − l) sehingga menjadi :

$$X(n-l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi(n-l)k/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(k)\, e^{j2\pi kl/N} \right] e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= x(k)\, e^{j2\pi kl/N}$$

e. Periodik

Teorema 3.5

Jika pasangan TFD $x(k) \longleftrightarrow X(n)$ mempunyai sifat periodik dengan perioda N maka sampel waktu dan frekuensi periodik dengan perioda N adalah sebagai berikut :

$$x(k) = x(k + N) \text{ dan } X(n) = X(n + N)$$

Bukti :

Ambil mengambil TFD X(n) pada frekuensi n + N.

$$X(n + N) = \sum_{k=o}^{N-1} x(k)\ e^{-j2\pi k(n+N)/N}$$

$$= \sum_{k=o}^{N-1} x(k)\ e^{-j2\pi nkn/N}\ e^{-j2\pi k}$$

$e^{-j2\pi k} = 1$, untuk semua k,sehingga

$X(n) = X(n+N)$.

II.2.4 Faktorisasi Matriks Dan Notasi Sorthand

Suatu cara yang mudah untuk memperoleh kejelasan Algoritma Transformasi Fourier Cepat adalah dengan memanipulasi W^E dalam produk matriks. Selanjutnya W^E akan dinyatakan sebagai :

$$W^E = (w_{ij}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

dan $E = (e_{ij})$

dimana : $w_{ij} = W_N^{e_{ij}}$

$$= e^{-j2\pi e_{ij}/N}$$

Contoh Faktorisasi Matriks ; (dalam contoh ini asal dari matriks diabaikan, keterangan lebih lanjut akan dibahas dalam bab III);

Pandang : $W^{E} = W^{E_2} W^{E_1}$ ....(2.7)

dan ambil N = 4,

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j\infty & -j\infty \\ 0 & 2 & -j\infty & -j\infty \\ -j\infty & -j\infty & 0 & 0 \\ -j\infty & -j\infty & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -j\infty & 0 & -j\infty \\ -j\infty & 0 & -j\infty & 0 \\ 0 & -j\infty & 2 & -j\infty \\ -j\infty & 1 & -j\infty & 3 \end{bmatrix} \quad \text{...(2.8)}$$

maka dari persamaan (2.6) akan diperoleh :

$$W^{E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W^{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -j & 0 & -j \end{bmatrix} \quad \text{...(2.9)}$$

Keterangan :

Elemen-elemen pada matriks W^{E_2} dan W^{E_1}, dapat diperoleh dengan beberapa contoh sebagai berikut :

<u>pada matriks</u> W^{E_2} : $w_{11} = W_N^{e_{11}} = e^{-j2\pi e_{11}/N}$

$$= e^{-j2\pi o/4}$$

$$= e^{o}$$

$$= 1$$

$$w_{13} = W_N^{e_{13}} = e^{-j2\pi e_{13}/N}$$

$$= e^{-j2\pi(-j\infty)/4}$$

$$= e^{-\infty}$$

$$= 0$$

demikian seterusnya.

Matriks-matriks persamaan (2.9) disebut matriks jarang yaitu matriks dimana kolom dan barisnya banyak elemen nol-nya. Selanjutnya matriks-matriks persamaan (2.9) disubstitusi ke persamaan (2.7) akan diperoleh :

$$W^{E} = W^{E_2} W^{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \qquad \text{.....................(2.10)}$$

dimana :

$$E = \begin{array}{c} n\backslash k \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ..(2.11)$$

matriks E adalah suatu matriks barisnya telah diorderkan. Dan matriks (2.11) adalah suatu matriks Transformasi Fourier Cepat yang akan dibahas pada bab III.

Selanjutnya pandang kembali matriks (2.8) dimana mempunyai masukan $-j\infty$. Dengan notasi Sorthand masukan tersebut ditandai "titik atau dot" atau dengan kata lain sebagai "bukan atau tanpa masukan". Sehingga dari persamaan (2.8) dengan notasi Sorthand akan diperoleh :

$$\left. \begin{array}{l} E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \\ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 3 \end{bmatrix} \end{array} \right] ..(2.12)$$

maka akan diperoleh produk matriks $W^{E} = W^{E_2} W^{E_1}$

$$W^{E} = \begin{bmatrix} W^{0+0} & W^{0+0} & W^{0+0} & W^{0+0} \\ W^{0+0} & W^{0+2} & W^{0+0} & W^{0+2} \\ W^{0+0} & W^{0+1} & W^{0+2} & W^{0+3} \\ W^{0+0} & W^{1+2} & W^{0+2} & W^{2+3} \end{bmatrix} \quad \ldots.(2.13)$$

dimana, diperoleh :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots.(2.14)$$

Namun demikian untuk memperoleh matriks E pada persamaan (2.14) dapat dikerjakan dengan menggunakan persamaan berikut :

$$E(k,n) = \sum_{l=0}^{N-1} [\ E_2(k,l) + E_1(l,n)\ ] \quad \ldots\ldots.(2.15)$$

dimana $E_2(k,l)$ dan $E_1(l,n)$ adalah matriks yang data masukan atau elemennya $-j\infty$ telah diganti dengan notasi Sorthand seperti persamaan (2.12). Maka jika $W^{E} = W^{E_2}\ W^{E_1}$, dengan E_2 dan E_1 matriks yang elemennya telah diganti dengan notasi sorthand, akan diperoleh :

$$E = E_2 \dagger E_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2.16)$$

yaitu suatu matriks yang diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.15).

Sebagai contoh :

E(0,0) = (0 + 0) + (0 + bukan masukkan) + (bukan masukkan + 0) + (bukan masukkan + bukan masukkan)

E(0,0) = 0

E(1,1) = (0 + bukan masukan) + (2 + 0) + (bukan masukan + bukan masukan) + (bujan masukan + 1)

E(1,1) = 2

Demikian seterusnya.

Sebagai catatan untuk persamaan (2.15), bila dijumpai bentik ; data masukan + bukan masukan = bukan masukan + bukan masukan = bukan masukan + data masukan = *bukan masukan*. Swcara umum untuk matriks N x N akan memakai notasi :

$W^{E} = W^{E_L} W^{E_{L-1}} \ldots W^{E_1}$ ....(2.17)

$E = E_L + E_{L-1} \ldots + E_1$ ....(2.18)

Matriks E dapat diperoleh dari produks matriks persamaan (2.17), namun biasanya lebi efisien bila dikerjakan dengan matriks eksponen persamaan (2.18).